

ЛОГИКА

В.О. Шангин*

ПАРАПОЛНОЕ МОДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО**

В статье построено оригинальное модельное множество для парapolной логики PComp (параполное модельное множество), которое является обобщением модельного множества, предложенного Я. Хинтиккой для классической логики высказываний.

Ключевые слова: модельное множество, множество Хинтикки, парapolная логика, паралогика, семантика, теория моделей, отмеченная формула.

V.O. Shagin. Paracomplete model set

The author constructs an original model set for a paracomplete logic PComp (paracomplete model set) which is the generalization of the model set proposed by J. Hintikka for the classical propositional logic.

Key words: model set, Hintikka set, paracomplete logic, paralogic, semantics, model theory, signed formula.

Введение

Понятие «модельное множество» (множество, максимально насыщенное сверху вниз) было введено Я. Хинтиккой [*J. Hintikka*, 1957, р. 1—14] для классической логики. В дальнейшем модельное множество (в том числе для неклассических логик) стали называть *множеством Хинтикки*. Грубо говоря, модельное множество формул обладает некоторыми условиями (например, непротиворечивостью), позволяющими доказать его выполнимость, т.е. наличие модели, в которой все формулы из этого множества принимают значение «истина».

Модельные множества успешно применяются в теории доказательств. Например, с их помощью Р. Шмюльян доказывает полноту построенных им исчислений для классической логики высказываний и предикатов [*R. Smullyan*, 1965, р. 123—139]. Развивая подход Р. Шмюльяна, М. Фиттинг использует модельные множества и коллекции модельных множеств для доказательства полноты предложенных им аналитических таблиц для интуиционистской и модальной

* Шангин Василий Олегович — кандидат философских наук, ассистент кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел.: 8 (495) 939-18-46; e-mail: shagin@philos.msu.ru

** Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-03-00088a).

логик [M. Fitting, 1969]. Результат В. Карнелли о систематизации любой конечнозначной логики с помощью предложенных им аналитических таблиц базируется на построении модельных множеств [W. Carnielli, 1987, vol. 52 (2), p. 473—493].

Долгое время считалось, что метод построения модельных множеств не применим к (автоматическому) поиску натурального вывода. Ситуация изменилась с появлением работ У. Сига и его учеников, где данный метод (косвенным образом) используется для доказательства полноты так называемых «промежуточных» исчислений, доказательство в которых затем трансформируется в доказательство в натуральном исчислении [W. Sieg, J. Byrnes, 1998, vol. 60 (1), p. 67—106]. Данная статья является продолжением серии статей, посвященных (автоматическому) поиску натурального вывода в классической и неклассической (в частности, временной) логиках, где метод построения модельных множеств применяется при доказательстве полноты алгоритмов [A. Bolotov, O. Grigoryev, V. Shangin, 2007, p. 47—58], [A. Bolotov, V. Shangin, 2012, vol. 21 (1), p. 1—24]. В частности, в указанной работе Болотова и Шангина [ibid.] построено оригинальное модельное множество для некоторой паранепротиворечивой логики (паранепротиворечивое модельное множество).

Статья структурирована следующим образом. В параграфе 1 даются синтаксис и семантика для пропозициональной парapolной логики PComp. Для связности изложения основного результата в параграфе 2 кратко описывается классический результат Хинтички. Параграф 3 содержит применение метода Хинтички к логике PComp: в нем построено парapolное модельное множество с отмеченными формулами. Наконец, параграф 4 посвящен основному результату статьи — построению парapolного модельного множества без отмеченных формул.

1. Логика PComp: синтаксис и семантика

Задается стандартный пропозициональный язык L с алфавитом $\{p_1, q, r, p_2, \dots, (,), \&, \vee, \supset, \neg\}$. Определение формулы языка L обычно. Буквы $A, B, C, D, A_1, \dots$ обозначают произвольные формулы языка L . Буквы $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Gamma_1, \dots$ обозначают произвольные конечные множества формул языка L . $A \equiv B$ есть сокращение для $(A \supset B) \& (B \supset A)$. Определение отмеченной формулы стандартно за небольшим исключением: мы будем писать «1A» («0A») вместо «A» («fA»), понимая при этом, что A оценивается как классически истинная и ложная соответственно. (В рассматриваемой нами логике PComp мы будем писать «fA», понимая при этом, что A принимает третье истинностное значение «f».) Знак «•» обозначает конец доказа-

тельства. В работе мы используем пропозициональную парapolную логику RComp [A. Avron, 1991, vol. 56(1), p. 276—294]. Определения паралогики, парapolной логики см. [B.M. Попов, 2010, вып. 16, с. 205—220].

Определение. Аксиоматика RComp:

- Позитивный фрагмент классической логики высказываний;
- $\neg\neg A \equiv A$; $\neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$; $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B)$; $\neg(A \supset B) \equiv (A \& \neg B)$;
- $\neg A \supset (A \supset B)$.

Правило вывода — модус поненс.

Определение. Связки RComp задаются следующими таблицами:

$\neg$	A	$\&$	1	f	0	$\vee$	1	f	0	$\supset$	1	f	0
0	1	1	1	f	0	1	1	1	1	1	1	f	0
f	f	f	f	f	0	f	1	f	f	f	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	f	0	0	1	1	1

Множество выделенных значений — множество $\{1\}$.

2. Построение модельного множества для классической логики

Мы начнем с результата Хинтикки для классической логики высказываний и дадим для наших целей определения модельного множества для формул и для отмеченных формул.

Определение (множества Хинтикки для классической логики без отмеченных формул). Множество Σ называется множеством Хинтикки, если для него выполняются следующие условия (A и B суть произвольные формулы из Σ):

1. Неверно, что $A \in \Sigma$ и $\neg A \in \Sigma$;
2. $\neg\neg A \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$;
3. $A \& B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$ и $B \in \Sigma$; $\neg(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$ или $\neg B \in \Sigma$;
4. $A \vee B \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$ или $B \in \Sigma$; $\neg(A \vee B) \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$ и $\neg B \in \Sigma$;
5. $A \supset B \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$ или $B \in \Sigma$; $\neg(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$ и $\neg B \in \Sigma$.

Определение (множества Хинтикки для классической логики для отмеченных формул). Множество Σ называется множеством Хинтикки, если для него выполняются следующие условия (A и B суть произвольные формулы из Σ):

1. Неверно, что $1A \in \Sigma$ и $0A \in \Sigma$;
2. $1\neg A \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$; $0\neg A \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$;
3. $1(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ и $1B \in \Sigma$; $0(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ или $0B \in \Sigma$;
4. $1A \vee B \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ или $1B \in \Sigma$; $0(A \vee B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ и $0B \in \Sigma$;
5. $1(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ или $1B \in \Sigma$; $0(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ и $0B \in \Sigma$.

Лемма Хинтикки. Любое модельное множество Σ выполнимо [J. Hintikka, 1957, vol. XVII (2), p. 1—14].

3. Построение модельного множества для RComp с отмеченными формулами

В. Карнелли обобщил результат Хинтикки на некоторые неклассические логики, а именно он предложил общий метод построения модельного множества для любой конечнозначной табличной логики [W. Carnielli, 1987, vol. 52 (2), p. 473—493] (см. также распространение данного метода на натуральный вывод в: [M. Baaz, C.G. Fermüller, R. Zach, 1993, p. 208—213]).

Схематично данный метод состоит в следующем. Берем произвольную n -значную логику, $n > 2$. Все n истинностных значений этой логики «превращаются» в символы-отметки, и работа в дальнейшем идет только с отмеченными формулами. Условия для множества Хинтикки задаются с помощью табличного определения связок выбранной n -значной логики. Покажем, как данный метод применим к логике RComp.

Определение (множества Хинтикки для логики RComp для отмеченных формул). Множество Σ формул называется множеством Хинтикки, если для него выполняются следующие свойства (A и B суть произвольные формулы из Σ ; **полужирным** отмечены специфические условия для RComp):

1. Неверно, что $1A \in \Sigma$ и $0A \in \Sigma$; **неверно, что $1A \in \Sigma$ и $fA \in \Sigma$; неверно, что $0A \in \Sigma$ и $fA \in \Sigma$;**
2. $1\neg A \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$; $0\neg A \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$; $f\neg A \in \Sigma \Rightarrow fA \in \Sigma$;
3. $1(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ и $1B \in \Sigma$; $0(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ или $0B \in \Sigma$; **$f(A \& B) \in \Sigma \Rightarrow (fA \in \Sigma$ и $1B \in \Sigma)$ или $(fA \in \Sigma$ и $fB \in \Sigma)$ или $(1A \in \Sigma$ и $fB \in \Sigma)$;**
4. $1A \vee B \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ или $1B \in \Sigma$; $0(A \vee B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ и $0B \in \Sigma$; **$f(A \vee B) \in \Sigma \Rightarrow (fA \in \Sigma$ и $fB \in \Sigma)$ или $(fA \in \Sigma$ и $0B \in \Sigma)$ или $(0A \in \Sigma$ и $fB \in \Sigma)$;**
5. $1(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow 0A \in \Sigma$ или $1B \in \Sigma$ или $fA \in \Sigma$; $0(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ и $0B \in \Sigma$; **$f(A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow 1A \in \Sigma$ и $fB \in \Sigma$.**

Лемма Хинтикки для логики RComp. Любое модельное множество Σ выполнимо. Доказательство рутинно следует из табличных определений связок логики RComp.

4. Построение модельного множества для RComp без отмеченных формул

Универсальность метода Карнелли одновременно является его недостатком. *Во-первых*, использование отмеченных формул не всегда необходимо, и множество Хинтикки для некоторой n -значной логики, естественно, строится без отмеченных формул. *Во-вторых*, метод Карнелли громоздок, ибо он жестко привязан к n истинност-

ным значениям данной логики. Таким образом, возрастание параметра n при построении множества Хинтикки ведет к необходимости формулировать n условий для $\&$, n условий для $\vee$ и т.д.

В третьих, из второго факта вытекает то, что в наихудшем случае в n -значной логике возможны $n - 1$ *невыделенных* значений, т.е. таких значений, которые не принимает ни одна общезначимая в данной логике формула. Поскольку метод Карнелли работает с аналитическими таблицами (одной из формализаций метода от противного), в таком случае нужно построить все $n - 1$ аналитических таблиц, чтобы убедиться в общезначимости формулы. *В-четвертых*, мы особо отметим тот факт, что метод Карнелли (опять же в силу своей универсальности) не всегда показывает специфику конкретной n -значной логики.

Данная статья, будучи продолжением работы Болотова и Шангина [A. Bolotov, V. Shangin, 2012, vol. 21 (1), p. 1–24], свободна от указанных недостатков. Прежде всего, паранепротиворечивое [ibid.] и парাপолное (см. ниже) множества Хинтикки для пропозициональной трехзначной паранепротиворечивой логики PCont и для пропозициональной трехзначной парাপолной логики PComp, соответственно, строятся без отмеченных формул.

Кроме того, сравнение паранепротиворечивого (парাপолного) модельного множества без отмеченных формул с паранепротиворечивым (парাপолным) модельным множеством для отмеченных формул показывает, что возрастание параметра (в данном случае в сравнении с классической логикой) не всегда приводит к необходимости формулировать дополнительные условия для пропозициональных связок. Читатель может сравнить число **полуужирных** условий в определении множества Хинтикки для логики PComp для отмеченных формул (см. выше) и число **полуужирных** условий в определении множества Хинтикки для логики PComp без отмеченных формул (см. ниже).

Отсутствию *еще одного недостатка* будет посвящено наше дальнейшее исследование, в котором мы применим построенное в данной статье парাপолное модельное множество к автоматическому поиску натурального вывода в парাপолной логике PComp. И наконец, предложенные в данной статье и в указанной работе [ibid.], модельные множества показывают специфические свойства рассматриваемых паралогик. Например, множество Хинтикки для логики PComp без отмеченных формул в работе Болотова и Шангина [ibid.] эксплицитно задает главное свойство паранепротиворечивой логики — *диалетейю*: наличие формулы и ее отрицания не является противоречием, которое приводит к тривиализации и возможности обосновать все, что угодно; наоборот, наличие в паранепротиворечивом модельном множестве формул p и $\neg p$ позволяет

оценить p как « t », где « t » — это третье (неклассическое) значение паранепротиворечивой логики RComp.

Определение (множества Хинтикки для логики RComp без отмеченных формул). Множество Σ называется множеством Хинтикки, если для него выполняются следующие условия (A и B суть произвольные формулы из Σ ; p — пропозициональная переменная, не входящая в Σ ; **полужирным** отмечено специфическое условие для RComp):

Случаи 1—4 являются классическими.

4. $A \supset B \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$ или $B \in \Sigma$ или $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$; $\neg (A \supset B) \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$ и $\neg B \in \Sigma$.

Лемма Хинтикки для логики RComp без отмеченных формул. Любое модельное множество Σ выполнимо. Доказательство ведется по числу формул в Σ и длине формулы в Σ .

Напомним, что формула A принимает значение «1» в двух случаях: (а) если $A \in \Sigma$ и $\neg A \notin \Sigma$; (б) если $A \in \Sigma$ и $A \supset (p \ \& \ \neg p) \notin \Sigma$; A принимает значение «0», если $\neg A \in \Sigma$ и $A \notin \Sigma$; A принимает значение « f », если $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $\neg A \notin \Sigma$.

Отметим, что в силу конечности множества Σ и бесконечности алфавита языка L , мы всегда найдем такую пропозициональную переменную p , которая не входит в Σ . Альтернативно мы могли бы использовать подход В.М. Попова [В.М. Попов, 2000, вып. XIV, с. 36—41], где происходит погружение классической пропозициональной логики в ее импликативный фрагмент и в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики. Также альтернативой было бы введение в алфавит языка L знака абсурда « F » для обозначения невыполнимой формулы и, соответственно, появление нового вида формулы: $A \supset F$.

Случаи 1—4 рассматриваются классически.

Рассмотрим случай 5, подслучай $A \supset B \in \Sigma$.

Приписывание значения формуле $A \supset B$, $\xi(A \supset B)$, происходит следующим образом: если $\xi(A \supset B) = 1$, то (5.1) $\xi A = 0$ или (5.2) $\xi B = 1$ или (5.3) $\xi A = f$.

5.1. Согласно определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул, $\neg A \in \Sigma$.

Таким образом, из имеющихся 16 случаев, в зависимости от того, $A \in \Sigma$ или $\neg A \in \Sigma$ или $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$ или $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, исключаем случаи:

Восемь случаев, когда $\neg A \notin \Sigma$;

Четыре случая (из оставшихся восьми), когда $A \in \Sigma$ (по определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул, неверно, что $A \in \Sigma$ и $\neg A \in \Sigma$);

Два случая (из оставшихся четырех), когда $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$ (из $\neg A \in \Sigma$ и $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$ следует, что $p \ \& \ \neg p \in \Sigma$, а значит,

$p \in \Sigma$ и $\neg p \in \Sigma$, что невозможно по определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул).

Остались два случая, отличающиеся между собою наличием формулы $A \supset (p \& \neg p)$ в Σ :

Случай 15: $A \supset B \in \Sigma, A \notin \Sigma, \neg A \in \Sigma, A \supset (p \& \neg p) \in \Sigma, \neg A \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma$.

Случай 16: $A \supset B \in \Sigma, A \notin \Sigma, \neg A \in \Sigma, A \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma, \neg A \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma$.

Случай 16 рассматривается в классической логике: если $\xi(A \supset B) = 1$, то $\xi A = 0$.

В случае 15 $\xi A = 0$, учитывая, что из $\neg A$ в логике RComp следует $A \supset (p \& \neg p)$.

Случай 5.2. Согласно определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул, $B \in \Sigma$.

Таким образом, из имеющихся 16 случаев, в зависимости от того, $B \in \Sigma$ или $\neg B \in \Sigma$ или $B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$ или $\neg B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$, исключаем случаи:

Восемь случаев, когда $B \notin \Sigma$;

Четыре случая (из оставшихся восьми), когда $\neg B \in \Sigma$ (по определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул, неверно, что $B \in \Sigma$ и $\neg B \in \Sigma$);

Два случая (из оставшихся четырех), когда $B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$ (из $B \in \Sigma$ и $B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$ следует, что $p \& \neg p \in \Sigma$, а значит, $p \in \Sigma$ и $\neg p \in \Sigma$, что невозможно по определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул).

Остались два случая, отличающиеся между собою наличием формулы $\neg B \supset (p \& \neg p)$ в Σ :

Случай 15: $A \supset B \in \Sigma, \neg B \notin \Sigma, B \in \Sigma, \neg B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma, B \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma$.

Случай 16: $A \supset B \in \Sigma, \neg B \notin \Sigma, B \in \Sigma, \neg B \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma, B \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma$.

Случай 16 рассматривается в классической логике: если $\xi(A \supset B) = 1$, то $\xi B = 1$.

В случае 15 $\xi B = 1$, учитывая, что из B в логике RComp следует $\neg B \supset (p \& \neg p)$.

Случай 5.3. Согласно определению множества Хинтикки для множества RComp без отмеченных формул, $A \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$.

Таким образом, из имеющихся 16 случаев, в зависимости от того, $B \in \Sigma$ или $\neg B \in \Sigma$ или $B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$ или $\neg B \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$, исключаем случаи:

Восемь случаев, когда $A \supset (p \& \neg p) \notin \Sigma$;

Четыре случая (из оставшихся восьми), когда $A \in \Sigma$ (из $A \in \Sigma$ и $A \supset (p \& \neg p) \in \Sigma$ следует, что $p \& \neg p \in \Sigma$, а значит, $p \in \Sigma$ и $\neg p \in \Sigma$,

что невозможно по определению множества Хинтикки для множества PConp без отмеченных формул).

Один случай (из оставшихся четырех), когда $\neg A \in \Sigma$, $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$ (из $\neg A \in \Sigma$ и $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$ следует, что $p \ \& \ \neg p \in \Sigma$, а значит, $p \in \Sigma$ и $\neg p \in \Sigma$, что невозможно по определению множества Хинтикки для множества PConp без отмеченных формул).

Остались 3 случая:

Случай 14: $A \supset B \in \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $\neg A \in \Sigma$, $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \notin \Sigma$ (см. 5.1, случай 15).

Случай 15: $A \supset B \in \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $\neg A \notin \Sigma$, $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$.

Случай 16: $A \supset B \in \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $\neg A \notin \Sigma$, $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p) \notin \Sigma$.

В случае 15 $\xi A = f$, учитывая, что формула $\neg A \supset (p \ \& \ \neg p)$ — это частный случай формулы $C \supset (p \ \& \ \neg p)$.

В случае 16 $\xi A = f$, так как A принимает значение « f », если $A \supset (p \ \& \ \neg p) \in \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $\neg A \notin \Sigma$. •

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Попов В.М. Погружение классической пропозициональной логики в ее импликативный фрагмент и в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра ИФРАН. М., 2000. Вып. XIV.

Попов В.М. Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик // Логические исследования. М.; СПб., 2010. Вып. 16.

Avron A. Natural 3-valued logics: characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56 (1).

Baaz M., Fermuller C.G., Zach R. Systematic construction of natural deduction systems for many-valued logics // The Proceedings of 23rd International Symposium on Multiple Valued Logic. Sacramento (CA). May 1993. Los Alamitos, 1993.

Bolotov A., Grigoryev O., Shangin V. Automated natural deduction for propositional linear-time temporal logic // Proceedings of the 14th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning. Alicante, Spain, June 28—June 30, 2007.

Bolotov A., Shangin V. Natural deduction system in paraconsistent setting: proof search for PCon // Journal of Intelligent Systems. 2012. Vol. 21 (1).

Carnielli W. Systematization of the finite many-valued logics through the method of tableaux // Journal of Symbolic Logic. 1987. Vol. 52 (2).

Fitting M. Intuitionistic logic, model theory and forcing. Amsterdam, 1969.

Hintikka J. A new approach to sentential logic // Societas Scientiarum Fennica Commentationes Physico-Mathematicae. 1957. Vol. XVII (2).

Sieg W., Byrnes J. Normal natural deduction proofs (in classical logic) // Studia Logica. 1998. Vol. 60 (1).

Smullyan R.M. Analytic natural deduction // Journal of Symbolic Logic. 1965. Vol. 30 (2).