

УДК 519.6

А.Г. Мясников, Е.П. Завадская

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ МАТРИЦ

Рассмотрена алгебра $P(A)$, порожденная комплексной матрицей A . Произвольный элемент $X \in P(A)$ однозначно представим в виде $X = \sum \mu_k J_k + N$, где $J_k \in P(A)$ — минимальные идемпотентные матрицы, μ_k — ненулевые собственные значения матрицы X , $N \in P(A)$ — нильпотентная матрица (обобщение спектрального разложения). Элементу $X \in P(A)$ сопоставляется его символ — многочлен $p_X(t)$ наименьшей степени такой, что $p_X(A) = X$. В случае $X = 0$ символ совпадает с минимальным аннулирующим многочленом. Множество $P_{\min}(t)$ всех символов с определенными подходящим образом операциями сложения $p_X(t) + p(t)$ и умножения $p_X(t) \circ p(t)$ является алгеброй, изоморфной матричной алгебре $P(A)$. Таким образом, имеет место представление символа в виде суммы делителя аннулирующего многочлена и линейной комбинации идемпотентов. Доказано, что обратимость X по модулю нильпотентных матриц эквивалентна «обобщенной» обратимости символа p_X . А именно: пусть $N(A) \subset P(A)$ — двусторонний идеал всех нильпотентных матриц, $\tilde{X}$ — класс смежности $X + N(A)$, k_X — алгебраическая кратность собственного значения 0 матрицы X , J — максимальная идемпотентная матрица в $P(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) элемент $\tilde{X}$ обратим в $P(A)/N(A)$; (2) существует матрица $Y \in P(A)$ такая, что $XY = J$; (3) $k_X = k_A$; (4) существует многочлен $p(t) \in P_{\min}(t)$ такой, что $p_X(t) \circ p(t) = p_J(t)$. Полученные результаты могут быть использованы при решении систем линейных дифференциальных уравнений, а также в математической статистике.

Ключевые слова: алгебра, двусторонний идеал, идемпотентная матрица, жорданова каноническая форма, минимальный многочлен, нильпотентная матрица, символ оператора, спектр матрицы.

Напомним, что под символом оператора обычно подразумевается его образ при гомоморфизме в некоторую алгебру функций [1] или даже в другие операторные алгебры [2]. При этом, как правило, предполагается, что ядром гомоморфизма служит идеал вполне непрерывных операторов. В этом случае для фредгольмовости оператора необходима и достаточна обратимость его символа. Рассмотрена алгебра $P(A)$, порожденная единственной матрицей A , а символом элемента $X \in P(A)$ служит многочлен p_X минимальной степени, удовлетворяющий условию $p_X(A) = X$. В этом случае ядром гомоморфизма $X \mapsto p_X$ является идеал N нильпотентных матриц, а обратимость фактор-класса $X + N$ описывается в терминах символа p_X . Наконец, доказано существование и единственность представления произвольной матрицы из $P(A)$ в виде суммы нильпотентной матрицы и линейной комбинации минимальных идемпотентных матриц. Соответствующее разложение также имеет место для символа p_X . Приведенные результаты допускают обобщение на бесконечномерные операторы, а также могут быть использованы при решении систем линейных дифференциальных уравнений.

1. Алгебра, порожденная матрицей. Напомним, что комплексное линейное пространство, снабженное умножением, называется комплексной алгеброй или коротче — алгеброй [3]. Рассмотрим алгебру M_n , состоящую из всех комплексных матриц n -го порядка. Для $A \in M_n$ обозначим через $P(A)$ множество всех матриц, представимых в виде $p(A)$, где $p(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами, удовлетворяющий условию $p(0) = 0$. Иными словами, $P(A)$ является подалгеброй в M_n , порожденной матрицей A .

Фиксируем унитарную матрицу U такую, что U^*AU — жорданова каноническая форма матрицы A . Тогда U^*XU является верхней треугольной матрицей для всех $X \in P(A)$.

Напомним, что матрица X является идемпотентной, если $X^2 = X$, и нильпотентной, если $X^n = 0$ для некоторого натурального n . Множество всех идемпотентных матриц из $P(A)$ обозначим через $J(A)$, а множество всех нильпотентных матриц из $P(A)$ — через $N(A)$. С основными свойствами нильпотентных матриц можно познакомиться в [4]; вариант спектрального разложения для неотрицательных идемпотентных матриц изложен в [5].

Рассмотрим сначала идемпотентные матрицы. Представим жорданову матрицу U^*AU в виде суммы $D + N$ диагональной матрицы D и нильпотентной матрицы N . Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все ненулевые собственные значения матрицы A , записанные без учета кратности; если ноль также является собственным значением, полагаем $\lambda_0 = 0$. Каждому собственному значению λ_k сопоставим многочлен Лагранжа $L_k(t)$ такой, что $L_k(\lambda_k) = 1$, $L_k(\lambda_i) = 0$, $i \neq k$. Определим идемпотентные матрицы $J_k = L_k(UDU^*)$

и заметим, что $A = \sum_{k=1}^m \lambda_k J_k + N$.

Лемма 1.1. Идемпотентные матрицы J_k принадлежат $J(A)$. Любая идемпотентная матрица из $J(A)$ однозначно представима в виде $\sum_{k \in K} J_k$, где $K \subset \{1, 2, \dots, m\}$.

Доказательство. Фиксируем $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ и рассмотрим многочлен

$$p_k(t) = \left(1 - (1 - L_k(t))^{\text{ind} \lambda_k} \right)^{\max \{\text{ind} \lambda_i : i \neq k\}},$$

где $\text{ind} \lambda_k$ — размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей λ_k . Очевидно, $p_k(0) = 0$ и $p_k(A) = J_k$.

Пусть X — произвольная идемпотентная матрица из $P(A)$, причем $X = p(A)$ для некоторого многочлена $p(t)$ такого, что $p(t) = 0$. Тогда $X = p(D)$, откуда следует оставшаяся часть утверждения леммы.

Применяя к произвольной матрице $X \in P(A)$ рассуждения, предшествующие лемме 1.1, а также саму лемму, получим следующее обобщение спектрального разложения матрицы X .

Теорема 1.2. Произвольная матрица X из $P(A)$ однозначно представима в виде $X = \sum_{k=1}^m \mu_k J_k + N$, где μ_k — ненулевые собственные значения матрицы X , $N \in N(A)$.

На множестве $J(A)$ введем отношение порядка: $X \leq Y \Leftrightarrow XY = X$. Очевидно, наибольшим элементом в $J(A)$ является матрица $J = \sum_{k=1}^m J_k$. Роль идемпотентной матрицы J проявится ниже при рассмотрении факторизации алгебры $P(A)$.

Обозначим через $N(A)$ множество всех нильпотентных матриц из $P(A)$.

Лемма 1.3. $N(A)$ является двусторонним идеалом в $P(A)$.

Доказательство. Действительно, матрица $X \in P(A)$ нильпотентна в том и только том случае, когда U^*AU имеет нулевую главную диагональ.

Для произвольной матрицы $X \in P(A)$ обозначим через $\tilde{P}(A)$ фактор-алгебру $P(A)/N(A)$, через $\tilde{X}$ класс смежности $X + N(A)$. Пусть k_X — алгебраическая кратность собственного значения 0 матрицы X .

Теорема 1.4. Пусть $X \in P(A)$, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\tilde{X}$ является единицей в $P(A)/N(A)$;
- (2) $X = J + N$, где $N \in N(A)$;

(3) $XA = A + N$, где $N \in N(A)$;

(4) $k_X = k_A$ и $\sigma_X \in \{0, 1\}$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Очевидно.

(2) $\Leftrightarrow$ (4). Так как произвольная матрица $N \in N(A)$ является верхней треугольной матрицей с нулевой главной диагональю, то условие (2) означает, что матрицы U^*XU , U^*JU имеют одинаковые главные диагонали. Осталось заметить, что условие (4) однозначно определяет вид главной диагонали матрицы U^*XU .

2. *Алгебра полиномиальных символов.* Обозначим через $P_X(t)$ множество всех многочленов $p(t)$ таких, что $p(A) = X$. Очевидно, в $P_X(t)$ найдется многочлен $p_X(t)$ наименьшей степени n_X , который мы обозначим через p_X . Многочлен $p_X(t)$ назовем символом матрицы X . Также обозначим через $P_a(t)$ множество всех аннулирующих многочленов для A , т.е. таких многочленов $p(t)$, что $p(A) = 0$ [4]. Пусть $p_a(t)$ нормированный аннулирующий многочлен для A минимальной степени n_a ; нормированность означает, что коэффициент при старшей степени t равен 1.

Теорема 2.1. Пусть $X \in P(A)$, тогда

1) $P_X(t) = p_X(t) + P_a(t)$;

2) $n_X < n_a$;

3) если $p_1(t), p_2(t) \in P_X(t)$ многочлены степени n_X , то $p_1(t) = p_2(t)$.

Доказательство. 1) Пусть $q(t) \in P_a(t)$, тогда $p_X(A) + q(A) = X$, поэтому $p_X(t) + P_a(t) \subset P_X(t)$. Обратно, если $p_1(t) \in P_X(t)$, то $q(A) = p_1(A) - p_X(A) = 0$, следовательно, $p_1(t) = p_X(t) + q(t) \in p_X(t) + P_a(t)$.

2) Предположим, что степень многочлена $p_X(t)$ больше либо равна n_a . Представим рациональную функцию $\frac{p_X(t)}{p_a(t)}$ в виде $\tilde{p}(t) + \frac{q(t)}{p_a(t)}$, где степень остатка $q(t)$ строго меньше n_a . Тогда $p_X(t) = \tilde{p}(t)p_a(t) + q(t)$, откуда $q(A) = X$. Однако это противоречит минимальности многочлена $p_X(t)$.

3) Так как многочлен $p_1(t) - p_2(t) \in P_a(t)$ имеет степень, строго меньшую n_a , то $p_1(t) = p_2(t)$.

Обозначим через $P_{\min}(t)$ множество всех многочленов вида $p_X(t)$, где $X \in P(A)$. Из теоремы 2.1 следует, что $P_{\min}(t)$ состоит в точности из всех многочленов степени меньше n_a . На множестве $P_{\min}(t)$ введем операции сложения $p_X + p_Y$ и умножения $p_X \circ p_Y$ следующим образом.

(1) $p_X + p_Y = p_{X+Y}$;

(2) $(p_X \circ p_Y)(t) = p_{XY}(t)$.

Множество символов $P_{\min}(t)$ с определенными таким образом операциями сложения, умножения, а также умножения на скаляр, является алгеброй.

Теорема 2.2. Произвольный многочлен $p(t)$ степени меньше n_a , однозначно представим в виде $p(t) = \sum_{k=1}^m \mu_k p_{j_k}(t) + q(t)$, где $q^n \in P_a(t)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1.2 представим матрицу $p(A)$ в виде $p(A) = \sum_{k=1}^m \mu_k J_k + N$ и перейдем к соответствующим минимальным многочленам.

Осталось заметить, что некоторая степень многочлена $p_N(t)$ является аннулирующим многочленом для A и, следовательно, делится без остатка на $p_a(t)$.

Теорема 2.3. Алгебры $P(t)$, $P_a(t)$, $P_{\min}(t)$ и $P(A)$ изоморфны.

Доказательство. Отображение $\mu(P(t) \mapsto P(A), p(t) \mapsto p(A))$ является гомоморфизмом с ядром $P_a(t)$, откуда следует изоморфизм $P(t)$, $P_a(t)$ и $P(A)$.

Обозначим через μ_0 сужение отображения μ на $P_{\min}(t)$. Очевидно, отображение μ_0 сюръективно. Если $p(t), q(t)$ — многочлены степени меньше n_a , то $p(A) - q(A)$ — аннулирующий многочлен степени меньше n_a и, таким образом, тождественно равный 0. Следовательно, отображение μ инъективно. Наконец, $\mu_0(p_X + p_Y) = p_X(A) + p_Y(A) = \mu_0(p_X) + \mu_0(p_Y)$, $\mu_0(p_X \circ p_Y) = \mu_0(p_{XY}) = p_{XY}(A) = XY = \mu_0(p_X)\mu_0(p_Y)$, следовательно, μ_0 является изоморфизмом.

3. *Символы и обобщенная обратимость.* Использование алгебры многочленов $P_{\min}(t)$ для решения вопроса об обратимости элементов из $P(A)/N(A)$ оправдывает ее название как алгебры символов.

Обозначим через $N(t)$ множество всех многочленов $p(t)$ таких, что $p(A) \in N(A)$, через $P_0(t)$ — множество всех многочленов, представимых в виде суммы $p(t) + q(t)$, где $p(t) \in P_a(t), q(t) \in N(t)$.

Лемма 3.1. $P_0(t)$ является двусторонним идеалом в $P(t)$.

Доказательство. Пусть $q(t)$ произвольный многочлен. Если $p(t) \in P_a(t)$, то $p(t)q(t) \in P_a(t)$. Если $p(t) \in N(t)$, то $p(t)q(t) \in N(t)$. Очевидно, $P_0(A)$ совпадает с идеалом $N(A)$ всех нильпотентных матриц в $P(A)$.

Лемма 3.2. Элемент $\tilde{J}$ является единицей в $\tilde{P}(A)$.

Доказательство. Верхние треугольные матрицы $U^*p(A)U$ и $U^*Jp(A)U$ имеют одинаковые главные диагонали, поэтому $p(A) - Jp(A) \in N(A)$ для любого многочлена $p(t)$.

Вопрос об обратимости элементов в алгебре $\tilde{P}(A)$ решается следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть $X \in P(A)$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) элемент $\tilde{X}$ обратим в $\tilde{P}(A)$;
- (2) существует матрица $Y \in P(A)$ такая, что $XY = J$;
- (3) $k_X = k_A$;
- (4) существует многочлен $p(t) \in P_{\min}(t)$ такой, что $p_X(t) \circ p(t) = p_j(t)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\tilde{Y}$ — обратный элемент к $\tilde{X}$. Тогда $(XY - J)^n = 0$. Раскрывая скобки, получим равенство $XT + (-1)^n J = 0$, где T — некоторый оператор из $P(A)$. Следовательно, $(-1)^{n+1} XT = J$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Следует из леммы 3.2.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $XY = J$, тогда $(U^*YU)(U^*XU) = U^*JU$, откуда $k_X \leq k_J = k_A$. С другой стороны, $k_X \geq k_A$, откуда $k_X = k_A$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $X = D + N$ — представление X в виде суммы диагональной и нильпотентной матриц. Выберем многочлен $p(t)$ такой, что $p(D)D = U^*JU$. Тогда $p(X)X - J \in N(A)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (4). Условие (4) означает, что $Xp(X) = J$.

Библиографический список

1. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 428 с.
2. Мясников А.Г., Сазонов Л.И. Сингулярные интегральные операторы с некарлемановским сдвигом // Известия Вузов. Математика. 1980. № 3. С. 22—31.
3. Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989. 464 с.
4. Causa A. Some remarks in linear spaces of nilpotent matrices // Le Matematiche. 1998. Vol. LIII. Pp. 23—32.
5. DeMarr R. Nonnegative idempotent matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 45. № 2. Pp. 185—188.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 654 с.

Поступила в редакцию в июне 2012 г.

Об авторах: **Мясников Алексей Георгиевич** — кандидат физико-математических наук, доцент, **ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, arubus@yandex.ru.

Завадская Елена Петровна — студентка 2-го курса, **ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, alenatimoff@mail.ru;

Для цитирования: *Мясников А.Г., Завадская Е.П.* Полиномиальные символы матриц // Вестник МГСУ. 2012. № 9. С. 124—128.

A.G. Myasnikov, E.P. Zavadskaya

POLYNOMIAL MATRIX SYMBOLS

Let $P(A)$ be the algebra generated by complex matrix A . Then $X \in P(A)$ can be uniquely decomposed into the sum $X = \sum \mu_k J_k + N$, where $J_k \in P(A)$ are minimal idempotent matrices, μ_k — non-null eigenvalues of matrix X , $N \in P(A)$ — the nilpotent matrix (generalization of spectral decomposition). The least degree polynomial $p_X(t)$, if $p_X(A) = X$, is called the symbol of X . In the case of $X=0$, the symbol coincides with the minimal polynomial. The set $P_{\min}(t)$ of all symbols supplied with certain operations of the sum of $p_X(t) + p(t)$ and the multiplication $p_X(t) \circ p(t)$ is the algebra which is isomorphic to the matrix algebra $P(A)$.

Hence, the symbol may be represented as the sum of a minimal polynomial divisor and a linear combination of idempotents. The authors have proven that the invertibility of X in terms of the modulus of nilpotent matrices is equivalent to the "generalized" invertibility of its symbol. More exactly, let $N(A) \subset P(A)$ denote a double-sided ideal of all nilpotent matrices, $\tilde{X} = X + N(A)$, k_X — an algebraic multiplicity of eigenvalue 0 of matrix X , J — the maximal idempotent matrix in $P(A)$. Then, the following conditions are equivalent: (1) $\tilde{X}$ is invertible into $P(A)/N(A)$; (2) there exists $Y \in P(A)$, so that $XY = J$; (3) $k_X = k_A$; (4) there exists a polynomial $p(t) \in P_{\min}(t)$, so that $p_X(t) \circ p(t) = p_A(t)$. The results can be used in systems of linear differential equations and in mathematical statistics.

Key words: idempotent matrix, Jordan canonical form, minimal polynomial, nilpotent matrix, operator symbol, matrix spectrum.

References

1. Gokhberg I.Ts., Krupnik N.Ya. *Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov* [Introduction into the Theory of One-dimensional Singular Integral Operators]. Kishinev, Shtiintsa Publ., 1973, 428 p.
2. Myasnikov A.G., Sazonov L.I. Singulyarnye integral'nye operatory s nekarlemanovskim sdvigom [Singular Integral Operators with a non-Carleman shift]. *Izvestiya Vuzov. Matematika*. [Bulletins of Institutions of Higher Education. Mathematics]. 1980, no. 3, pp. 22—31.
3. Khelemskiy A.Ya. *Banakhovy i polinormirovannye algebry: obshchaya teoriya, predstavleniya, gomologii*. [Banach and Polynormed Algebras: General Theory, Representations, Homologies]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 464 p.
4. Causa A. Some Remarks in Linear Spaces of Nilpotent Matrices. *Le Matematiche*, 1998, vol. LIII, pp. 23—32.
5. DeMarr R. Nonnegative Idempotent Matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1974, vol. 45, no. 2, pp. 185—188.
6. Horn R.A., Johnson Ch.R. *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1989, 654 p.

About the authors: **Myasnikov Aleksey Georgievich** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; arubus@yandex.ru.

Zavadskaya Elena Petrovna — student, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; alenatimoff@mail.ru;

For citation: *Myasnikov A.G., Zavadskaya E.P.* Polinomial'nye simvol'y matrits [Polynomial Matrix Symbols]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 9, pp. 124—128.