Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №5 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-5

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/02TVN516.pdf

Статья опубликована 07.09.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Кочетков А.В., Федотов П.В. Первые интегралы задачи n – тел // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №5 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/02TVN516.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 533

Кочетков Андрей Викторович
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь[1]
Доктор технических наук, профессор
E-mail: soni.81@mail.ru

Федотов Петр Викторович
ООО «Научно-исследовательский центр технического регулирования», Россия, Саратов
Инженер
E-mail: klk50@mail.ru

Первые интегралы задачи n – тел

Аннотация. Задача n-тел в небесной механике имеет 7 n первых интегралов. Это становится возможным исключительно в механике, но не касается общего решения системы дифференциальных уравнений. В механике существуют определенные ограничения в виде закона сохранения энергии, принципа суперпозиции кинетической энергии. Наличие первых интегралов не дает решения задачи определения движения системы «на бесконечности». В действительности решение, полученное из первых интегралов, действительно только до тех пор, пока конфигурация системы (взаимное расположение тел) неизменно. Всякое смещение взаимного расположения тел системы меняет численные значения «постоянных» интегрирования. Поэтому методом «первых интегралов» можно решать исключительно задачи движения тела возле неподвижных центров. В условиях, когда остальные тела, кроме исследуемого тела, неподвижны. Для решения задачи движения системы свободных (не закрепленных) тел можно воспользоваться некоторыми методами «теории игр». Т.к. в исследуемой задаче (n - тел) ситуация четко определяется взаимным положением взаимодействующих тел.

Задачу можно решать «шаговым» методом, а именно, решая на каждом шагу задачу определения следующего движения тел системы исходя из сложившейся ситуации. Предложенное решение вполне осуществимо. Для решения подходят такие методы как методы Рунге-Кутта и другие.

Ключевые слова: первые интегралы задачи трех тел; решение задачи трех тел

[1] 410022, г. Саратов, ул. Азина, д. 38 «В», кв. 4

Введение

Задача *n* – тел имеет многовековую историю со времени решения задачи движения планеты в поле тяготения Солнца, которая выражена в настоящее время тремя законами Кеплера. Эта задача названа *задачей двух тел*.

В тоже время в астрономии была поставлена задача многих тел (движение замкнутой системы многих тел, находящихся только под взаимным действием гравитационных полей системы).

Задача впервые была рассмотрена Исааком Ньютоном: «Пусть *n* – произвольное целое число. Фундаментальная задача небесной механики – задача *n* тел – состоит в следующем. В пустоте находится *n* материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения и скорости точек. Требуется найти положения точек для всех последующих моментов времени» [5].

Задача была сформулирована как общая математическая задача решения дифференциальных уравнений движения материальных точек.

Очень часто задача *n*-тел называется задачей трех тел, т.к. все трудности решения задачи полностью проявляются при *n* не меньше трех. «Задача о движении трех тел, рассматриваемых как материальные точки, взаимно притягивающихся по закону тяготения Ньютона. Классический пример - задача о движении системы Солнце - Земля - Луна.

Задача трех тел состоит в нахождении общего решения системы дифференциальных уравнений вида:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

где: x_i, y_i, z_i - прямоугольные координаты тела M_i в некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей, t - время, m_i - масса тела M_i, U - силовая функция, зависящая только от взаимных расстояний между телами. Функция U определяется соотношением:

$$U = f\left(\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_3 m_1}{\Delta_{13}}\right), \tag{2}$$

где взаимные расстояния Δ_{ij}, i, j=1, 2, 3, даются формулой:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \tag{3}$$

Из свойств силовой функции выводятся десять первых интегралов уравнений движения в абсолютной системе координат. Шесть из них, называемые интегралами движения центра масс, определяют равномерное и прямолинейное движение центра масс трех тел. Три интеграла моментов количества движения задают неизменную величину и направление вектора момента количества движения системы трех тел. Интеграл энергии определяет постоянную величину полной энергии системы [1].

Г. Брунс (H. Bruns, 1887) доказал, что уравнения движения задачи трех тел не имеют никаких других первых интегралов, выражающихся с помощью алгебраические функций от координат и их производных. А. Пуанкаре (H. Poincare, 1889) доказал, что уравнения движения задачи трех тел не имеют также трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные аналитические функции» [2].

Постановка задачи

Покажем, что это совсем не так.

Во-первых, потому, что первые интегралы задачи трех тел (а также и общей задачи n – тел) находятся очень легко.

Во-вторых, наличие первых интегралов совершенно не дает простого решения задачи n – тел.

Решение задачи. Первые интегралы энергии.

Для замкнутой системы тел сформулирован закон сохранения энергии, согласно которому энергия в изолированной системе сохраняется.

Математически закон сохранения энергии записывается в виде:

$$T + U = h,$$

где: h – постоянная интегрирования, T – кинетическая энергия системы точек, U – потенциальная энергия системы точек.

Для механической системы точек $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$, а потенциальная энергия для системы точек, взаимодействующих только по закону всемирного тяготения Ньютона[2] $U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (j > i)$, имеет вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = h, \quad (j > i) \qquad (4)$$

Мы намерены доказать, что закон сохранения энергии выполняется не только для всей системы n – тел, но и для отдельных частей системы.

Для начала распишем (4) для задачи трех тел в явном виде:

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) + \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) = h \qquad (5)$$

В уравнении (5) первые три члена - это кинетическая энергия трех тел. Причем каждый член описывает кинетическую энергию одного единственного тела.

Совсем другая ситуация с потенциальной энергией (последние три члена уравнения). Каждый член описывает потенциальную энергию взаимодействия двух тел: первого со вторым, первого с третьим и второго с третьим.

Нельзя указать, какому из взаимодействующих тел принадлежит потенциальная энергия, потому что она принадлежит сразу обоим телам.

---

[2] Для упрощения здесь принимается, что гравитационная постоянная G = 1 (ситуация аналогична системе Гаусса, принятой в электродинамике) (прим. авт).

Мы можем разделить эту энергию и приписать, что одна половина принадлежит первому взаимодействующему телу, а другая – второму[3]. Т.е.:

$$U_{12} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = U_1^2 + U_2^1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1}{r_{21}}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (б) перепишется в виде:

$$\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1}{r_{21}} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_2}{r_{32}}\right) = h.$$

Перепишем последнее уравнение:

$$\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_3}{r_{13}}\right) + \left(\frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1}{r_{21}} + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) + \left(\frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_2}{r_{32}}\right) = h.$$

В полученном уравнении получены три скобки, в каждой из которых записана механическая энергия одного тела:

$$\left(T_1 + U_1^2 + U_1^3\right) + \left(T_2 + U_2^1 + U_2^3\right) + \left(T_3 + U_3^1 + U_3^2\right) = h. \tag{7}$$

Используя обозначение E = T + U - общей механической энергии тела уравнение (7) получает окончательный вид:

$$E_1 + E_2 + E_3 = h. \tag{8}$$

Однако вывода уравнения полной механической системы трех тел в виде уравнения (4) недостаточно для аналитического решения задачи трех тел. Т.к. в нем учитываются (в неявном виде) возможные перекрестные взаимодействия. Т.о. уравнение (4) невозможно в общем случае разделить на три уравнения.

Для решения необходимо применить принцип суперпозиции. Принцип суперпозиции кинетической энергии очевиден. Изменение кинетической энергии одного тела никак не влияет на энергию других тел.

С другой стороны, изменение потенциальной энергии парное, т.е. изменение потенциальной энергии одного тела, зависит от расстояния до другого тела, а значит, при изменении расстояния каждой пары тел, будет изменяться потенциальная энергия обоих тел.

Ситуация осложняется тем, что изменение расстояния между любой парой тел, будет изменяться и расстояния до третьего тела. Отдельно выделить только пару тел, исключая изменение конфигурации всей системы взаимодействующих тел невозможно.

Но это только в общем случае.

Рассмотрим частный случай. На рисунке 1 показан частный случай изменения взаимного положения двух тел, которое не меняет потенциальную энергию третьего тела.

[3] То, что мы разделили потенциальную энергию поровну между телами – это следствие законов симметрии в физике. Т.к. нет никаких доводов в пользу того, что одному из тел принадлежит большая часть общей потенциальной энергии, чем другому (прим. авт).

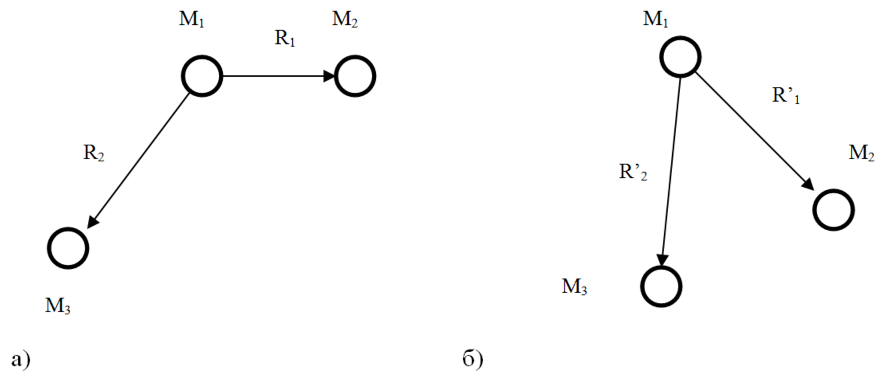

Рисунок 1. *Конфигурация задачи трех тел (рис. авт.)*

Если расстояния между телами M_1 и M_2 и между телами M_1 и M_3 до и после изменения расположения в задаче трех тел остаются неизменными $R_1 = R'_1$ и $R_2 = R'_2$, а изменяется только расстояние между телами M_2 и M_3, то ясно, что потенциальная энергия тела M_1 остается неизменной.

Также неизменна кинетическая энергия первого тела. Значит и полная механическая энергия первого тела остается неизменной.

Потенциальная энергия тел M_2 и M_3 изменяется из-за изменения взаимного расстояния, но полная механическая энергия системы остается неизменной по закону сохранения полной механической системы. Следовательно, кинетическая энергия этих тел также изменяется, но только на величину изменения потенциальной энергии.

Причем, если изменение кинетической энергии каждого тела зависит только от изменения потенциальной энергии своего тела, то можно сформулировать принцип суперпозиции полной механической энергии каждого тела в системе многих тел:

Полная механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) каждого тела системы, состоящей из многих тел, не зависит от энергии остальных тел входящих в систему и сохраняет свое значение.

Следствием этого принципа является утверждение, что полная механическая энергия системы тел равна алгебраической сумме полных энергий каждого тела, входящих в систему (5).

Т.к. согласно принципу суперпозиции, сформулированному выше, для каждого тела полная механическая энергия сохраняется, то уравнение (8) распадается на систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 + U_1 = h_1 \\ T_2 + U_2 = h_2 \\ T_3 + U_3 = h_3 \end{array}\right\}, \qquad (9)$$

где h_i - постоянные интегрирования, причем:

$$h_1 + h_2 + h_3 = h,$$

или в общем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h. \qquad (10)$$

Другими словами первый интеграл задачи *трех тел* является суммой *трех* первых интегралов тел составляющих систему.

Рассуждая аналогично для задачи *n* – тел мы получим *n* первых интегралов энергии.

Для того, чтобы получить остальные первые интегралы задачи *n* – тел приведем без доказательства две важных теоремы динамики:

Все силы, действующие на материальную точку замкнутой системы точек, приводятся к единому Главному вектору, действующему на данную точку со стороны остальной системы точек.

Главный момент, действующий на материальные точки свободной системы материальных точек, равен нулю.

Если на каждую точку действует только один Главный вектор со стороны остальных точек системы, то всегда можно считать, что вместо системы точек действует только одна «эквивалентная точка», имеющая массу *M*, и располагающуюся в «эквивалентном центре» на расстоянии *R*. Таким образом, что сила воздействия со стороны «эквивалентной материальной точки» равносильна действию всей системы материальных точек.

Другими словами, мы всегда можем от уравнений движения материальной точки под действием системы материальных точек перейти к уравнениям движения материальной точки под действием «эквивалентной» материальной точки и перейти от динамики многих точек к динамике двух точек.

Вообще такой подход содержит большой произвол в выборе пары чисел *M* и *R*, так как при любом *M* можно подобрать такое *R*, чтобы удовлетворялся принцип эквивалентности.

Поэтому, лучше считать, что масса *M* равна массе системы (*n*-1) точек, исключая рассматриваемую точку. А *R* подбирать таким образом, чтобы взаимодействие точек *m* и *M* на расстоянии *R* по законам тяготения равнялось взаимодействию точки m со всей системой (*n*-1) точек по тому же закону.

Относительно некоторой неподвижной системы координат рассмотрим движение двух материальных точек с массами *M* и *m* под действием сил тяготения для тела *m:*

$$m\frac{d\vec{v}_1}{dt} = F_1 = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (11)$$

или

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = -f\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Аналогично для тела *M:*

$$M\frac{d\vec{v}_2}{dt} = F_2 = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

или

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (12)$$

Скорость точки m относительно M равна $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, вычитая (5) из (4) найдем уравнения движения точки относительно центра «M»:

$$\frac{d\vec{v}_{OTH}}{dt} = -f\frac{M+m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

опуская индекс «отн» и обозначая через $\mu = f\,(M+m)$ получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -f\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (13)$$

Как было показано выше уравнение (9) в данном случае аналогично для задачи двух тел и для задачи n-тел, если считать, что M – это масса системы (n-1) тел.

Первые интегралы площадей

Для получения первого интеграла площадей умножим (13) векторно на $\vec{r}$:

$$\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = -\left[\vec{r}\times\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0. \qquad (14)$$

Так как в правой части $\vec{r}$ векторно умножается на $\vec{r}$, то последнее равенство тождественно равно нулю.

Заметим, что:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\times\vec{v}] = \left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right] = \left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right].$$

Тогда из (7) следует:

$$\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}\times\vec{v}] = 0.$$

Отсюда получаем интеграл площадей:

$$[\vec{r}\times\vec{v}] = c = const. \qquad (15)$$

Согласно интегралу площадей движение происходит в плоскости, проходящей через начало координат (т.е. через центр притяжения «M») и перпендикулярен вектору C.

Эта плоскость для задачи двух тел называется неизменяемой плоскостью Лапласа.

Так как уравнения движения (13) и уравнение (15) абсолютно симметричны для любой точки системы n-тел, то для системы n-тел мы имеем n первых интегралов площадей:

$$[\vec{r}_i\times\vec{v}_i] = \vec{c}_i = const, \quad где \quad (1\le i\le n). \qquad (16)$$

По определению векторного произведения $\vec{c}_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ ортогонален векторам $\vec{r}_i$ и $\vec{v}_i$.

В координатной форме:

$$\begin{Vmatrix} x & y & z \\ \vec{v}_{ix} & \vec{v}_{iy} & \vec{v}_{iz} \end{Vmatrix},$$

или

$$\begin{cases} y\, v_{iz} - z\, v_{iy} = c_{i1} \\ z\, v_{ix} - x\, v_{iz} = c_{i2} \\ x\, v_{iy} - y\, v_{ix} = c_{i3} \end{cases} . \tag{17}$$

Система уравнений (17) определяет 3*n* первых интегралов площадей для системы *n*-тел.

Первые интегралы Лапласа

Мы уже имеем 4*n* первых интегралов (*n* интегралов энергии и 3*n* интегралов площадей). Найдем остальные, для этого умножим (9) векторно на $\vec{c}_i$:

$$\left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \times \vec{c}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_i \times \vec{c}_i\right] - \vec{v}_i \frac{d\vec{c}_i}{dt} .$$

Так как $\vec{c}_i$ = const, то второй член в полученном уравнении тождественно равен нулю.

При этом:

$$\left[\vec{r}_i \times \vec{c}_i\right] = \vec{r}_i \times \left[\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right] = \vec{r}_i \times \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right] = \vec{r}_i\left(r \frac{dr}{dt}\right) - (r_i)^2 \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Тогда:

$$\frac{\mu}{r_i^3}\left[\vec{r}_i \times \vec{c}_i\right] = \frac{\mu}{r_i^3}\left[\vec{r}_i\left(r_i \frac{dr_i}{dt}\right) - (r_i)^2 \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right] = \mu\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i^2}\frac{dr_i}{dt} - \frac{1}{r_i}\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i}\right) .$$

Окончательно:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_i \times \vec{c}_i\right] = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[-\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i} + \vec{v}_i \times \vec{c}_i\right] = 0 ,$$

откуда

$$-\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i} + \vec{v}_i \times \vec{c}_i = f = const . \tag{18}$$

Этот постоянный вектор называется вектором Лапласа.

Равенство (14) дает нам еще 3*n* первых интегралов.

Получены 7*n* первых интегралов для системы *n*-тел, движение которых описывается 6*n* уравнениями движения, следовательно, интегралы не являются независимыми. Найдем связи между ними.

Вектор *f* всегда лежит в плоскости орбиты, поэтому:

$$f_i * c_i = 0, \tag{19}$$

т.е.:

$$f_{i\,1}\, c_{i\,1} + f_{i\,2}\, c_{i\,2} + f_{i\,3}\, c_{i\,3} = 0. \tag{20}$$

Это и есть первое связывающее отношение.

Второе условие связи найдем следующим образом:

$$f_i \cdot f_i = f_i^2 = \left[-\mu \frac{\vec{r}_i}{r} + (\vec{v}_i \times \vec{c}_i) \right]^2 = \mu^2 + (\vec{v}_i \times \vec{c}_i)^2 - 2\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i} (\vec{v}_i \times \vec{c}_i),$$

но

$$(\vec{v}_i \times \vec{c}_i)^2 = \left| \vec{v}_i \times \vec{c}_i \right|^2 = \left| (\vec{v}_i \cdot \vec{c}_i) \right|^2 = \vec{v}_i^{\,2} \vec{c}_i^{\,2}.$$

и

$$\vec{r}\ (\vec{v}_i \times \vec{c}_i) = \vec{c}_i (\overline{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{c}_i^{\,2} = c_i^2$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu^2 + v_i^2 c_i^2 - 2\mu \frac{c_i^2}{r_i} \right) = \mu^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \left(v_i^2 - \frac{2\mu}{r_i} \right). \tag{21}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \left(v_i^2 - \frac{2\mu}{r_i} \right) = 2h,$$

где h – постоянная интегрирования первого интеграла энергии системы n-тел, (17) перепишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = \mu^2 + h \sum_{i=1}^{n} c_i^2. \tag{22}$$

Необходимо рассмотреть вопрос, а почему раньше не были получены интегралы задачи трех тел в виде систем уравнений (9), (17) и (22)?

Ответ в том, что ранее задача рассматривалась как общая задача решения системы дифференциальных уравнений, безо всяких ограничений на конкретные условия решения задачи.

Мы же широко использовали принцип независимости (суперпозиции) энергии одного тела от энергии других тел. В тоже время считали, что движение одного тела не зависит от движения других тел, кроме зависимости движения тела от взаимного расположения других тел (принцип сведения системы к главному вектору и моменту).

Причем неявно подразумевалось, что взаимодействия тел системы сводится исключительно к взаимному притяжению по закону Ньютона.

В общем случае это далеко не так. Во-первых, законы взаимодействия могут быть не только ньютоновскими, во-вторых, принцип независимости первых производных координат (скорости) не всегда обязан выполняться.

В этом случае нельзя пользоваться принципом независимости кинетической энергии, а значит и принципом суперпозиции полной механической энергии тел системы.

Также не обязательно (в общем случае) выполнение теорем Главного вектора и Главного момента системы. При отсутствии перечисленных ограничений получение первых интегралов невозможно.

Решение задачи n-тел

Итак, найдены $7n$ первых интегралов для задачи n-тел или 7 интегралов для каждой материальной точки (интеграл энергии, три интеграла площадей и три интеграла Лапласа). Однако наличие первых интегралов не дает решения задачи определения законов движения материальных точек.

Причины те же, что и в случае задачи двух тел [3].

Однако задачу n-тел решить можно и найденные интегралы весьма пригодятся для решения подобных задач.

В первую очередь разберемся, почему наличие первых интегралов задачи не дает решения. Все дело в том, что решение задачи при наличии первых интегралов предполагает, что первые интегралы задачи остаются неизменными на все время движения. Но в случае общих динамических задач это не так.

Дело не в том, что коэффициенты, входящие в первые интегралы, меняются сами по себе, а в том, что изменение положения исследуемого тела влияет на движение остальных тел в системе.

Получается, что необходимо получить решение задачи с обратной связью. Движение исследуемого тела четко зависит от конфигурации остальных тел в системе, и, в тоже время, изменения расположения остальных тел зависят от движения исследуемого тела.

Ситуация аналогична стратегии игры с несколькими игроками, когда каждый следующий ход зависит от предыдущих ходов каждого игрока, в том числе и того, который строит свою стратегию игры.

Именно поэтому легко решается задача Кеплера (задача движения планеты вокруг неподвижного Солнца), в принципе может быть решена задача движения точки возле неподвижных центров, **но не может быть решена общая задача трех тел**. Следует оговориться, задача трех тел не может быть решена в «классическом смысле», а именно, получить готовое решение в окончательном виде на все время движения системы «один раз и навсегда».

Очевидно, что любое движение любого из тел, составляющих систему, меняет конфигурацию. А значит, меняет коэффициенты, входящие в первые интегралы, дающие решения задачи.

Важно помнить, что все наработки теории игр также не подходят для решения поставленной задачи.

Дело в том, что в задаче трех тел не существует понятия «выигрыш», а вместо «игроков», обладающих свободой выбора выигрышной стратегии, «играют» материальные тела, поведение которых жестко определяются законами механики.

Выводы

1. Задача n-тел в небесной механике имеет 7 *n* первых интегралов. Это становится возможным исключительно в механике, но не касается общего решения системы дифференциальных уравнений (1). Т.к., в механике существуют определенные ограничения в виде закона сохранения энергии, принципа суперпозиции кинетической энергии и т.д.
2. Наличие первых интегралов не дает решения задачи определения движения системы «на бесконечности». В действительности решение, полученное из первых интегралов действительно только до тех пор, пока конфигурация системы (взаимное расположение тел) неизменно.
3. Всякое смещение взаимного расположения тел системы меняет численные значения «постоянных» интегрирования. Поэтому методом «первых интегралов» можно решать исключительно задачи движения тела возле неподвижных центров. А именно, в условиях, когда остальные тела, кроме исследуемого тела, неподвижны.
4. Для решения задачи движения системы свободных (не закрепленных) тел можно воспользоваться некоторыми методами «теории игр». Т.к. в исследуемой задаче (*n* - тел) ситуация четко определяется взаимным положением взаимодействующих тел.
5. Задачу можно решать «шаговым» методом, а именно, решая на каждом шагу задачу определения следующего движения тел системы исходя из сложившейся ситуации.
6. Предложенное решение вполне осуществимо и, более того, наиболее подходяще для решения методами современной вычислительной математики. Для решения подходят такие методы как методы Рунге-Кутта и другие [6, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978. 456 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. Наука. 800 с.
3. Кочетков А.В., Федотов П.В. Метод решения задачи двух тел // Науковедение, т. 7, №6 (2015). [Электронный ресурс]. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/70TVN615.pdf.
4. Кунин С. Вычислительная физика. М.: Мир. 1992. 518 с.
5. Маркеев А.П. Задача трех тел и ее точные решения // Соросовский Образовательный журнал. 1999. №9.
6. Разевиг В.Д. Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1980. №4. С. 177–186.
7. Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. Конспект лекций, прочитанных на механико-математическом факультете МГУ в 1962/1963 уч. г. - М.: МГУ. 1968. 157 с.
8. Охоцимский Д.Е., Сихуралидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. 1990. 448 с.
9. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. - Л.: Наука. 1965. 367 с.

Kochetkov Andrey Viktorovich
Perm national research polytechnical university, Russia, Perm
E-mail: soni.81@mail.ru

Fedotov Petr Viktorovich
JSC research center of technical regulation, Russia, Saratov
E-mail: klk50@mail.ru

First integrals of the problem n – bodies

Abstract. The problem of n-bodies in heavenly mechanics has 7 n of the first integrals. It is possible it becomes exclusive in mechanics, but doesn't concern the common decision of system of the differential equations. In mechanics there are certain restrictions in the form of the law of energy conservation, the principle of superposition of kinetic energy. Existence of the first integrals doesn't give the solution of a problem of definition of the movement of system "on infinity". Actually the decision received from the first integrals is valid only until a configuration of system (a relative positioning of bodies) is invariable. Any shift of a relative positioning of bodies of system changes numerical values of "constants" of integration. Therefore by method of "the first integrals" it is possible to solve only problems of the movement of a body near the motionless centers. In conditions when other bodies, except the studied body, aren't mobile. For the solution of a problem of the movement of system of the free (not fixed) bodies it is possible to use some methods of "the theory of games". Since in the studied task (n - bodies) the situation accurately is defined by mutual position of the interacting bodies.

The problem can be solved by a "step" method, namely, solving continually a problem of definition of the following motion of bodies of system proceeding from current situation. The proposed solution is quite feasible. Such methods are suitable for the decision as Runge-Kutt's methods and others.

Keywords: first integrals of the three-body problem; solution of the three bodies

REFERENCES

1. Duboshin G.N. Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody. M.: Nauka. 1978. 456 s.
2. Duboshin G.N. Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody. M. Nauka. 800 s.
3. Kochetkov A.V., Fedotov P.V. Metod resheniya zadachi dvukh tel // Naukovedenie, t. 7, №6 (2015). [Elektronnyy resurs]. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/70TVN615.pdf.
4. Kunin S. Vychislitel'naya fizika. M.: Mir. 1992. 518 s.
5. Markeev A.P. Zadacha trekh tel i ee tochnye resheniya // Sorosovskiy Obrazovatel'nyy zhurnal. 1999. №9.
6. Razevig V.D. Tsifrovoe modelirovanie mnogomernykh dinamicheskikh sistem pri sluchaynykh vozdeystviyakh // Avtomatika i telemekhanika. 1980. №4. S. 177–186.
7. Okhotsimskiy D.E. Dinamika kosmicheskikh poletov. Konspekt lektsiy, prochitannykh na mekhaniko-matematicheskom fakul'tete MGU v 1962/1963 uch. g. - M.: MGU. 1968. 157 s.
8. Okhotsimskiy D.E., Sikhuralidze Yu.G. Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta. M.: Nauka. 1990. 448 s.
9. Chebotarev G.A. Analiticheskie i chislennye metody nebesnoy mekhaniki. - L.: Nauka. 1965. 367 s.