ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ

Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров
Челябинский государственный университет

Статья содержит ряд новых результатов, полученных в основном авторами и посвященных разрешающим полугруппам линейного операторного уравнения первого порядка с необратимым оператором при производной. В первой части статьи рассмотрены сильно непрерывные полугруппы операторов с ядрами, описаны их ядра и доказана обобщенная теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса. Во второй части рассмотрены аналитические полугруппы операторов с ядрами, установлено совпадение фазового пространства с образом разрешающей полугруппы и доказана аналитическая версия указанной выше теоремы. Кроме того, приведены результаты по аналитическим группам операторов с ядрами. В заключение приведены иллюстрирующие примеры, взятые из приложений.

Ключевые слова: *уравнения соболевского типа, разрешающие полугруппы операторов, неклассические уравнения математической физики.*

Введение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т.е. линеен и замкнут с областью определения $\operatorname{dom} M$, плотной в $\mathcal{U}$). Рассмотрим линейное операторное дифференциальное уравнение вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.1}$$

где оператор L не предполагается непрерывно обратимым.

История изучения разрешимости задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.2}$$

для уравнения (0.1) прослеживает два источника. Первый по традиции находится в области естественных наук, где в 1954 году С.Л.Соболевым [1] была обнаружена и исследована начально-краевая задача для уравнения в частных производных, неразрешенного относительно старшей производной по времени. Дальше результаты развивали и обобщали в своих работах С.А.Гальперн [2], R.E.Showalter [3], Rao Gopala [4] и J.H.Lighbourn [5].

Независимо от этих результатов B.D.Coleman, R.J.Duffin и V.J.Mizel [6] исследовали разрешимость задачи (0.1), (0.2) в одном частном случае, имеющем важное прикладное значение. Они первыми обнаружили возможную принципиальную неразрешимость задачи при любом начальном значении. В дальнейшем их результаты были обобщены и развиты в работе H.A.Levine [7].

Цитированные работы легли в основу нового научного направления, которое в настоящее время переживает пору бурного расцвета. Развитие данного направления проходит в рамках следующей парадигмы: "прикладная" задача выступает как объект исследования, а методом исследования служат "абстрактные" результаты функционального анализа, теории функции комплексной переменной, гармонического анализа и другие результаты "чистой" математики. Сейчас уже нет возможности в одном обзоре привести даже основные методы и результаты этой новой области математического знания. Чтобы можно было представить себе многообразие аспектов, в которых изучается задача (0.1), (0.2), сошлемся на работы Р.А.Александряна [8], Т.И.Зеленяка [9] и М.В.Фокина [10], В.Н.Врагова [11] и А.И.Кожанова [12], С.В.Успенского, Г.В.Демиденко и В.Г.Перепелкина [13].

Другое направление исследований разрешимости задачи (0.1), (0.2) берет свое начало в работе М.И.Вишика [14] и независимо от него в работах С.Г.Крейна и его учеников С.П.Зубовой и К.И.Чернышова [15; 16]. Объектом исследования данного направления служит "абстрактная" задача (0.1), (0.2), а "прикладные" задачи рассматриваются здесь в качестве иллюстраций.

В работах [15; 16] основательно изучена задача (0.1), (0.2) в случае фредгольмова оператора L (т.е. $\operatorname{ind} L = 0$). В частности, здесь содержится исследование феномена "несуществования решения", т.е. показано, что задача (0.1), (0.2) может быть однозначно разрешима точно тогда, когда начальное значение u_0 лежит в некотором подпространстве $\mathcal{U}^1 \subset \mathcal{U}$ конечной коразмерности. В дальнейшем эти результаты были развиты Н.А.Сидоровым и его учениками О.А.Романовой и М.В.Фалалеевым [17; 18].

Объектом нашего интереса является подход, основанный на идеях и методах теории полугрупп операторов. Суть этого подхода заключается в построении разрешающей полугруппы, дающей решение абстрактной задачи (0.1), (0.2). Первым строить такие полугруппы начал A.Favini [19], затем его результаты были развиты A.Favini и A.Yagi [20] и A.Yagi [21]. Независимо от них другое решение задачи (0.1), (0.2), представимое полугруппой, дали И.В.Мельникова и М.А.Альшанский [22; 23] и М.А.Альшанский [24]. И наконец, третий способ был разработан Г.А.Свиридюком [25 – 27], Г.А.Свиридюком и В.Е.Федоровым [28; 29] и В.Е.Федоровым [30; 31]. Все эти методы построения разрешающих полугрупп уравнения (0.1) существенно различаются. Объединяет их одно — построенные разрешающие полугруппы обладают нетривиальными ядрами. (В качестве пояснения заметим, что ядром полугруппы называется ядро ее единицы, если последняя существует.)

Чтобы провести сравнительный анализ имеющихся подходов к построению разрешающих полугрупп уравнения (0.1), рассмотрим случай, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$. В этом случае уравнение (0.1) тривиально редуцируется к паре стандартных уравнений

$$\dot{u} = Su, \quad \dot{f} = Tf, \tag{0.3}$$

где операторы $S = L^{-1}M$ и $T = ML^{-1}$ линейны, замкнуты и плотно определены на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Рассмотрим теперь уравнения (0.3) как конкретные интерпретации уравнения

$$\dot{v} = Av, \tag{0.4}$$

определенного на банаховом пространстве $\mathcal{V}$, с линейным, замкнутым и плотно определенным оператором $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$. Классический ответ на вопрос о разрешимости уравнения (0.4) дает теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса (теорема ХИФМФ) [32], устанавливающая биекцию между множеством разрешающих полугрупп операторов и множеством операторов, называемых генераторами этих полугрупп. Критерием того, что оператор A является генератором разрешающей полугруппы уравнения (0.4) (иначе говоря, порождает полугруппу уравнения (0.4)) служат некоторые условия на резольвентное множество $\rho(A)$ и резольвенту $R_\mu(A)$ оператора A. При этом можно выделить три "версии" теоремы ХИФМФ, мы назовем их C_0-непрерывной, аналитической и равномерной, в зависимости от того, о каких полугруппах идет речь.

Плотно определенный оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$, удовлетворяющий условиям

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a \quad \mu \in \rho(A)\,,$$

$$\exists K > 0 \quad \forall \mu > a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|(R_\mu(A))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^n},$$

для краткости будем называть *радиальным.* C_0-непрерывная версия теоремы ХИФМФ говорит [33], что оператор A радиален точно тогда, когда он порождает C_0-полугруппу (терминология К.Иосиды [34]).

Если плотно определенный оператор A удовлетворяет условиям

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists \theta \in (\pi/2, \pi)$$

$$S_{a,\theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \ \ \mu \neq a\} \subset \rho(A),$$

$$\exists K > 0 \quad \forall \mu \in S_{a,\theta}(A) \quad \|R_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{|\mu - a|},$$

то он называется *секториальным* (терминология Д.Хенри [35]). Более узкая, чем C_0-непрерывная, аналитическая версия теоремы ХИФМФ говорит о том, что оператор A является генератором полугруппы, аналитической в некотором секторе, содержащем положительную полуось $\mathbb{R}_+$, точно тогда, когда он секториален [36].

И наконец, наиболее частным случаем теоремы ХИФМФ является утверждение о том, что полугруппа, порождаемая непрерывным оператором $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, однозначно продолжается до группы, аналитической в равномерной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Обратно, генератором аналитической группы является непрерывный линейный оператор [32].

Основные имеющиеся в настоящее время результаты по полугруппам операторов с ядрами тоже можно уложить в схему, состоящую из трех версий обобщенной теоремы ХИФМФ, ибо все результаты так или иначе увязывают факт существования разрешающих полугрупп уравнения (0.1) с условиями, налагаемыми на *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\},$$

L-резольвенту $(\mu L - M)^{-1}$, *правую* $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и *левую* $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвенты оператора M (терминология формализована в [37]).

Г.А.Свиридюк [25; 37] ввел понятие (L,σ)-ограниченного оператора M (которое совпадает с понятием ограниченного оператора в случае $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$) и получил результаты о существовании разрешающей группы уравнения (0.1) в случае, когда L-резольвента имеет в бесконечности несущественную особую точку. Затем им же [26; 37] введено понятие L-секториального оператора M (которое совпадает с понятием секториального оператора в случае $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$) и получены результаты о существовании аналитической разрешающей полугруппы уравнения (0.1).

Однако оказалось, что (L,σ)-ограниченный оператор M является L-секториальным только в случае, когда L-резольвента имеет в бесконечности устранимую особую точку. Для устранения этого недостатка Г.А.Свиридюк и Т.А.Бокарева [38] ввели в рассмотрение понятие (L,p)-секториального оператора M, которое совпадает с понятием L-секториального оператора в случае $p = 0$ и обобщает понятие (L,σ)-ограниченного оператора в случае несущественной особой точки в бесконечности у L-резольвенты. Затем Т.А. Бокарева [39] получила аналогичные [37] результаты. Отметим, что все основные результаты из [37] и [39], касающиеся (L,σ)-ограниченного или (L,p)-секториального оператора M, представлены в обзоре [40].

И наконец, В.Е.Федоров [41] ввел понятие (L,p)-радиального оператора, которое совпадает с понятием L-радиального оператора [27; 42] в случае $p = 0$ и обобщает понятие (L,p)-секториального оператора. Основываясь на этом понятии, он получил обобщение C_0-непрерывной версии теоремы ХИФМФ. Кроме того, в [30] им же получены обобщения аналитической и равномерной версий (см. также [28; 29]).

Результаты A.Favini [19] и A.Favini и A.Yagi [20] аналогичны нашим в случае (L,p)-секториального оператора M при $p=0$. Однако они ограничились построением только одной разрешающей полугруппы уравнения (0.1). Между тем, как это следует из классической теории даже в случае $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, их должно быть две – одна порождается оператором $S=L^{-1}M$, а другая – оператором $T=ML^{-1}$ (0.3). Кроме того, в их работах нет обобщения аналитической версии теоремы ХИФМФ.

В работе A.Yagi [21] построена сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (0.1) следующим образом. Посредством обращения оператора L в многозначном смысле уравнение (0.1) сводится к дифференциальным включениям вида

$$\dot{u}\in Su,\ \ \dot{f}\in Tf, \tag{0.5}$$

где операторы S и T такие же, как в (0.3). Резольвенты многозначных операторов S и T оказываются однозначными операторами, и на них накладываются условия, аналогичные условиям радиальности. Однако, например, полугруппа первого из включений (0.5) задана только на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}=\ker L\oplus\overline{\operatorname{im}R^L_\mu(M)}$. При этом на подпространстве $\overline{\operatorname{im}R^L_\mu(M)}$ она является обычной C_0-полугруппой, а на $\ker L$ она нулевая. A.Yagi не обращает эти результаты с тем, чтобы получить обобщение теоремы ХИФМФ.

И.В.Мельникова и М.А.Альшанский [22; 23] и М.А.Альшанский [24] используют следующую интерпретацию C_0-непрерывной версии теоремы ХИФМФ. Задача (0.4), (0.2) равномерно корректна точно тогда, когда оператор A радиален. Обобщая ее, они получают следующий результат – задача (0.4), (0.2) равномерно корректна точно тогда, когда оператор M L-радиален и выполнено условие $\mathcal{U}=\tilde{\mathcal{U}}$. Построенная ими сильно непрерывная полугруппа имеет ядро, совпадающее с ядром $\ker L$. Более общий случай (L,p)-радиального оператора M не рассматривается.

Для полноты картины отметим еще, что условия на L-резольвенту, правую и левую L-резольвенты оператора M, аналогичные нашим, вводились С.Г.Крейном и В.Б.Осиповым [43], В.Б.Осиповым [44], А.Г.Руткасом [45] и Н.И.Радбель [46]. Сильно непрерывную разрешающую полугруппу уравнения (0.1) в случае фредгольмова оператора L строил В.С.Шароглазов [47]. Все эти результаты могут быть уложены в предложенную нами схему и будут обсуждаться по ходу обзора.

Из сказанного следует, что наши результаты более близки к классическим версиям теоремы ХИФМФ и более общие, нежели результаты цитированных авторов. Еще одно преимущество нашего подхода к исследованию абстрактной задачи (0.1), (0.2) заключается в достаточно простом их приложении как к абстрактным полулинейным уравнениям вида $L\dot{u} = Mu + N(u)$ [48; 49], так и к конкретным начально-краевым задачам для уравнений и систем уравнений в частных производных [50; 51]. Поэтому в обзоре мы будем излагать в основном наши результаты, а результаты цитированных авторов будут обсуждаться в контексте. Кроме того, в обзоре мы будем придерживаться терминологии, формализованной в диссертациях [30; 37; 39] и [42]. В частности, уравнение (0.1) мы будем называть *линейным уравнением соболевского типа*. Это название определяет достаточно широкий класс объектов [5; 8; 52; 53; 54; 55] с одной стороны, а с другой кажется нам более предпочтительным, чем название "псевдопараболические уравнения" [56; 57; 58] или "уравнения не типа Коши-Ковалевской" [59].

Настоящий обзор задуман нами как дополнение к обзору [40]. В нем кроме введения и списка литературы содержатся две части. В первой излагаются результаты об относительно p-радиальных операторах и порождаемых ими сильно непрерывных полугруппах операторов с ядрами. Основной результат этой части — обобщение C_0-непрерывной версии теоремы ХИФМФ. Вторая часть посвящена относительно p-секториальным операторам и порождаемым ими аналитическим полугруппам операторов с ядрами. Основные результаты здесь — обобщение аналитической и равномерной версий теоремы ХИФМФ. В заключение мы приведем несколько иллюстративных примеров, взятых из приложений. В основном это линеаризации изученных ранее нелинейных задач [60; 61; 62], однако рассматриваются они здесь совершенно в ином аспекте [63; 64]. Основным критерием при отборе примеров послужило требование "нефредгольмовости" оператора L. Поэтому приложения полученных результатов к задачам оптимального управления [65; 66] остались вне поля зрения.

К сожалению, при изложении нам не удалось избежать пересечений с обзором [40]. Чтобы свести эти пересечения к минимуму, мы снабжаем взятые оттуда результаты ссылками даже в том случае, когда приводится более общее утверждение. Поэтому просим за необходимыми пояснениями по поводу доказательств обращаться к [40].

И наконец, условимся о следующем:

1. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при изучении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация.

2. Все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки" и ограничивают область, лежащую "слева" при таком движении.

3. Символами I и $\mathbb{O}$ обозначаются "единичный" и "нулевой" операторы, области определения которых ясны из контекста.

4. Оборот “точно тогда, когда” означает “тогда и только тогда, когда”.

1. Относительно p-радиальные операторы и сильно непрерывные полугруппы

1.1. Относительные резольвенты

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$$

и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Если пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ совпадают, а оператор $L = I$, то L-резольвентное множество и L-спектр оператора M совпадают соответственно с его резольвентным множеством и спектром. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то L-резольвентное множество и L-спектр оператора M совпадают соответственно с резольвентным множеством и спектром операторов $L^{-1}M$ и ML^{-1}. И наконец, $\rho^L(M) = \emptyset$, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Из двух очевидных тождеств

$$\begin{aligned} (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1}, \\ (\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = I + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

непосредственно вытекает, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, а поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.

Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ будем в дальнейшем называть *L-резольвентой* оператора M. Кроме нее мы будем рассматривать *правую* $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и *левую* $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ *L-резольвенты* оператора M. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Из (1.1.1) легко следуют аналоги тождества Гильберта для правой и левой L-резольвент оператора M:

$$\begin{aligned} R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M), \\ L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)L^L_\mu(M)L^L_\lambda(M). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Замечание 1.1.1. Операторная функция, удовлетворяющая соотношениям вида (1.1.2), названа в [34] *псевдорезольвентой.* В частности, там же показано, что псевдорезольвента R_μ является резольвентой некоторого оператора A точно тогда, когда $\ker R_\mu = \{0\}$, и при этом $\operatorname{im} R_\mu = \operatorname{dom} A$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$ и $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение *правую* и *левую*

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \qquad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M),$$

(L,p)-*резольвенты* оператора M соответственно.

ЛЕММА 1.1.1. *Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Тогда при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*

(i) $\ker R^L_{(\lambda,p)}(M) = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \qquad \operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$,

(ii) $\ker L^L_{(\lambda,p)}(M) = \ker L^L_{(\mu,p)}(M), \qquad \operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$ *при всех* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, и $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ *из* $(\rho^L(M))^{p+1}$.

В дальнейшем нам потребуется более подробная информация об устройстве ядер и образов правой и левой (L,p)-резольвент оператора M. Для их описания введем новые понятия.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \;\; q = 0, 1, \ldots, \;\; \text{и} \;\; \varphi_q \notin \ker L, \;\; q = 1, 2, \ldots$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*. Линейную оболочку собственных и M-присоединенных векторов оператора L назовем его *M-корневым линеалом*. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Замечание 1.1.2. Если существует оператор $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то M-присоединенные векторы, M-корневой линеал и M-корневое пространство оператора L совпадают соответственно с присоединенными векторами, корневым линеалом и корневым пространством оператора $M^{-1}L$.

Цепочка M-присоединенных векторов может быть бесконечной. Однако она будет конечной в случае существования такого M-присоединенного вектора φ_q, что либо $\varphi_q \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Высоту q последнего M-присоединенного вектора в конечной цепочке будем называть ее *длиной*.

Замечание 1.1.3. Понятие относительно присоединенного вектора было введено В.А.Треногиным [67].

ТЕОРЕМА 1.1.2 [40]. *Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Тогда при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*

(i) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *совпадает с линейной оболочкой множества собственных и M-присоединенных векторов высоты, не большей p оператора L;*

(ii) $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{dom} M\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1. *В условиях теоремы 1.1.2 M-корневой линеал оператора L и корневой линеал правой L-резольвенты оператора M совпадают.*

Обозначим через $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ $\left(\ker L^L_{(\mu,p)}(M)\right)$, которое очевидно является подпространством. Через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^0$ ($\operatorname{dom} M_0 = \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$).

СЛЕДСТВИЕ 1.1.2. *В условиях теоремы 1.1.2* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$, $M_0 : \operatorname{dom} M_0 \to \mathcal{F}^0$.

1.2. Относительно p-радиальные операторы

Здесь мы считаем, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Оператор M называется *радиальным степени* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *относительно* оператора L ((L,p)-*радиальным*), если

(*i*) $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a \Rightarrow \mu \in \rho^L(M)$,

(*ii*) $\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \mu_q > a$,

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \quad \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \le \frac{K}{\prod_{q=0}^{p}(\mu_q - a)^n}.$$

Оператор M называется *слабо* (L,p)-*радиальным*, если неравенство (ii) выполняется только при $n = 1$.

Очевидно, что из (L,p)-радиальности оператора M вытекает его слабая (L,p)-радиальность. Если $K \le 1$, то верна и обратная импликация.

Замечание 1.2.1. В [41] показано, что без потери общности можно положить $a = 0$ в определении 1.2.1.

Замечание 1.2.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, то радиальность любого из операторов $L^{-1}M$ или ML^{-1} является достаточным условием (L,p)-радиальности оператора M, а при $p = 0$ и необходимым.

Замечание 1.2.3. Понятия $(L,0)$-радиального оператора, L-лучевого оператора [27] и L-радиального оператора [42] совпадают.

ЛЕММА 1.2.1 [40]. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p;*

(ii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$;

(iii) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

Положим $G = M_0^{-1}L_0$, $H = L_0 M_0^{-1}$. Операторы $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $H \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$ по построению.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. *В условиях леммы 1.2.1 операторы G и H нильпотентны степени не выше p, если $p \in \mathbb{N}$. Если $p = 0$, то $G = \mathbb{O}$ и $H = \mathbb{O}$.*

Обозначим через $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ (соответственно $\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$). В силу леммы 1.1.1 определение подпространств $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ не зависит от $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$.

ЛЕММА 1.2.2. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда*

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}u = u \ \ \forall u \in \mathcal{U}^1;$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}f = f \ \ \forall f \in \mathcal{F}^1.$$

В силу леммы 1.2.1 (i) и 1.2.2 $\mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}^1 = \{0\}$ и $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1 = \{0\}$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$) замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$).

ТЕОРЕМА 1.2.1. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.*

Доказательство. Из леммы 1.2.2 вытекает существование проектора

$$P = s - \lim_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1} \qquad (Q = s - \lim_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1})$$

вдоль $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) на $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$).

В дальнейшем нас будет интересовать возможность распространения действия проектора P (Q) на все пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$), т.е. возможность расщепления $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$). Мы добьемся этого, ужесточая требования на операторы L и M. Однако уже сейчас возможность таких расщеплений дает следующая

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален, а пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) рефлексивно. Тогда $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$ ($\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$).*

Замечание 1.2.4. Теорему 1.2.2 в случае $p = 0$ доказал A.Yagi [21]. На случай $p \in \mathbb{N}$ этот результат обобщил В.Е.Федоров [30; 31].

1.3. Полугруппы разрешающих операторов

Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.3.1}$$

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнение (1.3.1) тривиально редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\alpha^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.3.2}$$

$$L_\alpha^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{1.3.3}$$

определенных на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Из (1.1.1) при $\lambda = 0$ имеем

$$(\mu L - M)^{-1}M = \mu R_\mu^L(M) - I, \qquad M(\mu L - M)^{-1} = \mu L_\mu^L(M) - I\,.$$

Значит, операторы в правых частях можно считать ограниченными и определенными на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно. Поэтому рассмотрим уравнения (1.3.2) и (1.3.3) как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.3.4}$$

определенного на банаховом пространстве $\mathcal{V}$, причем $A\,,B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. *Решением* уравнения (1.3.4) назовем вектор-функцию $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{V})$, удовлетворяющую (1.3.4) на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Отображение $V^{\cdot} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (*разрешающей полугруппой*) уравнения (1.3.4), если

(i) $V^sV^tv = V^{s+t}v$ при всех $s,t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и любом $v \in \mathcal{V}$;

(ii) $v(t) = V^tv$ есть решение уравнения (1.3.4) при любом v из некоторого плотного в пространстве $\mathcal{V}$ множества.

Полугруппа $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *равномерно ограниченной*, если

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \le C, .$$

ТЕОРЕМА 1.3.1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует равномерно ограниченная разрешающая полугруппа уравнения (1.3.2) ((1.3.3)), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$.*

Доказательство. Искомые полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ получаются как сильные пределы либо аппроксимаций *типа Иосиды*:

$$U^t_\mu = e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (R^L_\mu(M))^{p+1} \right)^n = \exp\left(\frac{\mu t}{p+1} ((\mu R^L_\mu(M))^{p+1} - I \right),$$

$$F^t_\mu = e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (L^L_\mu(M))^{p+1} \right)^n = \exp\left(\frac{\mu t}{p+1} ((\mu L^L_\mu(M))^{p+1} - I \right);$$

либо аппроксимаций *типа Уиддера – Поста*:

$$U^t_k = \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} = \left(\frac{k}{t} R^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^{k(p+1)},$$

$$F^t_k = \left(L \left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} \right)^{k(p+1)} = \left(\frac{k}{t} L^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^{k(p+1)}.$$

Замечание 1.3.1. При $p = 0$ различные доказательства теоремы дали Г.А.Свиридюк [27] и Л.Л.Дудко [42]. При $p \in \mathbb{N}$ полное доказательство получил В.Е.Федоров [30; 31; 41]

По определению К.Иосиды [34] разрешающая полугруппа $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (1.3.4) называется C_0-*полугруппой*, если $s-\lim\limits_{t\to 0+} V^t = I$. Обозначим через $\{U^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ сужение полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ на $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1* $\{U^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ — C_0-*полугруппы.*

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$v(0) = v_0 \tag{1.3.5}$$

для уравнения (1.3.4). Решение $v = v(t)$ уравнения (1.3.4) называется *решением задачи* (1.3.4), (1.3.5), если $\lim\limits_{t\to 0+} v(t) = v_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. Замкнутое в норме пространства $\mathcal{V}$ множество $\mathcal{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.3.4), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (1.3.4) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $v(t) \in \mathcal{P}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом v_0 из некоторого плотного в $\mathcal{P}$ подмножества существует единственное решение задачи (1.3.4), (1.3.5).

ТЕОРЕМА 1.3.2. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда фазовое пространство уравнения (1.3.2) ((1.3.3)) совпадает с $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.*

Замечание 1.3.2. Фазовые пространства уравнений (1.3.1) и (1.3.2) совпадают.

1.4. Единицы разрешающих полугрупп

Рассмотрим уравнение

$$A\dot{v} = Bv\,, \tag{1.4.1}$$

определенное на банаховом пространстве $\mathcal{V}$, и предположим, что существует его разрешающая полугруппа $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. Оператор $J \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *единицей* полугруппы $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, если $J = s - \lim\limits_{t\to 0+} V^t$.

Как нетрудно заметить, единица полугруппы по определению является проектором. Если рассматривать разрешающие полугруппы уравнений (1.3.2) и (1.3.3) в рамках подпространств $\tilde{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ соответственно, то их единицами являются проекторы P и Q соответственно, построенные при доказательстве теоремы 1.2.1. Однако определение 1.4.1 требует, чтобы единица разрешающей полугруппы была определена на всем пространстве определения уравнения (1.4.1). Из теорем 1.2.1, 1.2.2 и 1.3.1 немедленно вытекают достаточные условия существования единиц полугрупп $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

ТЕОРЕМА 1.4.1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, а пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ рефлексивны. Тогда существуют единицы разрешающих полугрупп уравнений (1.3.2) и (1.3.3).*

Для цели нашего изложения – построения обобщенной C_0-непрерывной версии теоремы ХИФМФ – условий теоремы 1.4.1 недостаточно. Поэтому мы изберем другой путь – путь ужесточения требований на операторы L и M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным справа (слева)*, если он (L,p)-радиален и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\mathrm{const}(u)}{\lambda \prod\limits_{q=0}^{p} \mu_q} \quad \forall u \in \operatorname{dom} M$$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\mathring{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{\lambda \prod\limits_{q=0}^{p} \mu_q} \quad \forall f \in \mathring{\mathcal{F}})$$

при всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 1.4.1. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M$ (или, что то же самое, оператор ML^{-1}) радиален, то оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.

ТЕОРЕМА 1.4.2 [40]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа (слева). Тогда $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$ $(\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}})$.*

Другими словами, в случае сильной (L,p)-радиальности оператора M справа и слева действия проекторов P и Q, являющихся единицами полугрупп $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ соответственно, распространяются с подпространств $\tilde{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ на подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева. Тогда*

(i) $\forall u \in \mathcal{U}$ $LPu = QLu$;

(ii) $\forall u \in \operatorname{dom} M$ $Pu \in \operatorname{dom} M$ и $MPu = QMu$.

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ $(\operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M)$. Из следствия 1.4.1 вытекает, что оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$, а оператор $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$ (как и ранее определенный оператор $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$). Кстати сказать, В.Е.Федоров [41] получил расщепление действия оператора L $(L : \mathcal{U}^0 \to \mathcal{F}^0$ и $L : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1)$ в условиях теоремы 1.1.2.

1.5. Существование обратного оператора

Здесь мы наложим более суровые по сравнению с определением 1.4.2 условия на операторы L и M для того, чтобы получить оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.1. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если он сильно (L,p)-радиален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{K}{\lambda \prod\limits_{q=0}^{p} \mu_q}$$

при всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 1.5.1. Сильно (L,p)-радиальный оператор M сильно (L,p)-радиален справа.

Замечание 1.5.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) радиален, то оператор M сильно (L,p)-радиален.

ТЕОРЕМА 1.5.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Искомый оператор является сужением на $\mathcal{U}^1$ сильного предела

$$s - \lim_{\mu\to+\infty} \mu^{p+2}(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1} .$$

Построим операторы $S_1 = L_1^{-1}M_1$ и $T_1 = M_1L_1^{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 операторы S_1 и T_1 радиальны.*

1.6. Генераторы сильно непрерывных полугрупп

Подведем итоги сказанному. Из условия сильной (L,p)-радиальности оператора M мы получили следующие утверждения.

(A1) *Существуют две сильно непрерывные и равномерно ограниченные полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ операторов $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ с ядрами.*

Обозначим через P и Q соответственно единицы этих полугрупп. Положим $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Поскольку P и Q — проекторы, имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Обозначим через $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ соответственно. Сужения являются C_0-полугруппами и по теореме ХИФМФ обладают генераторами S_1 и T_1 соответственно, причем S_1 и T_1 — радиальные операторы.

(A2) *Существует линейный гомеоморфизм $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ такой, что $L_1S_1 = T_1L_1$.*

Последнее равенство предполагает, что $L_1[\operatorname{dom} S_1] = \operatorname{dom} T_1$.

(A3) *Существует биективный оператор $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$.*

Отсюда вытекает существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

(A4) *Существует оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$ такой, что оператор $M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не выше $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Теперь положим $\tilde{L} = L_0(I-P) + L_1P \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\tilde{M} = M_0(I-P) + L_1S_1P \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ $\operatorname{dom} \tilde{M} = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1$.

ТЕОРЕМА 1.6.1. *Пусть выполнены все условия (A1)-(A4). Тогда оператор $\tilde{M}$ сильно $(\tilde{L},p)$-радиален.*

Мы уже имели повод сказать, что C_0-непрерывная версия теоремы ХИФМФ устанавливает биекцию между множеством C_0-полугрупп и множеством их генераторов. Приведенные здесь результаты устанавливают соответствие между множеством пар операторов (L, M) таких, что оператор M сильно (L,p)-радиален, и множеством пар сильно непрерывных полугрупп $(\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}, \{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$, удовлетворяющих условиям (A1)–(A4). Однако это соответствие не является биективным хотя бы уже потому, что если в определении оператора $\tilde{L}$ положить $L_0 = \mathbb{O}$, то утверждение теоремы 1.6.1 останется справедливым при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Очевидно также

СЛЕДСТВИЕ 1.6.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ оператор M сильно $(L, p+q)$-радиален.*

2. Относительно p-секториальные операторы и аналитические полугруппы

2.1. Полугруппы разрешающих операторов

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Как и в п. 1.1, введем в рассмотрение L-резольвенту $(\mu L - M)^{-1}$, правую $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левую $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвенты оператора M. Возьмем $p \in \mathbb{N}$ и построим правую и левую

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \;\; L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

(L,p)-резольвенты оператора M. Отметим справедливость всех утверждений п. 1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Оператор M называется *секториальным степени $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ относительно* оператора L ((L,p)-*секториальным*), если существуют константы $K > 0, a \in \mathbb{R}, \theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

причем

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при всех $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in (S^L_{a,\theta}(M))^{p+1}$.

Замечание 2.1.1. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то из секториальности оператора $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) следует (L,p)-секториальность оператора M. При $p = 0$ справедливо и обратное утверждение.

Замечание 2.1.2. Не теряя общности, можно считать $a = 0$. Положим $S^L_{0,\theta}(M) = S^L_\theta(M)$.

Замечание 2.1.3. В определении (L,p)-секториального оператора M [40] присутствовала оценка на L-резольвенту $(\mu L - M)^{-1}$. В [29] показано, что эта оценка получается из оценок на правую и левую (L,p)-резольвенты оператора M в определении 2.1.1.

Замечание 2.1.4. Поскольку (L,p)-секториальный оператор M, очевидно, слабо (L,p)-радиален, то справедливы утверждения п. 1.2.

Как и выше, вместо уравнения

$$L\dot{u} = Mu \tag{2.1.1}$$

мы будем рассматривать пару эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{2.1.2}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{2.1.3}$$

как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.1.4}$$

определенного на банаховом пространстве $\mathcal{V}$, операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. В отличие от п. 1.3. *решением* уравнения (2.1.4) назовем вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$, удовлетворяющую (2.1.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. Отображение $V^\cdot \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (*разрешающей полугруппой*) уравнения (2.1.4), если

(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $v(t) = V^tv$ есть решение уравнения (2.1.4) при всех $v \in \mathcal{V}$.

Полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *аналитической*, если она аналитично продолжима в некоторый сектор, содержащий луч $\mathbb{R}_+$, и *равномерно ограниченной*, если $\exists C > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \le C$.

Замечание 2.1.5. Обратим внимание на отличия определения 1.3.1 от определения 2.1.2. В частности, в последнем определении отсутствует условие сильной непрерывности полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ в нуле справа.

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существуют аналитические и равномерно ограниченные разрешающие полугруппы уравнений (2.1.2) и (2.1.3).*

Доказательство. Пусть $\Gamma \subset S^L_\theta(M)$ – контур такой, что $\arg\mu \to \pm\theta$ при $|\mu| \to +\infty, \mu \in \Gamma$. Тогда искомые полугруппы задаются интегралами типа Данфорда-Шварца

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1.5}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1.6}$$

соответственно.

Замечание 2.1.6. Полугруппа (2.1.5) является разрешающей полугруппой уравнения (2.1.1).

Если $\ker L \neq \{0\}$, то операторы U^t и F^t имеют ядра $\ker U^t \supset \ker R^L_\mu(M)$ и $F^t \supset \ker L^L_\mu(M)$. Введем в рассмотрение *ядро*

$$\ker V^\cdot = \{v \in \mathcal{V} : V^t v = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

и *образ*

$$\operatorname{im} V^\cdot = \{v \in \mathcal{V} : \lim_{t \to 0+} V^t v = v\}$$

разрешающей полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ уравнения (2.1.4).

Замечание 2.1.7. В силу аналитичности полугрупп (2.1.5) и (2.1.6) имеем $\ker U^\cdot = \ker U^t$ и $\ker F^\cdot = \ker F^t$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$. В [29; 30] показано, что $\operatorname{im} U^\cdot = \overline{\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \operatorname{im} U^t}$ и $\operatorname{im} F^\cdot = \overline{\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \operatorname{im} F^t}$.

Напомним определения подпространств $\mathcal{U}^k$ и $\mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$ (см. следствие 1.1.2 и лемму 1.2.2).

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Пусть оператор M (L, p)-секториален. Тогда* $\mathcal{U}^0 = \ker U^\cdot, \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} U^\cdot, \mathcal{F}^0 = \ker F^\cdot, \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} F^\cdot$.

Из теоремы 2.1.2, замечания 2.1.4 и теоремы 1.4.1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. *Пусть оператор M (L, p)-секториален, а пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ рефлексивны. Тогда* $\mathcal{U} = \ker U^\cdot \oplus \operatorname{im} U^\cdot$, $\mathcal{F} = \ker F^\cdot \oplus \operatorname{im} F^\cdot$.

Напомним постановку задачи Коши (1.3.5) для уравнения (2.1.4) и понятие ее решения, которые остаются годными и в данной ситуации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.3. Замкнутое в норме пространства $\mathcal{V}$ множество $\mathcal{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.1.4), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (2.1.4) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $v(t) \in \mathcal{P}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (2.1.4), (1.3.5).

ТЕОРЕМА 2.1.3. *Пусть оператор M (L, p)-секториален. Тогда образ полугруппы (2.1.5) ((2.1.6)) совпадает с фазовым пространством уравнения (2.1.2) ((2.1.3)).*

Отметим справедливость замечания 1.3.2 в данной ситуации.

Замечание 2.1.8. Обозначим через $\{V^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ сужение разрешающей полугруппы уравнения (2.1.4) на ее образ, доопределенное тождественным оператором при $t = 0$. Очевидно, что семейство $\{U^t_1 : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$

($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) является аналитической, равномерно ограниченной и сильно непрерывной в нуле справа полугруппой, определенной на подпространстве $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$).

ГИПОТЕЗА 2.1.1. Если оператор M (L,p)-секториален, то он (L,p)-радиален.

Справедливость гипотезы 2.1.1 при $K \le 1$ очевидна.

2.2. Единицы полугрупп и обратный оператор

Сначала отметим, что определение единицы полугруппы, данное в п. 1.4, годится и здесь. Следствие 2.1.1 уже дает достаточные условия существования единиц полугрупп (2.1.5) и (2.1.6). Однако здесь, как и в п. 1.4, мы ужесточим условия на операторы L и M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным справа (слева)*, если он (L,p)-секториален и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \le \frac{\mathrm{const}(u)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|} \quad \forall u \in \mathrm{dom}\, M$$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}})$$

при всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_\theta(M)$.

Замечание 2.2.1. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) секториален, то оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы (2.1.5) ((2.1.6)).*

Доказательство. Искомая единица U^0 (F^0) получается как сильный предел

$$U^0 = s - \lim_{t \to 0+} U^t \qquad (F^0 = s - \lim_{t\to 0+} F^t)$$

и совпадает с проектором P (Q), построенным при доказательстве теоремы 1.2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда справедливы утверждения следствия 1.4.1.*

Замечание 2.2.2. Аналитические полугруппы (2.1.5) и (2.1.6) изначально определяются на всем пространстве $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно в отличие от сильно непрерывных полугрупп, которые строятся на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ и $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ соответственно (см. теорему 1.3.1). Поэтому доказательства теорем 1.4.2 и 2.2.1 различны. Более того, до сих пор не установлена связь между понятиями "сильно (L,p)-радиальный справа (слева) оператор M" и "сильно (L,p)-секториальный справа (слева) оператор M". На существование такой связи указывает схожесть полученных результатов.

Как и в п. 1.4 введем в рассмотрение операторы L_k и M_k, $k = 0, 1$. Из следствия 2.2.1 вытекает расщепление действия этих операторов $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : \operatorname{dom} M_k \to \mathcal{F}^k$ и плотность линеалов $\operatorname{dom} M_k$ в $\mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$. Из замечания 2.1.4 и леммы 1.2.1 (iii) вытекает существования оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$. Обратимся к поиску достаточных условий существования оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным*, если он сильно (L,p)-секториален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{K}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|}$$

при всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_\theta(M)$.

Замечание 2.2.3. Сильно (L,p)-секториальный оператор M сильно (L,p)-секториален справа.

Замечание 2.2.4. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) секториален, то оператор M сильно (L,p)-секториален при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Пусть оператор M (L,p)-секториален, а контур $\Gamma \subset S^L_\theta(M)$ такой же, как в (2.1.5). Введем в рассмотрение семейство операторов

$$R^t_L = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

ЛЕММА 2.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

(i) *семейство операторов $\{R^t_L : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитично в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$;*

(ii) $R^t_L L = U^t, \quad L R^t_L = F^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) $R^{s+t}_L = U^s R^t_L = R^s_L F^t \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 2.2.4. Сектор $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$ лежит в области аналитичности полугрупп (2.1.5) и (2.1.6).

ЛЕММА 2.2.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева). Тогда*

(i) $R^t_L = P R^t_L \quad (R^t_L = R^t_L Q) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $\mathcal{U}^1 = \overline{\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \operatorname{im} R_L^t} \quad (\ker R^t = \mathcal{F}^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 2.2.3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда семейство $\{R_L^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничено.*

Замечание 2.2.5. Снижению требований в леммах 2.2.1 и 2.2.2 по сравнению с леммой 2.2.3 [40] мы обязаны [30].

ТЕОРЕМА 2.2.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Искомый оператор является сужением на $\mathcal{F}^1$ сильного предела $s - \lim\limits_{t\to 0+} R_L^t$.

Построим операторы $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $\operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} M_1$, и $T_1 = M_1 L_1^{-1}$, $\operatorname{dom} T_1 = L_1[\operatorname{dom} S_1]$. Оба оператора замкнуты и плотно определены.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 операторы S_1 и T_1 секториальны и являются генераторами полугрупп $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, определенных в замечании 2.1.8, причем $S_\theta(S_1) = S_\theta(T_1)$.*

2.3. Генераторы аналитических полугрупп

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства. Введем в рассмотрение условие

(B1) *Пусть существуют две аналитические и сильно непрерывные справа в нуле полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ операторов $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ и $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ с ядрами.*

Как и в п. 1.6, расщепим единицами P и Q пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$. Обозначим через $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) сужение полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) на подпространство $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P = \operatorname{im} U^\cdot$ ($\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q = \operatorname{im} F^\cdot$). Получившиеся сужения являются невырожденными аналитическими полугруппами и по аналитической версии теоремы ХИФМФ обладают генераторами $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$ и $T_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$ соответственно. Операторы S_1 и T_1 секториальны, причем, не утратив общности, можно считать, что $S_\theta(S_1) = S_\theta(T_1)$. Отсюда следуют представления

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\mu(S_1)e^{\mu t}d\mu, \quad F_1^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\mu(T_1)e^{\mu t}d\mu \tag{2.3.1}$$

при $t \in \mathbb{R}_+$ и $s - \lim\limits_{t\to 0+} U_1^t = I$, $\quad s - \lim\limits_{t\to 0+} F_1^t = I$, контур $\Gamma \subset S_\theta(S_1)$ таков, что $\arg\mu \to \pm\theta$ при $|\mu| \to +\infty$, $\mu \in \Gamma$.

Теперь пусть выполнены все условия (A2)-(A4) из п. 1.6. Так же, как там, построим операторы $\tilde{L} = L_0(I-P) + L_1P$, $\quad \tilde{M} = M_0(I-P) + L_1S_1P$, $\operatorname{dom}\tilde{M} = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Пусть выполнены все условия (B1), (A2)–(A4). Тогда оператор $\tilde{M}$ сильно $(\tilde{L}, p)$-секториален, причем*

(i) *для полугрупп $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ имеют место представления (2.1.5) и (2.1.6) соответственно*;

(ii) *оператор L_1^{-1} является сужением на $\mathcal{F}^1$ оператора*

$$s - \lim_{t\to 0+} \int_{\Gamma} (\mu\tilde{L} - \tilde{M})^{-1} e^{\mu t} d\mu\,.$$

Здесь контур Γ такой же, как в (2.3.1).

Далее, поскольку полугруппы (2.3.1) сильно непрерывны справа на $\overline{\mathbb{R}}_+$, то для полугрупп $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, удовлетворяющих условию (B1), выполняется условие (A1). Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ оператор M сильно $(L, p+q)$-секториален.*

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. *Сильно (L, p)-секториальный оператор M является сильно (L, p)-радиальным.*

2.4. Группы разрешающих операторов

Пусть оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Оператор M называется (L, σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \;\; \forall \mu \in \mathbb{C} \;\; (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

(L, σ)-ограниченные операторы и порождаемые ими группы разрешающих операторов уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \tag{2.4.1}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \tag{2.4.2}$$

эквивалентных уравнению (2.1.1), достаточно подробно рассмотрены в [40]. Здесь мы приведем только те результаты, которые нужны нам для обобщения равномерной версии теоремы ХИФМФ.

Замечание 2.4.1. Если оператор L фредгольмов и вместо L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M рассматривать операторный пучок $L - \lambda M$, то понятие относительной σ-ограниченности окажется эквивалентным понятию регулярности операторного пучка [15; 16].

ТЕОРЕМА 2.4.1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы уравнений (2.4.1) и (2.4.2).*

Искомые группы задаются интегралами (2.1.5) и (2.1.6), где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. По построению эти группы имеют единицы, которые могут быть представлены интегралами типа Ф.Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \ \ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)d\mu$$

соответственно. Поскольку единицы P и Q являются проекторами, то они расщепляют пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ соответственно в прямую сумму ядра и образа группы. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ $(\operatorname{dom} M_k = \operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k)$, $k = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) *операторы* $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) *операторы* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$;

(iii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

Построим операторы $G = M_0^{-1}L_0$, $H = L_0M_0^{-1}$, $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $T_1 = M_1L_1^{-1}$. По теореме 2.4.2 $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $H \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$, $S_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$, $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.2 операторы G и H квазинильпотентны.*

(Напомним, что оператор A называется *квазинильпотентным*, если его спектр $\sigma(A) = \{0\}$.)

Из теоремы 2.4.2 и следствия 2.4.1 вытекает возможность представления L-резольвенты оператора M рядом Лорана

$$\begin{aligned}(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k G^k M_0^{-1}(I-Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S_1^{k-1}L_1^{-1}Q = \\ -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k M_0^{-1}H^k(I-Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}L_1^{-1}T_1^{k-1}Q,\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

где $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$.

Точка ∞ называется *несущественной особой точкой* L-резольвенты оператора M, если оператор G (или H) нильпотентен, и *существенной особой точкой* в противном случае.

ТЕОРЕМА 2.4.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M. Тогда фазовое пространство уравнения (2.4.1) ((2.4.2)) совпадает с $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.*

Замечание 2.4.2. В [40] приведен пример неоднозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (2.1.1) в случае (L,σ)-ограниченности оператора M и существенной особой точки в бесконечности.

Замечание 2.4.3. В [70] указаны достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (2.1.1) в случае существенной особой точки.

В [64] содержатся достаточные и необходимые условия на операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, дающие (L,σ)-ограниченность оператора M в случае несущественной особой точки в бесконечности. В частности, там анонсирован, а в [42] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.4.4. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, *причем оператор* L *фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *оператор* M (L,σ)*-ограничен, причем* ∞ – *несущественная особая точка* L*-резольвенты оператора* M;

(ii) *длины всех цепочек* M*-присоединенных векторов оператора* L *ограничены некоторым числом* $p \in \mathbb{N}$.

(Мы называем оператор *фредгольмовым*, если его индекс равен нулю.)

Замечание 2.4.4. Теорема 2.4.4 служит мостом между излагаемыми здесь результатами и результатами многочисленных работ [15; 16; 17; 46; 47], в которых рассматривается случай фредгольмова оператора L.

Теперь перейдем к обращению обобщенной равномерной версии теоремы ХИФМФ. Рассмотрим условие

(C1) *Пусть существуют две аналитические группы* $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ *операторов* $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *и* $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ *с ядрами.*

Обозначим через $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ сужения этих групп на образы их единиц соответственно. По равномерной версии теоремы ХИФМФ полученные сужения имеют генераторами операторы $S_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$ и $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$, причем имеют место представления (2.3.1), где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$, $r > a$, где a — максимальный из спектральных радиусов операторов S_1 и T_1.

Теперь пусть выполнены все условия (C1), (A2)-(A4). Построим операторы

$$\tilde{L} = L_0(I - P) + L_1 P,$$

$$\tilde{M} = M_0(I - P) + L_1 S_1 P\,, \quad \operatorname{dom} \tilde{M} = \operatorname{dom} M_0 \dotplus \mathcal{U}^1\,.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2.4.5. *Пусть выполнены все условия (C1), (A2)-(A4). Тогда оператор* $\tilde{M}$ $(\tilde{L},\sigma)$*-ограничен, причем*

(i) ∞ — *несущественная особая точка* $\tilde{L}$*-резольвенты оператора* $\tilde{M}$;

(ii) *для групп* $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ *имеют место представления (2.1.5) и (2.1.6) соответственно, где контур* $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

И наконец, установим связь между (L,σ)-ограниченными и (L,p)-секториальными операторами.

ТЕОРЕМА 2.4.6. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен, причем* ∞ — *несущественная особая точка* L*-резольвенты оператора* M. *Тогда оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален.*

Доказательство непосредственно вытекает из представления (2.4.3) с учетом нильпотентности оператора G (или H, что в действительности одно и то же).

3. Некоторые приложения

3.1. Линейная система уравнений Осколкова

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ поставим задачу Коши – Дирихле

$$v(x,0) = v_0(x)\,, \qquad x \in \Omega\,; \tag{3.1.1}$$

$$v(x,t) = 0\,, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{3.1.2}$$

для системы уравнений Осколкова

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - p + g\,, \quad 0 = \nabla(\nabla \cdot v), \tag{3.1.3}$$

моделирующую в линейном приближении динамику вязкоупругой жидкости типа Кельвина-Фойгта [69]. Здесь $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — искомые вектор функции скорости и градиента давления жидкости, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданная вектор-функция, отвечающая внешнему воздействию. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно. Заметим еще, что в силу теоремы Гаусса–Остроградского, ограниченности области Ω и условия (3.1.2) система уравнений $\nabla(\nabla \cdot v) = 0$ эквивалентна уравнению $\nabla \cdot v = 0$.

Обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$ ($\mathbb{H}_\pi$) замыкание в норме $(L^2(\Omega))^n$ линеала соленоидальных (потенциальных) финитных вектор-функций из $(C^\infty(\Omega))^n$. Положим $\mathcal{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p$, $\mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, где $\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)} = (W^2_2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n \cap \mathbb{H}_{\sigma(\pi)}$, $\mathbb{H}_p = \mathbb{H}_\pi$. Векторы $u \in \mathcal{U}$ и $f \in \mathcal{F}$ имеют вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$ и $f = (f_\sigma, f_\pi, f_p)$, причем $v_\sigma = \Sigma v$, $v_\pi = \Pi v$, $v_p = p$, где $\Sigma : (L^2(\Omega))^n \to \mathbb{H}_\sigma$ — проектор вдоль $\mathbb{H}_\pi$, $\Pi = I - \Sigma$. Операторы $L\,, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ зададим матрицами

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma A_\lambda & \Sigma A_\lambda & \mathbb{O} \\ \Pi A_\lambda & \Pi A_\lambda & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & \mathbb{O} \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где операторы $A = \nabla^2 E_n$ (E_n — единичная матрица порядка n), $A_\lambda = \lambda - A$, $B : u_\pi \to \nabla(\nabla \cdot u_\pi)$. Как хорошо известно, спектр $\sigma(A)$ оператора $A : (W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n \to (L^2(\Omega))^n$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается к $-\infty$. Поэтому если $\lambda \notin \sigma(A)$, то $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p$, $\operatorname{im} L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$, и, значит, оператор L не является фредгольмовым.

ТЕОРЕМА 3.1.1. *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ и $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка 1 L-резольвенты оператора M.*

Полное доказательство теоремы 3.1.1 и ее применение к задаче (3.1.1)–(3.1.3) содержится в [63]. Здесь же мы отметим, что в случае $g = 0$ задача (3.1.1)–(3.1.3) редуцируется к задаче (0.2), (0.1), а значит, можно воспользоваться результатами п. 2.4.

3.2. Линейная система уравнений Навье – Стокса

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая же, как в п. 3.1. В полуцилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим задачу (3.1.1), (3.1.2) для системы уравнений

$$v_t = \nu \nabla^2 v - p + g\,, \qquad 0 = \nabla(\nabla \cdot v)\,. \tag{3.2.1}$$

Система (3.2.1) построена аналогично системе (3.1.3) в [63; 69]. Положим $\mathcal{U} = \mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, операторы $L,\ M\ : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ зададим матрицами

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & \mathbb{O} \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$\operatorname{dom} L = \mathcal{U}$, $\operatorname{dom} M = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p$. Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и нефредгольмов, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор M сильно $(L,1)$-секториален.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.1 [63]. Отметим отличие нашего подхода к задаче (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) от предложенного в [20; 21].

3.3. Линейная система уравнений "реакции – диффузии"

Рассмотрим теперь в полуцилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ задачу (3.1.1), (3.1.2) для системы уравнений

$$0 = \alpha_1 \Delta v_1 + a_{11} v_1 + a_{12} v_2\,, \qquad \dot{v}_2 = \alpha_2 \Delta v_2 + a_{21} v_1 + a_{22} v_2, \tag{3.3.1}$$

моделирующую в линейном приближении вырожденную систему "реакции – диффузии" [38]. Здесь $(v_1, v_2) = v$ — вектор–функция концентраций, причем одна из ее компонент $(v_1 = v_1(x,t))$ "изменяется быстрее другой". Параметры $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$, $a_{kl} \in \mathbb{R}$, $k,l = 1,2$.

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{F} = (L^2(\Omega))^2$, операторы $L,\ M\ : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ зададим матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1\Delta + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_2\Delta + a_{22} \end{pmatrix},$$

$\mathrm{dom}\, L = \mathcal{U}$, $\mathrm{dom}\, M = (W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^2$. Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и нефредгольмов, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Пусть $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$, $a_{11} \in \mathbb{R}_-$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Если $a_{12} = 0$, то утверждение вытекает из радиальности оператора $\alpha_2\Delta + a_{22}$. Если $a_{12} \neq 0$, то справедливость теоремы следует из радиальности оператора $\alpha_2\Delta + a_{22} + a_{21}a_{12}G_1$, где G_1 — оператор Грина однородной задачи Дирихле для оператора $\alpha_1\Delta + a_{11}$ в области Ω.

Список литературы

1. **Соболев С.Л.** *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 3 – 50.
2. **Гальперн С.А.** *Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными* // Тр. Моск. мат. о–ва. 1960. Т. 9. С. 401 – 423.
3. **Showalter R.E.** *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type* // Pacific J. Math. 1969. Vol. 31, № 3. P. 787 – 794.
4. **Gopala Rao.** *Sobolev equations of order $n+2$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$* // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 210. P. 267 – 278.
5. **Lighbourne J.H.** *Partial functional equations of Sobolev type* // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 93, № 2. P. 328 – 337.
6. **Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J.** *Justability, uniqness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19. P. 100 – 116.
7. **Levine H.A.** *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equation of the form $Du_t = -Au + F(u)$* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. Vol. 51, № 5. P. 371 – 386.
8. **Александрян Р.А.** *Спектральные свойства операторов, порождаемых системами дифференциальных уравнений типа Соболева* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455 – 505.
9. **Зеленяк Т.И.** Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск: Изд–во НГУ, 1970.
10. **Фокин М.В.** *Существование сингулярного спектра и асимптотика решений задачи Соболева* // Тр. Ин–та математики. СО РАН. 1994. Т. 26. С. 107 – 195.
11. **Врагов В.Н.** Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд–во НГУ, 1983.
12. **Кожанов А.И.** Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд–во НГУ, 1990.
13. **Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г.** Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
14. **Вишик М.И.** *Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения* // Мат. сб. 1956. Т. 38, № 1. С. 51 – 148.
15. **Крейн С.Г., Чернышов К.И.** *Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* // Препринт Ин-та математики. СО АН СССР. Новосибирск, 1979.
16. **Зубова С.П., Чернышов К.И.** *О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной* // Дифференц. уравнения и их применения. 1976. № 14. С. 21 – 39.

17. **Сидоров Н.А., Романова О.А.** *О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516 – 1526.
18. **Сидоров Н.А., Фалалеев М.В.** *Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726 – 728.
19. **Favini A.** *Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems* // Rend. mat. 1979. Vol. 12, № 3–4. P. 511 – 536.
20. **Favini A., Yagi A.** *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations* // Ann. Mat. pur. ed appl. 1993. Vol. CLXIII. P. 353 – 384.
21. **Yagi A.** *Generation theorems of semigroup for multivalued linear operators* // Osaka J. Math. 1991. Vol. 28. P. 385 – 410.
22. **Мельникова И.В., Альшанский М.А.** *Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве* // ДАН СССР. 1994. Т. 336, № 1. С. 17 – 20.
23. **Мельникова И.В., Альшанский М.А.** *Обобщенная корректность задачи Коши и интегрированные полугруппы* // ДАН СССР. 1995. Т. 343, № 4. С. 448 – 451.
24. **Альшанский М.А.** *Некоторые вопросы корректности абстрактной задачи Коши первого порядка в банаховом пространстве*: Дис. ...канд. физ.–мат. наук. Екатеринбург, 1995.
25. **Свиридюк Г.А.** *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченными операторами* // ДАН СССР. 1991. Т. 318, № 4. С. 828 – 831.
26. **Свиридюк Г.А.** *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами* // ДАН СССР. 1993. Т. 329, № 3. С. 274 – 277.
27. **Свиридюк Г.А.** *Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами* // ДАН СССР. 1994. Т. 337, № 5. С. 581 – 584.
28. **Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.** *Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева* // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1130 – 1145.
29. **Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.** *О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами* // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 604 – 616.
30. **Федоров В.Е.** *Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева*: Дис. ...канд. физ.–мат. наук. Челябинск, 1996.
31. **Федоров В.Е.** *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов* // Алгебра и анализ. 2000. Т.12, вып.3. С. 173 – 200.
32. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
33. **Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., Ван Дуйн К., Де Пахтер Б.** Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
34. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
35. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
36. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
37. **Свиридюк Г.А.** *Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах*: Дис. ...д–ра. физ.–мат. наук. Челябинск, 1992.
38. **Свиридюк Г.А., Бокарева Т.А.** *Число Деборы и один класс полулинейных уравнений типа Соболева* // ДАН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1082 – 1086.
39. **Бокарева Т.А.** *Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами*: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. Спб., 1993.
40. **Свиридюк Г.А.** *К общей теории полугрупп операторов* // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, вып. 4. С. 47 – 74.
41. **Федоров В.Е.** *Сильно непрерывные полугруппы и относительно p-радиальные операторы.* М., 1995. Деп. в ВИНИТИ, № 2665-В95.
42. **Дудко Л.Л.** *Исследование полугрупп операторов с ядрами*: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. Новгород, 1996.

43. **Крейн С.Г., Осипов В.Б.** *Функции Ляпунова и задачи Коши для некоторых систем уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 11. С. 2053 – 2061.
44. **Осипов В.Б.** *Об одном уравнении в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной* // Сб. работ аспирантов ф-та математики и механики Воронеж. ун-та. 1968. С. 42 – 47.
45. **Руткас А.Г.** *Задача Коши для уравнения* $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996 – 2010.
46. **Радбель Н.И.** *О начальном многооообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения* $A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1142 – 1143.
47. **Шароглазов В.С.** *О некоторых свойствах решений вырожденных дифференциальных уравнений* // Аналит. и конструкт. методы исследования дифференц. уравнений. Иркутск, 1993.
48. **Свиридюк Г.А.** *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 3. С. 192 – 207.
49. **Свиридюк Г.А.** *Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором* // Алгебра и анализ. 1994. Т.6, № 5. С. 252 – 272.
50. **Свиридюк Г.А.** *Об одной задаче динамики вязкоупругой жидкости* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 11. С. 1992 – 1998.
51. **Свиридюк Г.А.** *Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости* // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 65 – 70.
52. **Showalter R.E.** *The Sobolev type equations* // Appl. Anal. 1975. Vol. 5, № 1. P. 15 – 22(I). Vol. 5, № 2. P. 81 – 99(II).
53. **Свиридюк Г.А.** *Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 12. С. 2169 – 2171.
54. **Осколков А.П.** *О некоторых нелокальных начально-краевых задачах для уравнений типа С.Л.Соболева* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1991. Т. 198. С. 31 – 48.
55. **Demidenko G.V.** *L_p-theory of boundary value problems for Sobolev type equations* // Part. Diff. Eq. 1992. Vol. 27. P. 101 – 109.
56. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
57. **Свиридюк Г.А.** *Многообразие решений одного нелинейного сингулярного псевдопараболического уравнения* // ДАН СССР. 1989. Т. 289, № 6. С. 1315 – 1318.
58. **Кожанов А.И.** *О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений* // ДАН СССР. 1992. Т. 326, № 5. С. 781 – 786.
59. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
60. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** *Фазовые пространства одного класса операторных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 250 – 258.
61. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** *Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 109 – 119.
62. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** *Медленные многообразия одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Вестн. Челяб. ун–та. Сер. 3. Математика. Механика. 1991. № 1. С. 3 – 20.
63. **Свиридюк Г.А.** *Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62 – 70.
64. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л.** *Необходимые и достаточные условия относительной σ-ограниченности линейных операторов* // ДАН СССР. 1995. Т. 345, № 1. С. 25 – 27.
65. **Свиридюк Г.А., Ефремов А.А.** *Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1912 – 1919.

66. **Свиридюк Г.А., Ефремов А.А.** *Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева* // Изв. вузов. Математика. 1996. № 12. С. 75 – 83.
67. **Вайнберг М.М., Треногин В.А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
68. **Федоров В.Е.** *Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами* // ДАН СССР. 1996. Т. 351, № 3. С. 316 – 318.
69. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** *Заметки о линейных моделях вязкоупругих сред* // Вестн. Челяб. ун–та. Сер. 3. Математика. Механика. 1996. № 1(3). С. 135 – 147.
70. **Федоров В.Е.** *О совпадении фазового пространства уравнения соболевского типа с образом разрешающей полугруппы в случае существенно особой точки в бесконечности* // Вестн. Челяб. ун–та. Сер. 3. Математика. Механика. 1999. № 1(4). С. 198 – 202.

SUMMARY

The article is kept a number of new results which are devoted to the solving semigroups of the linear operator equations of the first order with the irreversible operator multiplied by the derivative. In the first part of the article strongly continuous semigroups with kernels are analyzed and their kernels and images are described and besides that the general Hille–Ioshida–Feller–Miadera–Fillips theorem is proved. In the second part analytical semigroups of operators with kernels are analyzed and the coincidence of phase space and image of solving semigroup are established and the analytical version of theorem which is indicated above is proved. Besides that the article is kept the results concerning the analytical groups of operators with kernels. Illustrative examples from the applications are cited.