Математика

УДК 515.12

ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЗМЕРНОСТИ (m,n)-dim

В. В. Федорчук[1]

Размерность (m,n)-dim оценивается посредством лебеговой размерности.

Ключевые слова: размерность, размерность (m,n)-dim, сепарабельное метрическое пространство.

Dimension (m,n)-dim is estimated by means of the Lebesgue dimension.

Key words: dimension, dimension (m,n)-dim, separable metric space.

Введение. В работе [1] было введено понятие (m,n)-C-пространства. Всякое C-пространство в смысле Хэйвера–Аддиса–Грэшема (см. [2, 3]) является (m,n)-C-пространством, а всякое (m,n)-C-пространство при $m>n$ слабо бесконечномерно в смысле Смирнова.

В работе [4] была определена и исследована размерность (m,n)-dim, обобщающая лебегову размерность dim: $\dim X=(2,1)\text{-}\dim X$.

В настоящей работе приводятся оценки размерности (m,n)-dim посредством лебеговой размерности, а именно

$$(m,n)\text{-}\dim X \leqslant \frac{\dim X}{n} \quad \text{(теорема 6);}$$

если $n(m,n)\text{-}\dim X+n<m$, то

$$(m,n)\text{-}\dim X \geqslant \frac{\dim X}{n}-1+\frac{1}{n} \text{ (теорема 8).}$$

К основным результатам относится и теорема 11.

1. Предварительные сведения. Все пространства предполагаются нормальными. Используются следующие обозначения:

1) если $A\subset X$, то $[A]$ — замыкание множества A в X. Через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел;

2) $\operatorname{cov}(X)$ — множество всех открытых покрытий X, $\operatorname{cov}_m(X)$ — множество всех открытых покрытий, состоящих из $\leqslant m$ элементов;

3) пусть u и v — семейства подмножеств множества X. Символ $u\prec v$ означает, что v вписано в u, т.е. каждое множество $V\in v$ содержится в некотором $U\in v$.

Если $u=(U_1,\ldots,U_m)$, $v=(V_1,\ldots,V_m)$ — упорядоченные последовательности, то отношение $u\prec v$ означает, что $V_j\subset U_j$, $j=1,\ldots,m$;

4) кратность семейства u множеств обозначается через $\operatorname{ord}u$, т.е. $\operatorname{ord}u$ — такое наибольшее n, что u содержит n элементов с непустым пересечением. В частности, $\operatorname{ord}u\leqslant 1$ тогда и только тогда, когда семейство u дизъюнктно;

5) если $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ — семейства множеств, то через $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_r$ обозначается множество всевозможных пересечений $A_1\cap\ldots\cap A_r$, где $A_i\in\alpha_i$.

Предложение 1. *Если $u_i\in\operatorname{cov}(X)$, то $u_1\wedge\ldots\wedge u_r\in\operatorname{cov}(X)$.* □

Определение 1. Пусть $u=(U_1,\ldots,U_m)$ — конечная последовательность множеств и $u\prec v$. *Укрупнением семейства v относительно u* называется следующая последовательность $W(v,u)=(W_1,\ldots,W_m)$:

$$W_1=\bigcup\{V\in v: V\subset U_1\},\ W_j=\bigcup\{V\in v: V\subset U_j;\ V\ \not\subset\ V_k,\ k<j\}.$$

Предложение 2. *Верны соотношения* $\bigcup W(v,u)=\bigcup v,\ \operatorname{ord}W(v,u)\leqslant\operatorname{ord}v.$ □

[1] *Федорчук Виталий Витальевич* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vvfedorchuk@gmail.com.

Лемма [5]. *Пусть* $u = (U_1, \ldots, U_m) \in \mathrm{cov}_m(X)$ *и* $\Phi = (F_1, \ldots, F_m)$ — *такое семейство замкнутых множеств, что* $F_j \subset U_j, \quad j = 1, \ldots, m$. *Тогда существуют такие окрестности* OF_j, *что*

$$F_j \subset OF_j \subset [OF_j] \subset U_j; \ \mathrm{ord}\big([OF_1], \ldots, [OF_m]\big) = \mathrm{ord}\Phi. \qquad \square$$

Предложение 3 [5]. *Пусть* $u \in \mathrm{cov}_m(X)$ *и* $\mathrm{ord}u \leqslant k$. *Тогда существуют такие семейства* $u_1, \ldots, u_k$ *открытых подмножеств* X, *что* $\mathrm{ord}u_i \leqslant 1$, $u \prec u_i$, $u_1 \cup \ldots \cup u_k \in \mathrm{cov}(X)$. $\square$

Из теоремы о характеризации размерности dim посредством существенных отображений в симплекс [5] вытекает

Теорема 1. *Имеем* $\dim X \leqslant k$, $k \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда во всякое покрытие* $u \in \mathrm{cov}_{k+2}(X)$ *можно вписать покрытие* $v \in \mathrm{cov}(X)$ *кратности* $\leqslant k+1$. $\square$

Определение 2 [4]. Пусть $u = (U_1, \ldots, U_m) \in \mathrm{cov}_m(X)$ и $\Phi = (F_1, \ldots, F_m)$ — такая последовательность замкнутых подмножеств X, что

$$F_j \subset U_j, \quad j = 1, \ldots, m; \quad \mathrm{ord}\Phi \leqslant 1.$$

Тогда (u, Φ) называется *m-парой в* X. Множество всех m-пар в X обозначается $m(X)$.

Определение 3 [4]. Пусть $(u, \Phi) \in m(X)$ и $v = (V_1, \ldots, V_m)$ — такая последовательность открытых подмножеств X, что

$$F_j \subset V_j \subset U_j, \quad j = 1, \ldots, m; \quad \mathrm{ord}v \leqslant n.$$

Тогда (u, Φ, v) называется *(m,n)-тройкой* в X.

Определение 4 [4]. Пусть $(u, \Phi) \in m(X)$. Замкнутое множество $P \subset X$ называется *n-перегородкой* пары (u, Φ) (обозначение $P \in \mathrm{Part}(u, \Phi, n)$), если существует такая (m,n)-тройка (u, Φ, v), что $P = X \setminus \bigcup v$.

Предложение 4. *Пусть* $(u_i, \Phi_i) \in m(X), \quad i = 1, 2$. *Если* $u_2 \prec u_1$, $\Phi_1 \prec \Phi_2$ *и* $P \in \mathrm{Part}(u_1, \Phi_1, n)$, *то* $P \in \mathrm{Part}(u_2, \Phi_2, n)$. $\square$

Определение 5 [4]. Пусть $(u_i, \Phi_i) \in m(X), \quad i = 1, \ldots, r$. Последовательность $\big((u_1, \Phi_1), \ldots, (u_r, \Phi_r)\big)$ называется *n-несущественной* в X, если существуют такие перегородки $P_i \in \mathrm{Part}(u_i, \Phi_i, n)$, что $P_1 \cap \ldots \cap P_r = \emptyset$.

Из предложения 4 вытекает

Предложение 5. *Пусть* $(u_i^k, \Phi_i^k) \in m(X), \quad i = 1, \ldots, r; \quad k = 1, 2$. *Если* $u_i^2 \prec u_i^1, \quad \Phi_i^1 \prec \Phi_i^2$ *для всех* i *и последовательность* $\big((u_1^1, \Phi_1^1), \ldots, (u_r^1, \Phi_r^1)\big)$ *n-несущественна в* X, *то последовательность* $\big((u_1^2, \Phi_1^2), \ldots, (u_r^2, \Phi_r^2)\big)$ *также n-несущественна в* X. $\square$

Определение 6 [4]. *Размерность* (m,n)-$\dim X$, m, $n \in \mathbb{N}$, определяется следующим образом:

(1) (m,n)-$\dim X = -1 \iff X = \emptyset$;

(2) (m,n)-$\dim X \leqslant k$, где $k = 0, 1, \ldots$, если всякая последовательность $(u_i, \Phi_i) \in m(X)$, $i = 1, \ldots, k+1$, n-несущественна в X;

(3) (m,n)-$\dim X = \infty$, если (m,n)-$\dim X > k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 [4]. *Выполнено равенство* $(2,1)$-$\dim X = \dim X$ *для всякого пространства* X. $\square$

Предложение 6. *Если* $m \leqslant n$, *то* (m,n)-$\dim X \leqslant 0$. $\square$

Теорема 3 [4]. *Если* X — *наследственно нормальное пространство и* $X = X_1 \cup X_2$, *то*

$$(m,n)\text{-}\dim X \leqslant (m,n)\text{-}\dim X_1 + (m,n)\text{-}\dim X_2 + 1. \qquad \square$$

Теорема 4 [4]. *Пусть* $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ — *обратный спектр из бикомпактов, и пусть* $X = \lim S$. *Если* (m,n)-$\dim X_\alpha \leqslant k$ *для всех* $\alpha \in A$, *то* (m,n)-$\dim X \leqslant k$. $\square$

Определение 7 [1]. Пространство X называется *(m,n)-C-пространством* (обозначение $X \in (m,n)$-C), если для всякой последовательности $u_i \in \mathrm{cov}_m(X)$, $i \in \mathbb{N}$, существует такая последовательность v_i семейств открытых подмножеств X, что $v_i \succ u_i$, $\mathrm{ord}v_i \leqslant n$ и $\bigcup\{v_i : i \in \mathbb{N}\} \in \mathrm{cov}(X)$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определений.

Предложение 7. *Если* (m,n)-$\dim X < \infty$, *то* $X \in (m,n)$-C. $\square$

Следствием теоремы 3.6 и предложения 3.7 из работы [1] является

Теорема 5. *Всякий бикомпакт* $X \in (m,n)$-C *слабо бесконечномерен.* $\square$

Дополнительную информацию, касающуюся размерности и общей топологии, можно найти в [5].

2. Основные результаты.

Теорема 6. *Для всякого непустого пространства* X

$$n\big((m,n)\text{-}\dim X\big) \leqslant \dim X.$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, если (m,n)-dim$X$=0. Пусть (m,n)-dim$X = r \geqslant 1$, dim$X = k$. Предположим, что $nr \geqslant k+1$. Поскольку (m,n)-dim$X = r$, существует последовательность $(u_i, \Phi_i) \in m(X)$, $i = 1,\dots,r$, которая n-существенна в X.

Пусть $u_i = \left(U_1^i,\dots,U_m^i\right)$, $\Phi_i = \left(F_1^i,\dots,F_m^i\right)$. Для каждого $i = 1,\dots,r$ существуют такое покрытие $u_i^1 = \left({}^1U_1^i,\dots,{}^1U_m^i\right) \in \mathrm{cov}_m(X)$ и такие окрестности $OF_j^i \subset {}^1U_j^i$, что

$$j_1 \neq j_2 \Rightarrow OF_{j_1}^i \cap [{}^1U_{j_2}^i] = \emptyset. \tag{1}$$

В самом деле, в силу леммы 1 существуют такие окрестности OF_J^i, что

$$[OF_j^i] \subset U_j^i, \quad j = 1,\dots,m; \tag{2}$$

$$j_1 \neq j_2 \Rightarrow [OF_{j_1}^i] \cap [OF_{j_2}^i] = \emptyset. \tag{3}$$

Теперь положим

$${}^1U_j^i = U_j^i \setminus \bigcup\{[OF_{j'}^i] : j' \neq j\}, \quad j = 1,\dots,m. \tag{4}$$

Из (4) вытекает (1). Остается проверить, что $u_i^1 \in \mathrm{cov}(X)$. Пусть $x \in U_j^i \setminus {}^1U_J^i$. Тогда $x \in [OF_{j'}^i]$ для некоторого $j' \neq j$. Но в этом случае из (2) и (3) получаем $x \in {}^1U_{j'}^i$. Итак, система покрытий u_i^1, удовлетворяющая условиям (1), построена.

Положим $u = u_1^1 \wedge \ldots \wedge u_r^1$. Имеем $u \in \mathrm{cov}(X)$ согласно предложению 1. Поскольку dim$X = k$, существует такое покрытие $v \in \mathrm{cov}(X)$, что v измельчает u и ord$v \leqslant k+1$. В силу предложения 3 существуют такие семейства $v_1,\dots,v_{k+1}$ открытых подмножеств X, что каждое v_i вписано в v, $v_1 \cup \ldots \cup v_{k+1} \in \mathrm{cov}(X)$ и ord$v_i \leqslant 1$. Определим семейства w_j, $j = 1,\dots,r$, следующим образом:

$$w_j = \bigcup\{v_i : (j-1)n+1 \leqslant i \leqslant jn\}. \tag{5}$$

Стоит отметить, что некоторые из семейств v_i и w_j из (6) могут быть пусты. Но в любом случае, согласно (5), имеем

$$\bigcup\{w_j : j = 1,\dots,r\} = \bigcup\{v_i : i = 1,\dots,k+1\} \in \mathrm{cov}(X). \tag{6}$$

Из (5) вытекает также, что

$$\mathrm{ord} w_j \leqslant n. \tag{7}$$

Кроме того, по определению

$$v_i \succ v \succ u \succ u_l^1, \quad l = 1,\dots,r. \tag{8}$$

Согласно (5) и (8), каждое семейство w_j вписано в каждое семейство u_l^1, в частности $w_l \succ u_l^1$, $l = 1,\dots,r$.

Пусть $w_l^1 = \left({}^1W_1^l,\dots,{}^1W_m^l\right)$ — укрупнение семейства w_l относительно покрытия u_l^1. Из предложения 2 и определения 1 вытекает, что

$${}^1W_j^i \subset {}^1U_j^i, \quad j = 1,\dots,m; \tag{9}$$

$$\mathrm{ord} w_i^1 \leqslant \mathrm{ord} w_i; \tag{10}$$

$${}^1W_1^i \cup \ldots \cup {}^1W_m^i = \bigcup w_i, \quad i = 1,\dots,r.$$

Положим

$${}^0W_j^i = {}^1W_j^i \cup OF_j^i, \quad j = 1,\dots,m; \tag{11}$$

$$w_i^0 = \left({}^0W_1^i,\dots,{}^0W_m^i\right), \quad i = 1,\dots,r. \tag{12}$$

Условия (2), (4), (9) и (11) влекут

$$F_j^i \subset {}^0W_j^i \subset {}^1U_j^i, \quad j = 1,\dots,m, \quad i = 1,\dots,r. \tag{13}$$

Из (1) и (9) вытекает, что

$$j_1 \neq j_2 \Rightarrow OF_{j_1}^i \cap {}^1W_{j_2}^i = \emptyset.$$

Значит, $\mathrm{ord}w_i^0 = \mathrm{ord}w_i^1$. Поэтому из (7), (10)–(12) получаем

$$\mathrm{ord}w_i^0 \leqslant n, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{14}$$

Следовательно, из (13) и (14) вытекает, что (u_i^1, Φ_i, w_i^0) является (m,n)-тройкой в X для каждого $i = 1, \ldots, r$. Из условий (6) и (11) получаем $w_1^0 \cup \ldots \cup w_r^0 \in \mathrm{cov}(X)$. Значит, последовательность $(u_1^1, \Phi_1), \ldots, (u_r^1, \Phi_r)$ n-несущественна в X. Но тогда, согласно предложению 5, последовательность $(u_1, \Phi_1), \ldots, (u_r, \Phi_r)$ также n-несущественна в X. Получили противоречие. □

Из теоремы 6 вытекает

Теорема 7. *Для всякого пространства X имеем (m,n)-$\mathrm{dim}X \leqslant \mathrm{dim}X$.* □

Теорема 7 дает положительный ответ на вопрос 3.8 из [4].

Теорема 8. *Если $\big((m,n)$-$\mathrm{dim}X + 1\big)n < m$, то*

$$\mathrm{dim}X \leqslant n\big((m,n)\text{-}\mathrm{dim}X\big) + n - 1. \tag{15}$$

Доказательство. Как и выше, пусть $\mathrm{dim}X = k$, (m,n)-$\mathrm{dim}X = r$. По условию $nr + n \leqslant m - 1$. Следовательно, чтобы доказать (15), достаточно (см. теорему 1) показать, что произвольное покрытие $u \in \mathrm{cov}_m(X)$ имеет измельчение $v \in \mathrm{cov}(X)$ кратности $\leqslant nr + n$. Рассмотрим последовательности $(u_1, \ldots, u_{r+1})$, где все $u_i = u$, и $(\Phi_1, \ldots, \Phi_{r+1})$, где $\Phi_i = \big(F_1^i, \ldots, F_m^i\big)$ и $F_j^i \in \emptyset$. Тогда $(u_i, \Phi_i) \in m(X)$. Поскольку (m,n)-$\mathrm{dim}X \leqslant r$, последовательность (u_i, Φ_i), $i = 1, \ldots, r+1$, n-несущественна. Следовательно, существуют такие семейства v_i открытых подмножеств X, что

$$(u_i, \Phi_i, v_i) \text{ есть } (m,n)\text{-тройка в } X, \quad i = 1, \ldots, r+1,$$

в частности $\mathrm{ord}v_i \leqslant n$ и $v = \bigcup\{v_i : i = 1, \ldots, r+1\} \in \mathrm{cov}(X)$. Тогда $\mathrm{ord}v \leqslant n(r+1)$. Значит, v является искомым покрытием. □

Теоремы 6 и 8 влекут

Следствие 1. *Если $n\big((m,n)$-$\mathrm{dim}X + 1\big) < m$, то*

$$\frac{\mathrm{dim}X}{n} - 1 + \frac{1}{n} \leqslant (m,n)\text{-}\mathrm{dim}X \leqslant \frac{\mathrm{dim}X}{n}. \tag{16}$$

Следствие 2. *Если $\mathrm{dim}X < m - n$, то $\mathrm{dim}X - n + 1 \leqslant n(m,n)$-$\mathrm{dim}X$.* □

Предложение 8. *Если $n\big((m,n)$-$\mathrm{dim}X + 1\big) < m$, то*

$$(m,n)\text{-}\mathrm{dim}(X \times I) \leqslant (m,n)\text{-}\mathrm{dim}X + 1 \tag{17}$$

для всякого паракомпактного пространства X.

Доказательство. Морита доказал [6], что

$$\mathrm{dim}(X \times I) \leqslant \mathrm{dim}X + 1. \tag{18}$$

Представим условие (16) в виде системы неравенств

$$\frac{\mathrm{dim}X + 1}{n} - 1 \leqslant (m,n)\text{-}\mathrm{dim}X, \tag{19}$$

$$(m,n)\text{-}\mathrm{dim}X \leqslant \frac{\mathrm{dim}X}{n}. \tag{20}$$

Тогда (m,n)-$\mathrm{dim}(X \times I) \overset{(20)}{\leqslant} \frac{\mathrm{dim}(X\times I)}{n} \overset{(18)}{\leqslant} \frac{\mathrm{dim}X+1}{n} \overset{(19)}{\leqslant} 1 + (m,n)$-$\mathrm{dim}X$. □

Следствие 3. *Если $\mathrm{dim}X < m - n$, то имеет место (17).* □

Вопрос 1. Верно ли неравенство (20) для любых m и n?

Предложение 9. *Пусть $n\big((m,n)$-$\mathrm{dim}X_i + 1\big) < m$, и пусть X_1 и X_2 удовлетворяют неравенству*

$$\mathrm{dim}X_1 + n \leqslant \mathrm{dim}X_2. \tag{21}$$

Тогда

$$(m,n)\text{-}\mathrm{dim}X_1 + 1 \leqslant (m,n)\text{-}\mathrm{dim}X_2. \tag{22}$$

Доказательство. Положим $\dim X_i = k_i$, (m,n)-$\dim X_i = r_i$. Тогда

$$r_1 + 1 \leqslant \text{ (теорема 6) } \leqslant \frac{k_1+n}{n} \overset{(21)}{\leqslant} \frac{k_2}{n} \leqslant \text{ (теорема 8) } \leqslant r_2 + 1 - \frac{1}{n},$$

откуда получаем (22). □

Предложение 8 влечет

Предложение 10. *Предположим, что (m,n)-$\dim I^k = r$ для некоторых k и r, и пусть $(r+1)n < m$. Тогда для любого r', $0 \leqslant r' \leqslant r$, существует такое $k' \leqslant k$, что (m,n)-$\dim I^{k'} = r'$.* □

Из предложений 9 и 10 вытекает

Теорема 9. *Пусть $(r+1)n < m$. Тогда для любого r', $0 \leqslant r' \leqslant r$, существует такое k, что (m,n)-$\dim I^k = r'$.* □

Вопрос 2. Верно ли, что для любого $r \geqslant 0$ существует k со свойством (m,n)-$\dim I^k = r$?

Теорема 10. *Если $m > n$, то множество $\{(m,n)\text{-}\dim I^k : k \in \mathbb{N}\}$ не ограничено.*

Доказательство. Предположим, что существует k_0 со свойством

$$(m,n)\text{-}\dim I^k = (m,n)\text{-}\dim I^{k_0}, \quad k \geqslant k_0.$$

Рассмотрим обратную последовательность $S = \{I^k,\ p_k^{k+1},\ k \in \mathbb{N}\}$, где $p_k^{k+1} : I^{k+1} \to I^k$ есть проекция на грань. Тогда $\lim S = I^\omega$. С другой стороны,

$$(m,n)\text{-}\dim(\lim S) \leqslant (m,n)\text{-}\dim I^{k_0},$$

согласно теореме 4. Следовательно,

$$(m,n)\text{-}\dim I^\omega \leqslant (m,n)\text{-}\dim I^{k_0} \leqslant k_0$$

по теореме 7. Поэтому из предложения 7 и теоремы 5 вытекает, что $I^\omega \in \mathrm{wid}$. Но это противоречит сильной бесконечномерности гильбертова куба. □

Замечание. Из теоремы 10 вытекает, что положительный ответ на вопрос 1 влечет положительный ответ на вопрос 2.

Теорема 11. *Для любого $r \geqslant 0$ существует такое метрическое сепарабельное пространство X_r, что (m,n)-$\dim X_r = r$.*

Доказательство. Согласно теореме 10, существуют такие $r_1 \geqslant r$ и k, что (m,n)-$\dim I^k = r_1$. По теореме Урысона существуют такие нульмерные множества $X_i \subset I^k$, что $X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_k = I^k$. В силу теоремы 7 имеем (m,n)-$\dim X_i \leqslant 0$. Положим $Y_i = X_o \cup \ldots \cup X_i$. Тогда из теоремы 3 вытекает, что

$$(m,n)\text{-}\dim Y_{i+1} \leqslant (m,n)\text{-}\dim Y_i + 1.$$

Следовательно, $\{(m,n)\text{-}\dim Y_i : i = 0,1,\ldots,k\} = \{0,1,\ldots,r_1\}$, откуда наше утверждение и вытекает. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09–01–00741) и Министерства науки и образования России (проект РНП 2.1.1.3704 “Современная дифференциальная геометрия, топология и их приложения”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федорчук В.В.* C-spaces and matrix of infinite-dimensionality // Topol. Appl. 2010. **157**, N 17. 2622–2634.
2. *Haver W.E.* A covering property for metric spaces // Lect. Notes Math. 1974. **375**. 108–113.
3. *Addis D.F., Gresham J.H.* A class of infinite-dimensional spaces. I. Dimension theory and Alexandroff's problem // Fund. math. 1978. **101**, N 3. 195–205.
4. *Fedorchuk V.V.* Finite dimensions defined by means of m-coverings // J. Egypt. Math. Soc. 2012. **64**, N 4. 347–360.
5. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
6. *Morita K.* On the dimension of product spaces // Amer. J. Math. 1953. **75**, N 2. 205–223.

Поступила в редакцию
26.12.2011