УДК 531.1:629.76 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2009, вып. 1

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ КАСАТЕЛЬНОЙ ВСТРЕЧИ

В. С. Новоселов

С.-Петербургский государственный университет,
д-р физ.-мат. наук, профессор, decan@apmath.spbu.ru

1. Одной из задач аналитической механики, связанных с движением в центральном гравитационном поле, является исследование вариационной схемы выбора оптимальных траекторий при разгоне и торможении маршевым двигателем с учетом различных дополнительных условий. Наиболее трудным условием представляется отказ от традиционного импульсного рассмотрения участков активного движения [1, 2]. Вторым дополнительным условием может служить требование касания траектории инспектора и инспектируемого объекта в точке контакта с заданной, в том числе и нулевой относительной скоростью [3–5]. Базовой для околоземного маневрирования и полета к планетам солнечной системы является задача построения оптимальных траекторий переходов между околокруговыми орбитами [6]. Если начальная фаза движения принимается произвольной, то, как показано в статьях [7, 8], на оптимальной по минимуму расхода топлива траектории разгон и торможение должны выполняться при наибольшем секундном расходе или при наибольшем реактивном ускорении.

В настоящей работе проводится оптимизация касательной встречи в центральном гравитационном поле с заданной относительной скоростью в конце второго участка включения двигателя. В отличие от [3, 5], активные участки не являются импульсными и в отличие от [4] проводится оптимальное изменение относительной скорости встречи до требуемой величины с помощью второго включения двигателя. Принято ограничение на величину реактивного ускорения, так как построение оптимальной траектории с ограничением на величину секундного расхода топлива связано с большими трудностями [4].

2. Рассматривается компланарная задача движения в центральном гравитационном поле с двумя разгонными включениями двигателя, создающего реактивное ускорение $\beta = \mathrm{const} > 0$. Первое включение на время T_1 в точке старта и второе — на время T_2 в конце участка баллистического движения. Минимизируется сумма характеристических скоростей $V_1 + V_2$, $V_1 = \beta T_1$, $V_2 = \beta T_2$, что равносильно минимуму расхода топлива [4]. Сохраняем основные обозначения [3–6]. Для кеплеровых элементов e — эксцентриситет, p — фокальный параметр, ω — долгота перицентра. Характеристики начальной орбиты снабжаем буквой «н», орбиты инспектируемого объекта, называемой орбитой контакта, буквой «к». В рассматриваемой задаче $p_{\text{К}} > p_{\text{Н}}$. Истинную аномалию f баллистической орбиты снабжением следующими символами: для начальной точки «$-$», для конечной точки «$+$». Фазовые переменные — радиальную и трансверсальную скорости, полярный радиус и полярный угол — обозначаем x_i, $i = 1, 2, 3, 4$; угол наклона тяги к полярному радиусу — через ψ,

Применяется методика работ [6,9] введения малого параметра $\varepsilon = 1/2(T_1 + T_2)T^{-1}$, где T — время всего перелета. Исследование проводится асимптотически с помощью построения разложений по степеням ε. Величины нулевого порядка отмечаем индексом «O», первого и второго порядков — одним и двумя штрихами. Для удобства вычислений, как и в статье [5], заданную относительную скорость контакта записываем в виде $\nu\varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}$, $\nu = \text{const} > 0$, но полагаем $\nu = \nu^0 + \varepsilon\nu'$. Здесь $\varkappa$ — квадратный корень из произведения универсальной гравитационной постоянной и массы центрального тела. Как и в статьях [3–5], для эксцентриситетов начальной орбиты инспектора и орбиты контакта полагаем

$$e_{\text{Н}} = \varepsilon e'_{\text{Н}} + \varepsilon^2 e''_{\text{Н}}, \qquad e_{\text{К}} = \varepsilon e'_{\text{К}} + \varepsilon^2 e''_{\text{К}}.$$

Связь скоростных переменных баллистической орбиты инспектора после контакта и орбиты инспектируемого объекта имеет вид, указанный в статье [5]. Отсюда следуют те же условия трансверсальности в точке контакта. Получаем совпадающее с цитированной работой нулевое приближение

$$e_0 = (p_{\text{К}} - p_{\text{Н}})(p_{\text{К}} + p_{\text{Н}})^{-1}, \quad p_0 = 2p_{\text{К}}p_{\text{Н}}(p_{\text{К}} + p_{\text{Н}})^{-1},$$

$$\omega_0 = \varphi_{\text{Н}}^0, \quad \varphi_{\text{К}}^0 = \pi + \varphi_{\text{Н}}^0,$$

$$V_1^0 = \varkappa p_{\text{Н}}^{-1/2}\left((1+e_0)^{12} - 1\right), \quad V_2^0 = \varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}\left(1 - \nu^0 - (1-e_0)^{1/2}\right),$$

$$T^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi\varkappa^{-1}(p_{\text{К}} + p_{\text{Н}})^{3/2}, \quad \psi_j^0 = \frac{\pi}{2}, \quad T_j^0 = \beta^{-1}V_j^0, \quad j = 1, 2.$$

Малый параметр уточняется по нулевому приближению

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(V_1^0 + V_2^0)(\beta T^0)^{-1}. \tag{1}$$

Для удобства вычислений за методический параметр ε можно принять величину того же порядка, что и (1), но имеющую простой вид, например единицы, умноженной на десять в целой отрицательной степени.

Начальное значение углового положения точки определяется на основе уравнений трансверсальности первого порядка в том же виде, так и в статье [5]. Имеем существенное отличие от соответствующего значения для перелета с одним включением двигателя [3, 4]. Указанное различие связано с экстремальным свойством суммы квадратов первых двух лагранжевых множителей (сопряженных переменных) в точках соединения дуг баллистического и активного движений [9]. Разные условия на конце участка баллистического движения для оптимальных траекторий с одним и двумя включениями двигателя приводят к различным представлениям лагранжевых множителей. Хотя величину ν можно, в частности, выбрать так, чтобы отпала необходимость во втором включении двигателя, но по-прежнему положение точки старта будет отличаться от положения точки после старта для перелета с одним включением. Поэтому предельный переход к оптимальному перелету с меньшим числом включений двигателя отсутствует.

3. Регуляризация дифференциальных уравнений движения на участках работы двигателя выполняется с помощью введения вспомогательных независимых переменных τ_1 и τ_2. Для первого участка $t = t_{\text{Н}} + \varepsilon\tau_1$, $\tau_1 \in [0, \Lambda_1]$, $\varepsilon\Lambda_1 \in [0, T_1]$ и для второго $t = t_{\text{К}} + \varepsilon\tau_2$, $\tau_2 \in [0, \Lambda_2]$, $\varepsilon\Lambda_2 \in [0, T_2]$. Величины Λ_1 и Λ_2 будут порядка единицы. Регуляризованные уравнения приводятся в работах [3, 6, 9]. С помощью уравнения Эйлера—Лагранжа, отвечающего радиальной скорости x_1, в первом по ε приближений находим закон изменения угла наклона тяги:

$$\begin{gathered}\psi_j'(\tau_j) = \psi_j'(0) + a_j\tau_j + b_j\tau_j^2, \quad j = 1, 2,\\ a_1 = -\varkappa p_{\text{Н}}^{-3/2} N_1(e_0), \quad N_1(e_0) = 1 - \frac{1}{2}(1+e_0)^{1/2}(2-e_0) \geq 0,\\ b_1 = -\frac{1}{2}\tilde{\beta} p_{\text{Н}}^{-1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\varkappa e_0(1-e_0)^{1/2} p_{\text{К}}^{-3/2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}\tilde{\beta} p_{\text{К}}^{-1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\tilde{\beta} = \varepsilon^{-1}\beta$ является регуляризованной верхней границей реактивного ускорения и имеет порядок единицы. По формуле (2) величина ψ_1' монотонно уменьшается. Зависимость от времени ψ_2' более сложная. При $V_2^0 \leq V_2^*$, $V_2^* = a_2 p_{\text{К}}$ величина ψ_2' монотонно возрастает. Если $V_2^0 > V_2^*$, то при $\tau_2 < \tau_2^*$, где $\tau_2^* = \tilde{\beta}^{-1} V_2^*$, монотонно возрастает, при $\tau_2 = \tau_2^*$ имеет $\max \psi_2' = \psi_2'(0) + \frac{1}{2}(V_2^*)^2(\tilde{\beta} p_{\text{К}})^{-1}$, затем монотонно убывает. Если к тому же $V_2^0 > 2V_2^*$, то при $\tau_2 > 2\tau_2^*$ величина ψ_2' становится меньше $\psi_2'(0)$.

Определение начальных поправок углов наклона тяги $\psi_j'(0)$ формулы (2) связано с вычислением x_1 на основе дифференциальных уравнений активного движения и удовлетворением граничных условий, а также условий сшивания баллистической дуги и дуг активного движения. Получена следующая поправка первого приближения для начального отклонения от трансверсального направления тяги в точке старта:

$$\begin{gathered}\psi_1'(0) = (1+e_0)^{1/2}[(2N_1 e_0^{-1} - 1)e_{\text{Н}}' \sin f_{\text{Н}}^0 + F_1(\Lambda_1^0)] \left(1 - e_0 + (1+e_0)^{1/2}\right)^{-1},\\ F_1(\Lambda_1^0) = \frac{1}{2}\Lambda_1^0 p_{\text{Н}}^{-1/2}\left[\varkappa e_0 p_{\text{Н}}^{-1} + 2(1+e_0)^{-1/2} p_{\text{Н}}^{-1/2} V_1^0 - \varkappa^{-1}(V_1^0)^2\right].\end{gathered} \tag{3}$$

Поправка начального угла наклона тяги второго включения двигателя будет

$$\begin{gathered}\psi_2'(0) = -(1-e_0)^{1/2}[(2N_2 e_0^{-1} + 1 - \nu^0)e_{\text{К}}' \sin f_{\text{К}}^0 + F_2(\Lambda_2^0)](1 + e_0 + (1-\nu^0)(1-e_0)^{1/2})^{-1},\\ N_2 = 1 - \frac{1}{2}(1-e_0)^{1/2}(2+e_0) \geq 0,\\ F_2(\Lambda_2^0) = \Lambda_2^0 p_{\text{К}}^{-1/2}[-\varkappa e_0 p_{\text{К}}^{-1} + \frac{1}{4}(1-e_0)^{1/2}(4-e_0) p_{\text{К}}^{-1/2} V_2^0 + \frac{1}{2}\varkappa^{-1}(V_2^0)^2].\end{gathered} \tag{4}$$

Если участки активного движения можно считать импульсными, то $\Lambda_j^0 = 0$, $F_j(\Lambda_j^0) = 0$ и выражения (3) и (4) совпадут с соответствующими значениями статьи [3], в которой, однако, формула (3) в явном виде не получена.

4. Изменение трансверсальной скорости на дугах активного движения определяется уравнением [6]

$$\frac{dx_2}{d\tau_j} = \varepsilon^2 x_1' x_2^0 (x_3^0)^{-1} + \tilde{\beta}(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \psi_j'^2(\tau_j)). \tag{5}$$

В моменты отсечки двигателя $\tau_j = \Lambda_j = \Lambda_j^0 + \varepsilon\Lambda_j' + \varepsilon^2\Lambda_j''$, при этом $V_j = V_j^0 + \varepsilon V_j' + \varepsilon^2 V_j''$, $V_j^0 = \tilde{\beta}\Lambda_j^0$, $V_j' = \tilde{\beta}\Lambda_j'$, $V_j'' = \tilde{\beta}\Lambda_j''$.

Исходя из условий касания с заданной относительной скоростью $(\nu^0 + \varepsilon\nu')\varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}$, можно записать для точки касания

$$x_2(t_{\text{К}}) = \varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}[1 - \nu^0 - \varepsilon(\nu' - e_{\text{К}}' \cos f_{\text{К}}^0)] + \varepsilon^2 x_2''(t_{\text{К}}),$$

$$x_2''(t_{\text{К}}) = \varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}[e_{\text{К}}'' \cos f_{\text{К}}^0 - e_{\text{К}}' f_{\text{К}}' \sin f_{\text{К}}^0 + \frac{1}{2}\nu^0 e_{\text{К}}'^2 \sin f_{\text{К}}^0].$$

Выполняя интегрирование уравнения (5) и удовлетворяя граничным условиям, для поправок первого порядка характеристических скоростей получаем

$$V_1' = -\varkappa p_{\text{Н}}^{-1/2}\left[1-\frac{1}{4}(1+e_0)^{\frac{1}{2}}(3-e_0)\right]e_{\text{Н}}'\cos f_{\text{Н}}^0 - \frac{1}{2}\varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}(1-e_0)^{1/2}(1+e_0)e_{\text{К}}'\cos f_{\text{К}}^0,$$

$$V_2' = -1/4\varkappa p_{\text{Н}}^{-1/2}(1+e_0)^{1/2}(1-e_0)e_{\text{Н}}'\cos f_{\text{Н}}^0 + \\ + \varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}\left[1-\frac{1}{4}(1-e_0)^{1/2}(3+e_0)\right]e_{\text{К}}'\cos f_{\text{К}}^0 - \nu'\varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}. \quad (6)$$

Величина V_1' совпадает с поправкой характеристической скорости статей [3, 4]. Сумма двух поправок (6) соответствует статье [5]. Величины V_1' и V_2' не зависят от поправок первого порядка наклона тяги (3) и (4), что можно было ожидать на основании теоремы [6, 9] о точности вычисления управлений.

Второе приближение характеристической скорости стартового активного участка получено в статье [4]. Поправку второго порядка характеристической скорости участка контакта представим в виде

$$V_2'' = x_2''(t_{\text{К}}) - x_2^{+''} + \frac{1}{2}V_2^0\psi'^2(0) + G(\Lambda_2^0). \quad (7)$$

Здесь $x_2^{+''}$ определяется при выделении членов второго порядка [6] в соотношении $x_2^+ = \varkappa p^{-1/2}(1+e\cos f^+)$. Принято обозначение

$$G_2(\Lambda_2^0) = \frac{1}{2}\Lambda_2^0 p_{\text{К}}^{-1}\left[\varkappa^2(1-\nu^0)^2 p_{\text{К}}^{-1}\sin f_{\text{К}}^0 + \frac{1}{2}\psi_2'(0)V_2^0(\varkappa p_{\text{К}}^{-1/2}N_2 - \frac{1}{3}V_2^0)\right] + \\ + \frac{1}{2}(\Lambda_2^0)^2 p_{\text{К}}^{-2}\left\{-\varkappa^3 e_0(1-e_0)^{1/2}p_{\text{К}}^{-3/2} + \frac{1}{12}\varkappa^2 p_{\text{К}}^{-1}V_2^0[(1-e_0)(8-2e_0-e_0^2)-8e_0] + \right. \\ \left. + \frac{3}{4}\varkappa(1-e_0)^{1/2}p_{\text{К}}^{-1/2}(V_2^0)^2 + \frac{3}{20}(V_2^0)^3\right\}.$$

Входящая в выражение (7) величина $\psi_2'(0)$, согласно (4), линейно зависит от Λ_2^0. При $\Lambda_2^0 = 0$ и $\nu^0 = 0$ получается поправка второго порядка финишной характеристической скорости двухимпульсного перехода [6].

5. Отметим особенности предлагаемой аналитической теории касательной встречи. В нулевом приближении имеем двухимпульсный перелет между компланарными круговыми орбитами с радиусами, равными средним с точностью до вторых степеней эксцентриситетов расстояниями граничных орбит от притягивающего центра. Второй импульс уменьшается в зависимости от величины требуемой относительной скорости контакта. Тяга ортогональна к полярному радиусу. Старт может осуществляться из любой точки начальной орбиты.

В первом приближении однозначно определяется нулевое приближение углового положения точки старта, а также поправки первого порядка для двух характеристических скоростей. Угол наклона тяги изменяется в зависимости от времени. Тяга перестает быть трансверсальной даже в моменты включения двигателя. Полученный в первом приближении закон изменения угла наклона тяги не влияет на расход характеристических скоростей первого порядка, но определяет расход второго порядка. На уровне второго приближения аналитические выражения становятся громоздкими и могут использоваться лишь для качественных выводов при упрощающих предположениях.

Можно было рассматривать две шкалы единиц измерения: орбитальную и разгонную. В первой принять за единицу времени T^0, а во второй $1/2(T_1^0 + T_2^0)$. По формуле (1) отношение единиц времени равно ε^{-1}. Если реактивное ускорение β в единицах первой шкалы полагать равным $\varepsilon^{-1}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\beta}$ ускорение во второй системе, то отношение единиц длины будет ε^{-1}, а скорости, вычисленные в разных системах, численно равными. Однако переход от одной системы к другой требует специального преобразования лагранжевых множителей [6, 9]. Поэтому оказалось проще использовать только одну шкалу, а при исследовании разгонных участков выполнять вспомогательную замену независимой переменной.

Литература

1. *Ильин В. А., Кузмак Г. Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 744 с.

2. *Охоцимский Д. Е. Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета. Учебное пособие. М.: Наука, 1990. 448 с.

3. *Новоселов В. С.* Оптимальные одноимпульсные траектории касательного пролета // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия, 2005. Вып. 4. С. 108–115.

4. *Новоселов В. С.* Оптимальные траектории касательного пролета с учетом продолжительности активного участка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия, 2006. Вып. 3. С. 109–120.

5. *Новоселов В. С.* Оптимальный двухимпульсный касательный пролет с заданной относительной скоростью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия, 2007. Вып. 4. С. 144–150.

6. *Новоселов В. С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 318 с.

7. *Гурман В. И.* К вопросу об оптимальности особых режимов движения ракет в центральном поле // Космические исследования. Т. 4. Вып. 4. 1966. С. 499–509.

8. *Новоселов В. С.* Об особом оптимальном по расходу топлива управлении в гравитационном поле // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2007. Вып. 2. С. 54–61.

9. *Новоселов В. С., Королев В. С.* Аналитическая механика управляемой системы. Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 298 с.

Статья поступила в редакцию 18 сентября 2008 г.