ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЁ ГРАДИЕНТУ

Предложен способ восстановления функции по её градиенту, в основу которого положено суммирование неопределённых интегралов от частных производных функции и исключение лишних слагаемых.

Ключевые слова: градиент, функция, частная производная, интеграл, переменная.

Актуальность задачи определения функции по её градиенту можно показать, ограничиваясь лишь примером пространственного распределения сил, которое является градиентом энергии соответствующего поля [1–5].

Специфика естественно-научных исследований позволяет ограничиться рассмотрением операций на пространстве векторных полей и гладких функций в $\mathbb{R}^3$.

Существует несколько способов [6–9] отыскания функции по её градиенту

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Наиболее простой способ [10] заключается в вычислении криволинейного интеграла

$$f = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \\ = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z_0) dy + \\ + \int_{z_0}^z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz.$$

Достоинством этого метода является компактность. Недостатком – необходимость выбора начальной точки интегрирования (x_0, y_0, z_0) . Последнее сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения. Кроме того, в ряде случаев это может быть сопряжено с трудностями, вследствие чего представлять собой дополнительную задачу.

Пример 1. Для двухмерного случая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arcsin y + \ln(y-1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{y-1}$$

возникает проблема с выбором y_0 , поскольку должны одновременно выполняться условия: $y \leq 1$ и $y > 1$.

Есть способы, например, [11], лишённые этого изъяна. Они заключаются в подборе вспомогательных функций. Их существенными недостатками являются трудоёмкость и громоздкость.

Предлагаемый ниже подход свободен от недостатков указанных способов. По трудоёмкости и компактности он сопоставим с первым способом, и в нём нет необходимости определения исходной точки интегрирования. Предлагаемый способ определяет следующая

Теорема. Функция f может быть восстановлена по её градиенту (1) в соответствии с формулой

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int \frac{\partial f}{\partial y} dy + \int \frac{\partial f}{\partial z} dz - \\ - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C = \\ = P_{xyz}(x, y, z) + P_{xy}(x, y) + P_{xz}(x, z) + P_x(x) + \\ + Q_{xyz}(x, y, z) + Q_{xy}(x, y) + Q_{yz}(y, z) + Q_y(y) + \\ + R_{xyz}(x, y, z) + R_{xz}(x, z) + R_{yz}(y, z) + R_z(z) - \\ - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C. \quad (2)$$

При этом

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz}, \quad (3)$$

$$P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy}, \quad (4)$$

$$P_{xz} = R_{xz} = V_{xz}, \quad (5)$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz}. \quad (6)$$

Величины (3) – (6) представляют собой функции, содержащие переменные, указанные в индексах.

Доказательство. Очевидны тождества:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = P_{xyz}(x, y, z) + P_{xy}(x, y) + P_{xz}(x, z) + P_x(x),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = Q_{xyz}(x, y, z) + Q_{xy}(x, y) + Q_{yz}(y, z) + Q_y(y),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = R_{xyz}(x, y, z) + R_{xz}(x, z) + R_{yz}(y, z) + R_z(z),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 P_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 Q_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 R_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Отсюда непосредственно следует (3).

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда с учётом (3) следует (4).

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Отсюда с учётом (3) следует (5).

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R_{yz}}{\partial y \partial z}.$$

Отсюда с учётом (3) следует (6).

Координаты градиента функции (2) можно вычислить следующим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial f}{\partial x} dx + Q_{xyz} + Q_{xy} + Q_{yz} + Q_y + R_{xyz} + R_{xz} + R_{yz} + R_z - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C \right) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Слагаемые в скобках, являющиеся функциями от x , кроме первого, взаимно уничтожаются. Частные производные по x от остальных равны нулю.

Аналогичным образом обстоит дело с частными производными по y и z .

Таким образом, градиент правой части (2) равен (1), следовательно, правая часть (2) представляет собой восстановленную функцию f .

Теорема доказана.

Следствие.

$$f = V_{xyz} + V_{xy} + V_{xz} + V_{yz} + V_x + V_y + V_z + C. \quad (7)$$

Здесь

$$V_x = P_x(x),$$

$$V_y = Q_y(y),$$

$$V_z = R_z(z).$$

Пример 2.

$$\text{grad } f = \left(\frac{z}{y} + \sin y + \frac{z}{x} + 2x \right) \mathbf{i} + \left(x \cos y - \frac{xz}{y^2} + 2yz^3 + 3y^2 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{x}{y} + \ln x + 3y^2 z^2 - e^z \right) \mathbf{k}.$$

Искомая функция

$$f = \left(\frac{xz}{y} + x \sin y + z \ln x + x^2 \right) + \left(\frac{xz}{y} + x \sin y + y^2 z^3 + y^3 \right) + \left(\frac{xz}{y} + z \ln x + y^2 z^3 - e^z \right) - 2 \frac{xz}{y} - x \sin y - z \ln x - y^2 z^3 + C = \frac{xz}{y} + x \sin y + z \ln x + y^2 z^3 + x^2 + y^3 - e^z + C.$$

Здесь

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz} = \frac{xz}{y},$$

$$P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy} = x \sin y,$$

$$P_{xz} = R_{xz} = V_{xz} = z \ln x,$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz} = y^2 z^3,$$

$$P_x = V_x = x^2,$$

$$Q_y = V_y = y^3,$$

$$R_z = V_z = e^z.$$

Вычисление по формуле (7) является ещё более компактным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов И. П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия // Вестник Челябинского государственного

университета. Физика. – 2009. – Выпуск 5. – №24(162). – С. 34–39.

2. Попов И. П. Построение абстрактной модели силового поля типа электромагнитного. Часть 1 // «Наука. Инновации. Технологии» Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. – 2015. – №2. – С. 41–54.

3. Попов И. П. О мерах механического движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3(26). – С. 13–15.

4. Попов И. П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – №1(15). – С. 51, 52.

5. Попов И. П. Два подхода классиков электромагнетизма к взаимодействию проводников с токами // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2015. – Вып. 7. – №1(35). – С. 55, 56.

6. Попов И. П. О некоторых операциях над векторами // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – №5 (24). – С. 55–61.

7. Попов И. П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. – 2014. – Вып. 5. – С. 159–172.

8. Попов И. П. Разновидности оператора набла // Вестник Амурского государственного университета. Естественные и экономические науки. – 2015. – Выпуск 71. – С. 20–32.

9. Попов И.П. Элементы поверхностного векторного анализа // Зауральский научный вестник. – 2015. – №1(7). – С. 77–84.

10. Богданов Ю. С. Лекции по математическому анализу. – Ч. 2. – Мн. : Изд-во БГУ, 1978.

11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2. – М. : Наука, 1876.

•••••

Попов Игорь Павлович, старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета.

Поступила 29.03.2016 г.

УДК 621.43.019.25

Д. В. МУХИН, Д. Г. ВОЛЬСКОВ

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СРОКА СЛУЖБЫ МОТОРНЫХ МАСЕЛ

На основе анализа влияния асфальтенов на эксплуатационные свойства моторных масел предложена методика прогнозирования срока их службы.

Ключевые слова: асфальтен, анализ, математика, моторное масло, методика прогнозирования, срок службы

В процессе применения масла любого функционального назначения ухудшают свои эксплуатационные свойства (стареют), что, по истечению определённого срока, приводит к необходимости смены масла и утилизации отработанных продуктов.

В условиях роста цен на смазочные масла особенно актуальными являются вопросы экономного и рационального их применения, прежде всего за счёт возможности увеличения срока их смены в технике с целью повышения продолжительности использования масел по прямому функциональному назначению. Поскольку чрезмерная продолжительность использования работы масла в узле трения снижает его

© Мухин Д. В., Вольсков Д. Г., 2016