

УДК 514.76.2

ПОТОК ДЛЯ $SPIN(7)$ -СТРУКТУРЫ

Е. Г. Малькович

FLOW FOR $SPIN(7)$ -STRUCTURE

E. G. Malkovich

Мы приводим уравнение потока для $Spin(7)$ -структуры на конусе над 7-мерным 3-сасакиевым многообразием.

We introduce equation of a flow for the $Spin(7)$ -structure on a cone over 7-dimensional 3-Sasakian manifold.

Ключевые слова: группа голономии, $Spin(7)$ -структура, поток Риччи.

Keywords: holonomy, $Spin(7)$ -structure, Ricci flow.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00598), грантом «Ведущие научные школы» (№ НШ-7256.2010.1.) и грантом Президента РФ (№ МД-249.2011.1).

1. Введение

Одной из задач современной дифференциальной геометрии является поиск метрик со специальными геометрическими свойствами. Как правило, под этим подразумевается существование некоторых геометрических структур или различного рода ограничения на тензор кривизны. Метрики со специальными группами голономии дают ответ на оба вопроса: метрики с исключительными группами голономии имеют нулевой тензор Риччи, и на данный момент неизвестно ни одной риччи-плоской метрики на компактном многообразии, группа голономии которой была бы общего вида.

В последнее время получил распространение метод геометрических потоков. Геометрический поток представляет из себя эволюционное уравнение на метрику, под действием которого метрика должна деформироваться к некоторому требуемому виду. Условно потоки можно разделить на внешние и внутренние. Внешние потоки деформируют геометрию подмногообразий и их вложение в многообразия большей размерности. Например, поток Уилмора должен приводить произвольную поверхность в $\mathbb{R}^3$ к минимальной поверхности. Обобщением потока Уилмора является поток средней кривизны, действующий на гиперповерхностях в произвольном многообразии. Из внутренних потоков наиболее известным является поток Риччи:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = R_{ij},$$

с помощью которого была доказана гипотеза геометризации Тёрстона, и как следствие, гипотеза Пуанкаре. В 2007 году Бренделом и Шэйном с помощью потока Риччи была доказана дифференциальная теорема о сфере, утверждающая, что если секционная кривизна многообразия принимает значения в полуинтервале $(1, 4]$, то оно диффеоморфно сфере.

Менее известны другие внутренние потоки: поток Калаби и поток Ямабе. Поток Ямабе, рассмотренный Гамильтоном некоторое время спустя по-

сле введения потока Риччи, должен деформировать метрику в ее конформном классе так, чтобы скалярная кривизна стремилась к постоянной величине. Поток Калаби возникает как градиентный поток на кэлеровых многообразиях для решения задачи минимизации функционала скалярной кривизны. Основную проблему при изучении геометрических потоков представляет теорема существования решения. Трудность вызвана тем, что геометрический поток представляет из себя нелинейное уравнение параболического типа. Никаких общих методов для решения подобных задач не существует, и на настоящий момент все результаты касаются тех или иных частных случаев.

Грубо говоря, если можно корректно определить оператор Лапласа от некоторого объекта Ψ , то можно исследовать уравнение вида $\Psi_t = \Delta \Psi$. Параллельная $Spin(7)$ -структура однозначно определяет метрику. В свою очередь, существование параллельной $Spin(7)$ -структуры — это существование параллельной 4-формы, а на формах определен оператор Лапласа-Бельтрами. В данной статье мы приводим эволюционное уравнение на $Spin(7)$ -структуру специального вида, определенную на конусе над 3-сасакиевым многообразием, чей кватернионно-кэлеров орбиформ обладает кэлеровой структурой. В разделе 2 содержатся в достаточной полноте необходимые определения и примеры. В разделе 3 мы приводим необходимые обозначения и формулируем основное утверждение.

2. Предварительные сведения

Группа голономии — это инвариант n -мерного многообразия (риманова или псевдориманова), являющийся подгруппой Ли группы $O(n)$ и тесно связанный с геометрией данного многообразия. Дадим строгое определение: пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — кусочно гладкая кривая, такая, что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ для некоторых $x, y \in M$. Тогда для любого касательного вектора $e \in T_x M$ существует единственное гладкое сечение s , такое, что

$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} s(t) = 0$ и $s(0) = e$ для некоторой связности ∇ . Определим $P_\gamma(e) := s(1)$. Тогда $P_\gamma : T_x M \rightarrow T_y M$ корректно определенное линейное отображение, называемое параллельным переносом. Петлей называют кривую, у которой начало и конец совпадают: $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Тогда группой голономии называют

$$Hol_x(\nabla) = \{P_\gamma : \gamma(0) = \gamma(1) = x\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только связность Леви-Чивита, которая сохраняет длины векторов при параллельном переносе, то есть выполнено $Hol_x(\nabla) \subseteq O(n)$. Кроме того, если многообразие связно, то можно показать, что класс сопряженности Hol_x не зависит от выбора отмеченной точки x . В дальнейшем будет рассмотрен только односвязный случай, поэтому будем считать, что группа голономии Hol является связной подгруппой Ли в $SO(n)$.

Теорема Берже утверждает, что если риманово многообразие неприводимо и не является симметрическим пространством, то существует ровно 7 случаев подгрупп в $O(n)$, которые могут быть группами голономии некоторого риманова многообразия. Среди этого списка выделяются группы G_2 и $Spin(7)$, определенных соответственно на 7-мерных и 8-мерных многообразиях. Метрики с соответствующими группами называются исключительными. Достаточно долго стоял вопрос о конкретных примерах метрик с данными группами голономии. Основным интерес представляют компактные примеры. Например, в теоретической физике, в теории струн, данные многообразия должны моделировать "пространство скрытых размерностей". Однако один из первых компактных примеров — КЗ-поверхность с голономией $SU(2)$ — был построен с помощью склейки из некомпактных частей. В дальнейшем пример КЗ-поверхности был использован Джойсом для построения метрик с голономиями G_2 и $Spin(7)$. Поэтому поиск некомпактных примеров также представляет определенный интерес, в особенности если удастся отследить поведение метрики на бесконечности.

Далее мы рассмотрим класс 7-мерных 3-сасакиевых многообразий. Они наделены многими вспомогательными структурами, которые можно использовать для поиска интересных нас метрик. Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g . Конусом $\bar{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$. Многообразие $\bar{M}$ называется 3-сасакиевым, если метрика $\bar{g}$ на $\bar{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp(\frac{m+1}{4})$ (в частности, $m = 4n - 1, n \geq 1$). Данное определение эквивалентно классическому: $\bar{M}$ — 3-сасакиево, если на нем существует три ортонормированных киллинговых векторных поля ξ^i , таких что $[\xi^a, \xi^b] = 2\varepsilon^{abc}\xi^c$ и удовлетворяю-

щих условию сасакиевости [3]. Условие сасакиевости на векторное поле ξ говорит, что тензорное $(1, 1)$ поле $\Phi = \nabla \xi$ должно удовлетворять условию $(\nabla_X \Phi)(Y) = g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi$ для любых векторных полей X и Y на M . Нас интересует поиск метрик со специальными голономиями, и мы будем пользоваться первым определением. Мы будем деформировать конусную метрику на $\bar{M}$ так, чтобы группа голономии стала исключительной.

В качестве классического примера 3-сасакиева многообразия можно привести 7-мерную сферу. Она естественным образом вкладывается в $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{H}^2$ как единичная сфера. Векторные поля ξ^i порождаются умножением на мнимые единицы i, j, k . Как известно, 3-мерная сфера действует на 7-мерной, и возникает обобщенное расслоение Хопфа $S^3 : S^7 \rightarrow S^4$. Аналогичный факт верен и для произвольного 3-сасакиева многообразия M , оно расслаивается над $4n$ -мерным кватернионно-кэлеровым орбиолдом $\mathcal{O}$, слоем данного расслоения является либо S^3 , либо $\mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$. Нас будет интересовать случай, когда орбиолд $\mathcal{O}$ может быть наделен кэлеровой формой ω . Это ограничение устраняет из наших рассмотрений 7-мерную сферу, так как вторые кохомологии 4-мерной сферы нулевые и на ней нет нетривиальных замкнутых 2-форм. Пространство Алоффа-Уоллаха $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — единственное однородное 7-мерное 3-сасакиево многообразие, которое расслаивается над кэлеровым многообразием, в данном случае над $\mathbb{C}P^2$. Дальнейшие наши построения могут быть описаны явно для пространства Алоффа-Уоллаха, но они остаются справедливыми и для произвольного 3-сасакиева многообразия с кэлеровым орбиолдом $\mathcal{O}$.

3. Поток для $Spin(7)$ -структуры

Будем считать, что образующая $\mathbb{R}_+$ конуса $\bar{M}$ задается переменной $0 \leq t < \infty$. Тогда на $\bar{M}$ определено векторное поле ∂_t . Так как $Hol(\bar{M}) \subseteq Sp(2)$, то на конусе $\bar{M}$ есть три комплексных структуры $J^i, i = 1, 2, 3$. Рассмотрим поля $\xi^i := J^i(\partial_t)$, несложно проверить, что они будут ортогональны исходному ∂_t , то есть будут касательными к $M = M \times \{t = 1\} \subset \bar{M}$. Сопоставим векторным полям ξ^i 1-формы по правилу $\eta_i(X) = g(X, \xi^i)$ для векторных полей X на M . Данные три формы называются характеристическими формами 3-сасакиева многообразия. Далее определим 2-формы:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \eta_j \wedge \eta_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Можно проверить [1], что данные формы корректно определены на горизонтальном подрасслоении $\mathcal{H}$ 3-сасакиева расслоения. В пространстве 1-форм на $\mathcal{H}$ можно выбрать подходящий ортонормированный базис $\{\eta_4, \eta_5, \eta, \eta_7\}$, так что формы ω_i при-

мут вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7), \\ \omega_2 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5), \\ \omega_3 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6).\end{aligned}$$

Эта форма записи довольно естественна, потому что эти формы получаются опусканием индекса операторов кватернионного умножения J^i при их ограничении на $\mathcal{H}$: $\omega_i(X, Y) = g(J^i(X), Y)$ для любых горизонтальных векторных полей X, Y [1]. Так как пространство 2-форм на 4-мерном расслоении горизонтальных векторов $\mathcal{H}$ имеет размерность 6, то «оставшаяся часть» пространства 2-форм $\Lambda^2 \mathcal{H}^*$ будет порождена 2-формами вида

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7), \\ \zeta_2 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_6 + \eta_7 \wedge \eta_5), \\ \zeta_3 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_7 + \eta_5 \wedge \eta_6).\end{aligned}$$

Мы предполагаем существование дополнительной кэлеровой структуры на орбифолде $\mathcal{O}$, поэтому, используя оставшуюся свободу на выбор базиса $\{\eta_4, \eta_5, \eta, \eta_7\}$, будем считать что форма $\omega := \zeta_1$ и есть наша кэлерова форма.

Определим самосопряженную 4-форму на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + \\ &+ e^{0246} + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - \\ &- e^{1247} - e^{0356} + e^{1256},\end{aligned}$$

где $e^{ijkl} := e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$. Группа линейных преобразований $\mathbb{R}^8$, сохраняющих данную форму, изоморфна $Spin(7)$. Чтобы перенести данную форму на произвольное риманово многообразие N , необходимо потребовать существование в каждой точке $p \in N$ подходящей изометрии ϕ , такой, что $\phi_p^* \Phi_0 = \Phi|_p$, где Φ — уже форма на N . Также необходимо потребовать параллельность формы Φ . При выполнении данных условий говорят, что Φ задает параллельную $Spin(7)$ -структуру на N , и $Hol(N) = Spin(7)$. Кроме того, группа $Spin(7)$ также сохраняет ориентацию и метрику $g_0 = \sum_{i=0}^7 (e^i)^2$. Таким образом, Φ автоматически определяет метрику на N .

Рассмотрим следующую форму на $\bar{M}$:

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{0123} + C^2 B^2 \eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 + \\ &+ \frac{B^2 + C^2}{2} (e^{01} - e^{23}) \wedge \omega_1 + \frac{B^2 - C^2}{2} (e^{01} - e^{23}) \wedge \omega + \\ &+ \frac{BC}{2} (e^{02} - e^{31}) \wedge \omega_2 + \frac{BC}{2} (e^{03} - e^{12}) \wedge \omega_3,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}e^0 &= dt, \\ e^i &= A_i \eta_i, i = 1, 2, 3, \\ e^j &= B \eta_j, j = 4, 5, \\ e^k &= C \eta_k, k = 6, 7,\end{aligned}$$

$A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t)$ — некоторые гладкие функции. Форма Φ соответствует римановой метрике на $\bar{M}$:

$$dt^2 + A_1(t)^2 \eta_1^2 + A_2(t)^2 \eta_2^2 + A_3(t)^2 \eta_3^2 +$$

$$+ B(t)^2 (\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2 (\eta_6^2 + \eta_7^2). \quad (2)$$

Условие параллельности данной формы исследовалось в статье [2]. Данное условие эквивалентно системе нелинейных дифференциальных уравнений на функции $A_i(t), B(t), C(t)$. Чтобы данный набор функций определял метрику на гладком римановом многообразии, необходимо правильным образом задать начальные данные — разрешить особенность. Ранее было исследовано поведение функций на бесконечности и найдено непрерывное однопараметрическое семейство метрик $\bar{g}_\alpha$, «соединяющее» метрики Калаби:

Теорема [2]. Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$, в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $M_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (2) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:

1) если $A_1(0) = 0, -A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha &= \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1} dr^2 + \\ &+ \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \\ &+ (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2);\end{aligned}$$

2) если $A_1(0) = 0, -A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная асимптотически локально коническая метрика $\bar{g}$ вида (2) с группой голономии $Spin(7)$.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $M_2/\mathbb{Z}_p$ вида (2) рассмотренной $Spin(7)$ -структурой и с группой голономии $H \subset Spin(7)$ изометрична одной из указанных выше.

В формулировке данной теоремы пространство M_2 — одно из двух возможных разрешений конусной особенности. За подробностями отсылаем к оригинальной статье.

Если оператор Лапласа-Бельтрами действует на 4-формах 8-мерного пространства, он имеет вид $\Delta = * d * d - d * d *$, где $*$ — оператор Ходжа. Поэтому для вычисления $\Delta \Phi$ необходимо знать форму объема и действие дифференциала на базисных формах. Следующие соотношения были получены в [1]:

$$\begin{aligned}de^0 &= 0, \\ de^i &= \frac{A'_i}{A_i} e^0 \wedge e^i + A_i \omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}} e^{i+1} \wedge e^{i+2}, \\ d\omega_i &= \frac{2}{A_{i+2}} \omega_{i+1} \wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}} e^{i+1} \wedge \omega_{i+2},\end{aligned}$$

где $i = 1, 2, 3 \bmod 3$.

Напомним, что ω — кэлерова форма, то есть замкнута. Форма объема имеет вид $Vol = e^{01234567} = e^{0123} \wedge \frac{-B^2 C^2}{8} \omega_2 \wedge \omega_2$. Теперь мы будем предполагать, что функции A_i, B, C зависят не только от переменной t , определенной на образующей конуса $\mathbb{R}_+$, но и от дополнительного параметра τ , играющего роль времени. Рассмотрим уравнение

$$\Phi_\tau = \Delta\Phi. \quad (3)$$

После довольно продолжительных, но не представляющих сложности вычислений, получим, что и левая и правая части уравнения (3) являются

линейными комбинациями следующих десяти 4-форм: $\omega \wedge e^{01}, \omega \wedge e^{23}, \omega_1 \wedge e^{01}, \omega_1 \wedge e^{23}, \omega_2 \wedge e^{13}, \omega_2 \wedge e^{02}, \omega_3 \wedge e^{12}, \omega_3 \wedge e^{03}, \omega_1 \wedge \omega_1, e^{0123}$. Коэффициенты линейных комбинаций левой части уравнения зависят от функций A_i, B, C и их производных первого порядка по τ . Коэффициенты правой части зависят от функций A_i, B, C , их производных первого и второго порядков по t , причем зависимость от производных первого порядка нелинейная. Это согласуется с общей теорией параболических уравнений и, в частности, с потоком Риччи. Левая часть задается с помощью матрицы M и вектора f :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{B^2-C^2}{4A_1} & 0 & 0 & \frac{B}{2} & -\frac{C}{2} \\ 0 & \frac{C^2-B^2}{4A_2} & \frac{C^2-B^2}{4A_3} & -\frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{B^2+C^2}{4A_1} & 0 & 0 & \frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ 0 & -\frac{C^2+B^2}{4A_2} & -\frac{C^2+B^2}{4A_3} & -\frac{B}{2} & -\frac{C}{2} \\ \frac{BC}{2A_1} & 0 & \frac{BC}{2A_3} & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ 0 & \frac{BC}{2A_2} & 0 & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ -\frac{BC}{2A_1} & -\frac{BC}{2A_2} & 0 & -\frac{C}{2} & -\frac{B}{2} \\ 0 & 0 & \frac{BC}{2A_3} & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{BC^2}{16} & -\frac{B^2C}{16} \\ \frac{1}{A_1} & \frac{1}{A_2} & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (A_1, A_2, A_3, B, C).$$

Мы получаем систему уравнений

$$M \frac{\partial f}{\partial \tau} = b. \quad (4)$$

Основную сложность в этом уравнении представляет правая часть b . Приведем лишь первую координату этого 10-мерного вектора:

$$b_1 = \frac{-BC}{128A_1A_2^2A_3^2} (2B^3C^5A_1^3 - 2B^5C^3A_1^3 + 32BC^2A_1^2C'A_2A_3 + 8B^3A_3'C'A_2^2A_3A_1 + 4A_1'B^3CA_2'A_2A_3^2 - 4A_1'BC^3A_2'A_2A_3^2 - 24BCC''^2A_2^2A_3^2A_1 - 16BC^2A_3'C'A_2^2A_3A_1 - 8BC^2C''^2A_2^2A_3^2A_1 + 8B^2CB''^2A_2^2A_3^2A_1 + 24BCB''^2A_2^2A_3^2A_1 + 16B^2B'C'A_2^2A_3^2A_1 - 16C^2C'B'A_2^2A_3^2A_1 + 16B^2CA_3'B'A_2^2A_3A_1 + 4B^3CA_2''^2A_2A_3^2A_1 - 4BC^3A_2''^2A_2A_3^2A_1 + 4B^3CA_3''^2A_2^2A_3A_1 - 4BC^3A_3''^2A_2^2A_3A_1 - 4B^3C(A_2')^2A_3^2A_1 + 4BC^3(A_2')^2A_3^2A_1 - 4B^3C(A_3')^2A_2^2A_1 + 4BC^3(A_3')^2A_2^2A_1 - 32B^2CA_1^2B'A_2A_3 - 16B^3A_1^2C'A_2A_3 + 8B^3CA_1^2A_2'A_3 + 8B^3CA_1^2A_3'A_2 - 16B^3CA_1'A_2A_3A_1 + 16C^3A_1^2B'A_2A_3 - 8BC^3A_1^2A_2'A_3 - 8BC^3A_1^2A_3'A_2 + 16BC^3A_1'A_2A_3A_1 + 16B^2CA_2'B'A_2A_3^2A_1 + 8B^3A_2'C'A_2A_3^2A_1 - 8C^3A_2'B'A_2A_3^2A_1 - 16BC^2A_2'C'A_2A_3^2A_1 - 8C^3A_3'B'A_2^2A_3A_1 + 8A_1'B^2CB'A_2^2A_3^2 - 8A_1'BC^2C'A_2^2A_3^2 + 4A_1'B^3CA_3'A_2^2A_3 - 4A_1'BC^3A_3'A_2^2A_3 + 2B^4C^3A_1'B'A_2A_3 - 2B^3C^4A_1^2C'A_2A_3 + B^5C^3A_1^2A_2A_3 - B^3C^5A_1^2A_2A_3 - B^3C^5A_1^2A_3A_2 - B^3C^5A_1^2A_3A_2),$$

где, как и ранее, $F' \equiv \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t}$. Необозримость правой части делает практически невозможным анализ общей ситуации без помощи математических пакетов. Было установлено, что матрица M имеет ранг 5, в то время как ранг расширенной матрицы равен 6. Таким образом, найти решение общего вида не представляется возможным. Мы получаем следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть M — 7-мерное 3-сасакиево многообразие, чей кватернионно-кэлеров орби-фолд может быть наделен кэлеровой структурой. Эволюционное уравнение (3) на $Spin(7)$ -структуру определенную на конусе $\bar{M}$, задавае-

мую формой Φ вида (1), эквивалентно переопределенной системе уравнений (4).

Литература

- [1] Базайкин, Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ / Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 11 — 32.
- [2] Базайкин, Я. В. $Spin(7)$ -структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Математический сборник. — 2011. — Т. 202, № 4. — С. 3 — 30.
- [3] Boyer, C. P. *The geometry and topology*