УДК 517.5

ОПИСАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $H^{\vec p}(\vec w)$ В ПРОСТРАНСТВО $l_A^{\vec p}$ [1]

О.В. Ярославцева

В работе описываются мультипликаторы вида $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$ из пространства $H^{\vec p}(\vec w)$ в пространство $l_A^{\vec p}$.

Ключевые слова: *голоморфные функции, единичный полидиск, правильно меняющиеся функции на* $(0,1]$*, пространство* $H^{\vec p}(\vec w)$*, пространство* $l_A^{\vec p}$*, мультипликаторы.*

Пусть $U^n=\{z=(z_1,\dots,z_n):|z_j|<1,\ j=\overline{1,n}\}$ - единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n, $\vec p=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec w(t)=(w_1(t),\dots,w_n(t))$, где $0<p_j<+\infty$, $w_j(t)$ - положительные правильно меняющиеся функции на $(0,1]$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через $L^{\vec p}(\vec w)$ пространство измеримых в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{\vec p}(\vec w)}=\left(\int_U w_n(1-|z_n|)\left(\int_U w_{n-1}(1-|z_{n-1}|)\dots\left(\int_U |f(z_1,\dots,z_n)|^{p_1}\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times w_1(1-|z_1|)dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\dots dm_2(z_{n-1})\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}<+\infty,$$

где dm_2 - 2-мерная мера Лебега на U. Подпространство $L^{\vec p}(\vec w)$, состоящее из голоморфных в U^n функций, обозначим через $H^{\vec p}(\vec w)$.

Напомним, что классом функций, правильно изменяющихся на промежутке $(0,1]$, называется множество измеримых функций w, удовлетворяющих следующим свойствам:
а) $w(t)>0,\ t\in(0,1]$;
б) существуют положительные числа $q_w, m_w\in(0,1)$, $M_w>0$ такие, что

$$m_w\le\frac{w(lr)}{w(r)}\le M_w,\ r\in(0,1],\ l\in[q_w,1].$$

Множество таких функций обозначим через S. Можно установить, что $w\in S$ тогда и только тогда, когда существуют ограниченные измеримые функции h,e на $(0,1]$ такие, что

$$w(x)=\exp\left\{h(x)+\int_x^1\frac{e(u)}{u}du\right\},\ x\in(0,1],$$

при этом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ:№09-01-97517

$$\frac{\ln m_w}{\ln\frac{1}{q_w}} \le e(u) \le \frac{\ln M_w}{\ln\frac{1}{q_w}}, \quad u \in (0,1].$$

Будем предполагать, что $h(x) \equiv 0$, $a_w = \frac{\ln m_w}{\ln\frac{1}{q_w}}$, $b_w = \frac{\ln M_w}{\ln\frac{1}{q_w}}$, $a_w > -1$, $0 < b_w < 1$.

Через $l_A^{\vec{p}}$ обозначим пространство голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{l_A^{\vec{p}}} = \left(\sum_{k_n=0}^{+\infty} \dots \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \left|b_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2} \dots\right)^{1/p_n} < +\infty,$$

где $g(z_1,\dots,z_n) = \sum\limits_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$.

Определение. Последовательность $\{l_{k_1,\dots,k_n}\}$ называется мультипликатором из пространства $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в пространство $l_A^{\vec{p}}$, если для любой функции $g \in H^{\vec{p}}(\vec{w})$ такой, что

$$g(z_1,\dots,z_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},$$

сходится ряд

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty} \dots \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \left|l_{k_1,\dots,k_n} b_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2} \dots\right)^{1/p_n} < +\infty.$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма А. *(см. [1]). Пусть $w_j \in S$, $j = \overline{1,n}$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\int_{U^n} \frac{w(1-|z|)}{|1-\bar{z}z|^{a+2}} dm_{2n}(z) \le C(a)\frac{w(1-|z|)}{(1-|z|)^a},$$

$z \in U^n$, $\vec{a} = (a_1,\dots,a_n)$, $a_j > a_{w_j}$, $j = \overline{1,n}$,

Лемма 1. *Пусть $f \in H^{\vec{p}}(\vec{w})$, $\vec{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\vec{w} = (w_1,\dots,w_n)$, $0 < p_j \le 1$, $w_j \in S$, $j = \overline{1,n}$.*

Тогда если $f(z_1,\dots,z_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$, *то*

$$\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right| \le c\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}} \|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})},$$

где

$$\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(k_j^*)^{2/p_j-1}}{\left[w_j\left(\frac{1}{k_j^*}\right)\right]^{1/p_j}}, \quad k_j^* = \begin{cases} k_j, k_j \ne 0; \\ 1, \quad k_j = 0; \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $0<p_j\le 1$, $a_j<p_j$, $a_j>-1$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod\limits_{j=1}^{n} l_{k_j}$. *Тогда из условий*

$$1)\ \sum_{k_j=1}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}=1,\quad j=\overline{1,n}, \tag{1}$$

$$2)\ \sum_{k_n=0}^{m_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2\le$$

$$\le C_1\left((m_1^*)^{(p_1-a_1)p_n/p_1}(m_2^*)^{(p_2-a_2)p_n/p_2}\dots(m_n^*)^{(p_n-a_n)}\right)$$

следует, что

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}\le C_2(m_j^*)^{p_j-a_j-2},\quad j=\overline{1,n}.$$

Здесь $k_j^*=\begin{cases}k_j, k_j\ne 0;\\ 1,\quad k_j=0;\end{cases}$ $m_j^*=\begin{cases}m_j, m_j\ne 0;\\ 1,\quad m_j=0;\end{cases}$ $j=\overline{1,n}$.

Лемма 3. *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{w}=(w_1,\dots,w_n)$, $0<p_j\le 1$, $w_j\in S$, $0<b_{w_j}<1$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod\limits_{j=1}^{n} l_{k_j}$. *Тогда при условии (1) из того,что*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2\le$$

$$\le C_1\left((m_1^*)^{p_n}(m_2^*)^{p_n}\dots(m_n^*)^{p_n}\left[w_1\left(\frac{1}{m_1^*}\right)\right]^{p_n/p_1}\left[w_2\left(\frac{1}{m_2^*}\right)\right]^{p_n/p_2}\dots w_n\left(\frac{1}{m_n^*}\right)\right)$$

следует, что

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}\le C_2(m_j^*)^{p_j-2}w_j\left(\frac{1}{m_j^*}\right),\quad j=\overline{1,n}.$$

Лемма 4. *Пусть* $f\in H^p(a)$, $0<p\le 1$, $g=a+2-p$, $a>-1$. *Тогда*

$$\int_0^1(1-r)^{g-1}\left(\int_{-p}^{p}\left|f\left(re^{ij}\right)\right|dj\right)^p rdr<c\int_0^1\int_{-p}^{p}(1-r)^a\left|f\left(re^{ij}\right)\right|^p rdrdj.$$

Лемма 5. *Пусть* $f\in H^{\vec{p}}(\vec{w})$, $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{w}=(w_1,\dots,w_n)$, $0<p_j\le 1$, $w_j\in S$, $a_{w_j}>-1$, $g_j=2-p_j$, $j=\overline{1,n}$. *Тогда*

$$\int_0^1 w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\dots\left(\int_0^1 w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\int_0^1 w_1(1-r_1)(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\times M_1^{p_1}(r_1,r_2,\dots,r_n,f)\,r_1dr_1\Bigg)^{p_2/p_1} r_2dr_2\Bigg)^{p_3/p_2}\dots r_ndr_n \le c\|f\|^{p_n}_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})},$$

где $M_1(r_1,r_2,\dots,r_n,f)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(r_1e^{i\varphi_1},r_2e^{i\varphi_2},\dots,r_ne^{i\varphi_n}\right)\right|d\varphi_1d\varphi_2\dots d\varphi_n$.

Основной результат статьи содержится в теоремах 1-3. Напомним, что

$$l^\infty=\left\{\left(a_{k_1,\dots,k_n}\right)_0^{+\infty};\ \sup_{k_1,\dots,k_n}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|\le M\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, $0<p_j\le 1$, $\omega_j\in S$, $j=\overline{1,n}$. $\left\{\lambda_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *в* l^∞ *тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_{k_1,\dots,k_n}=O\left((k_1^*)^{1-\frac{2}{p_1}}\dots(k_n^*)^{1-\frac{2}{p_n}}\left[\omega_1\left(1/k_1^*\right)\right]^{1/p_1}\dots\left[\omega_n\left(1/k_n^*\right)\right]^{1/p_n}\right). \tag{2}$$

Доказательство.

Пусть справедлива оценка (2). Докажем, что $\left\{\lambda_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в l^∞.

Пусть $f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum\limits_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}a_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$. Тогда по лемме 1 имеем:

$$\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|\le c\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[\omega\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}}\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})},$$

где

$$\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[\omega\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{(k_j^*)^{2/p_j-1}}{\left[\omega_j\left(\frac{1}{k_j^*}\right)\right]^{1/p_j}}.$$

Следовательно,

$$\left|\lambda_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|\le \tilde{c}.$$

Тогда $\left\{\lambda_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right\}\in l^\infty$, то есть $\left\{\lambda_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в l^∞. Пусть теперь $\left\{\lambda_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в l^∞. Тогда по теореме о замкнутом графике

$$\sup_{k_1,\dots,k_n}\left|\lambda_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|\le const\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})}$$

Положим $f(z_1,\dots,z_n)=g(r_1z_1,\dots,r_nz_n)$, $r_j<1$, $g(z_1,\dots,z_n)=\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-z_j)^{b_j}}$, $b_j>\frac{\alpha_{\omega_j}+2}{p_j}$,

$j=\overline{1,n}$. Тогда

$$g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}b_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\dots,k_n}\sim B(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Последнее утверждение означает, что $\exists c_1,c_2>0$ такие, что

$$c_1(k_1^*)^{b_1-1}...(k_n^*)^{b_n-1} \le b_{k_1,...,k_n} \le c_2(k_1^*)^{b_1-1}...(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Используя оценку леммы А, получим:

$$\|f\|_{H^{\vec p}(\vec w)} = \left(\int_U w_n(1-|z_n|)... \left(\int_U w_2(1-|z_2|) \left(\int_U \prod_{j=1}^n \frac{1}{|1-r_j\bar z_j|^{b_j p_1}} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times w_1(1-|z_1|)\, dm_2(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dm_2(z_2) \right)^{\frac{p_3}{p_2}} ... dm_2(z_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \left(\int_U \frac{w_n(1-|z_n|)}{|1-r_n\bar z_n|^{b_n p_n}} dm_2(z_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} ... \left(\int_U \frac{w_2(1-|z_2|)}{|1-r_2\bar z_2|^{b_2 p_2}} dm_2(z_2) \right)^{\frac{1}{p_2}} \times$$

$$\times \left(\int_U \frac{w_1(1-|z_1|)}{|1-r_1\bar z_1|^{b_1 p_1}} dm_2(z_1) \right)^{\frac{1}{p_1}} \le const \frac{[w_n(1-r_n)]^{1/p_n}}{(1-r_n)^{(b_n p_n-2)/p_n}} ... \frac{[w_2(1-r_2)]^{1/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2 p_2-2)/p_2}} \times$$

$$\times \frac{[w_1(1-r_1)]^{1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1 p_1-2)/p_1}}.$$

Следовательно,

$$|l_{k_1,...,k_n}|\, (k_1^*)^{b_1-1}...(k_n^*)^{b_n-1}\, r_1^{k_1}...r_n^{k_n} \le const \frac{[w_n(1-r_n)]^{1/p_n}}{(1-r_n)^{(b_n p_n-2)/p_n}} \times$$

$$\times ... \frac{[w_2(1-r_2)]^{1/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2 p_2-2)/p_2}} \frac{[w_1(1-r_1)]^{1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1 p_1-2)/p_1}}.$$

Положим $r_j = 1 - \frac{1}{k_j^*}$, если $k_j^* \ge 2$, и $r_j = 1 - \frac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^* = 1$, $j = \overline{1,n}$. Тогда

$$|l_{k_1,...,k_n}|\, (k_1^*)^{b_1-1}...(k_n^*)^{b_n-1} \le const \frac{\left[w_n\left(\frac{1}{k_n^*}\right)\right]^{1/p_n}}{\left(\frac{1}{k_n^*}\right)^{(b_n p_n-2)/p_n}} ... \frac{\left[w_2\left(\frac{1}{k_2^*}\right)\right]^{1/p_2}}{\left(\frac{1}{k_2^*}\right)^{(b_2 p_2-2)/p_2}} \times$$

$$\times \frac{\left[w_1\left(\frac{1}{k_1^*}\right)\right]^{1/p_1}}{\left(\frac{1}{k_1^*}\right)^{(b_1 p_1-2)/p_1}}.$$

Таким образом,

$$|l_{k_1,...,k_n}| \le const (k_1^*)^{1-\frac{2}{p_1}} ... (k_n^*)^{1-\frac{2}{p_n}} \left[w_1\left(1/k_1^*\right)\right]^{1/p_1} ... \left[w_n\left(1/k_n^*\right)\right]^{1/p_n}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $0<p_j\le 1$, $a_j<p_j$, $a_j>-1$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^{\vec{p}}(\vec{a})$ *в* $l_A^{\vec{p}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2=$$

$$=O\left((m_1^*)^{(p_1-a_1)p_n/p_1}(m_2^*)^{(p_2-a_2)p_n/p_2}\dots(m_n^*)^{(p_n-a_n)}\right). \qquad (3)$$

Доказательство.

Пусть $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{a})$ в $l_A^{\vec{p}}$. Тогда

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{1}{p_n}}\le const\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{a})},$$

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}a_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}.$$

Пусть $f(z_1,\dots,z_n)=g(r_1z_1,\dots,r_nz_n)$, $r_j<1$, $g(z_1,\dots,z_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1-z_j\right)^{b_j}}$, $b_j>\frac{a_j+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда

$$g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}b_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\dots,k_n}\sim B(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Для оценки $\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{a})}$ используем оценку леммы А:

$$\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{a})}=\left(\int_U(1-|z_n|)^{a_n}\dots\left(\int_U(1-|z_2|)^{a_2}\left(\int_U\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1-r_j\bar{z}_j\right|^{b_jp_1}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(1-|z_1|)^{a_1}dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\left(\int_U\frac{(1-|z_n|)^{a_n}}{\left|1-r_n\bar{z}_n\right|^{b_np_n}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}\dots\left(\int_U\frac{(1-|z_2|)^{a_2}}{\left|1-r_2\bar{z}_2\right|^{b_2p_2}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{1}{p_2}}\times$$

$$\times\left(\int_U\frac{(1-|z_1|)^{a_1}}{\left|1-r_1\bar{z}_1\right|^{b_1p_1}}dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{p_1}}\le const\ \frac{(1-r_n)^{a_n/p_n}}{(1-r_n)^{(b_np_n-2)/p_n}}\dots\frac{(1-r_2)^{a_2/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2p_2-2)/p_2}}\times$$

$$\times\frac{(1-r_1)^{a_1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1p_1-2)/p_1}}=const\ (1-r_1)^{a_1/p_1+2/p_1-b_1}(1-r_2)^{a_2/p_2+2/p_2-b_2}\dots\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n/p_n+2/p_n-b_n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^{(b_1-1)p_1}(k_2^*)^{(b_2-1)p_2}\dots(k_n^*)^{(b_n-1)p_n}r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_2}\dots\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times r_n^{k_np_n}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\ (1-r_1)^{(a_1-b_1p_1+2)\frac{p_n}{p_1}}(1-r_2)^{(a_2-b_2p_2+2)\frac{p_n}{p_2}}\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n-b_np_n+2},$$

то есть

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}r_n^{k_np_n}(k_n^*)^{(b_n-1)p_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}r_2^{k_2p_2}(k_2^*)^{(b_2-1)p_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^{(b_1-1)p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times r_1^{k_1p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\ (1-r_1)^{(a_1-b_1p_1+2)\frac{p_n}{p_1}}(1-r_2)^{(a_2-b_2p_2+2)\frac{p_n}{p_2}}\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n-b_np_n+2}.$$

Пусть $b_j=1+\dfrac{2}{p_j}>\dfrac{a_j+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$r_1^{N_1p_n}r_2^{N_2p_n}\dots r_n^{N_np_n}\sum_{k_n=0}^{N_n}(k_n^*)^2\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}(k_2^*)^2\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le$$

$$\le const\,(1-r_1)^{(a_1-p_1)\frac{p_n}{p_1}}(1-r_2)^{(a_2-p_2)\frac{p_n}{p_2}}\dots(1-r_n)^{a_n-p_n}.$$

Положим $r_j=1-\dfrac{1}{k_j^*}$, если $k_j^*\ge 2$, и $r_j=1-\dfrac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^*=1$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2\le$$

$$\le const(N_1^*)^{(p_1-a_1)\frac{p_n}{p_1}}(N_2^*)^{(p_2-a_2)\frac{p_n}{p_2}}\dots(N_n^*)^{p_n-a_n}.$$

Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь имеет место оценка (3). Докажем, что $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec a)$ в $l_A^{\vec p}$. Пусть $f\in H^{\vec p}(\vec a)$. Сначала установим сходимость ряда:

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}<+\infty.$$

По лемме 2 из (3) имеем:

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}\le c(m_j^*)^{p_j-a_j-2},\quad j=\overline{1,n}.$$

Так как $0<p_j\le 1$, $a_j<p_j$, $a_j>-1$, то $p_j-a_j-2<0$, $j=\overline{1,n}$. Положим $s_0=0$,

$s_{k_j}=1-\left\{\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}\right\}^{\frac{1}{g_j}}$, $k_j=1,2,3,\ldots$, $l_{k_j}\ge 0$ и $\sum_{k_j=0}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}=1$, $g_j=a_j-p_j+2$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда $s_{k_j}\to 1$ при $k_j\to+\infty$, $j=\overline{1,n}$. По лемме 4

$$\int_0^1(1-r_n)^{g_n-1}\ldots\left(\int_0^1(1-r_2)^{g_2-1}\left(\int_0^1(1-r_1)^{g_1-1}M_1^{p_1}(r_1,r_2,\ldots,r_n,f)\,r_1dr_1\right)^{p_2/p_1}r_2dr_2\right)^{p_3/p_2}\times$$

$$\times\ldots r_ndr_n<+\infty.$$

Так как $M_1(r_1,r_2,\ldots,r_n,f)\ge r_1^{k_1}r_2^{k_2}\ldots r_n^{k_n}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|$, то

$$+\infty>\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}(1-r_n)^{g_n-1}\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times M_1^{p_1}(r_1,r_2,\ldots,r_n,f)\,dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\ldots dr_n\ge\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}(1-r_n)^{g_n-1}\ldots\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\,r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}\ldots r_n^{k_np_1}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\ldots dr_n=\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}r_n^{k_np_n}(1-r_n)^{g_n-1}dr_n\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}r_2^{k_2p_2}(1-r_2)^{g_2-1}dr_2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}r_1^{k_1p_1}\,dr_1\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}\ge$$

$$\ge\sum_{k_n=0}^{+\infty}s_{k_n}^{k_np_n}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}(1-r_n)^{g_n-1}dr_n\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}s_{k_2}^{k_2p_2}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}(1-r_2)^{g_2-1}dr_2\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times s_{k_1}^{k_1p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\,dr_1\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}=$$

$$= const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1p_1}\, s_{k_2}^{k_2p_1}\dots s_{k_n}^{k_np_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\times\left\{\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1}\right\}\left\{\left(1-s_{k_2}\right)^{g_2}-\left(1-s_{k_2+1}\right)^{g_2}\right\}^{\frac{p_1}{p_2}}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\dots\times\left\{\left(1-s_{k_n}\right)^{g_n}-\left(1-s_{k_n+1}\right)^{g_n}\right\}^{\frac{p_1}{p_n}}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Так как

$$\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1}=l_{k_1}^{p_1},$$

$$\left\{\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j}-\left(1-s_{k_j+1}\right)^{g_j}\right\}^{\frac{p_1}{p_j}}=l_{k_j}^{p_j\cdot\frac{p_1}{p_j}}=l_{k_j}^{p_1},\quad j=\overline{2,n},$$

то

$$\left\{\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1}\right\}\left\{\left(1-s_{k_2}\right)^{g_2}-\left(1-s_{k_2+1}\right)^{g_2}\right\}^{\frac{p_1}{p_2}}\times$$

$$\times\dots\times\left\{\left(1-s_{k_n}\right)^{g_n}-\left(1-s_{k_n+1}\right)^{g_n}\right\}^{\frac{p_1}{p_n}}=l_{k_1}^{p_1}\,l_{k_2}^{p_1}\dots l_{k_n}^{p_1}=l_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{p_1}.$$

Следовательно,

$$+\infty> const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1p_1}\, s_{k_2}^{k_2p_1}\dots s_{k_n}^{k_np_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Кроме того,

$$\left\{\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}\right\}^{\frac{1}{g_j}}\le const\left(k_j^*\right)^{(p_j-a_j-2)\cdot\frac{1}{a_j+2-p_j}}=const\cdot\frac{1}{k_j^*},\quad j=\overline{1,n}.$$

Но тогда

$$s_{k_1}^{k_1p_1}=\left(1-\left\{\sum_{t_1=k_1}^{+\infty}\left|l_{t_1}\right|^{p_1}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\right)^{k_1p_1}\ge\left(1-\frac{c}{k_1^*}\right)^{k_1p_1}\to e^{-cp_1}>0.$$

Аналогично,

$$s_{k_2}^{k_2p_1}\ge\left(1-\frac{c}{k_2^*}\right)^{k_2p_1}\to e^{-cp_1}>0,$$

……………

$$s_{k_n}^{k_n p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_n^*}\right)^{k_n p_1} \to e^{-cp_1} > 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\ldots,k_n}a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} < +\infty,$$

то есть $\left\{l_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec a)$ в $l_A^{\vec p}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть* $\vec p=(p_1,\ldots,p_n)$, $\vec w=(w_1,\ldots,w_n)$, $0<p_j\le 1$, $w_j\in S$, $a_{w_j}<p_j$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\ldots,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. $\left\{l_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^{\vec p}(\vec w)$ *в* $l_A^{\vec p}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\ldots(k_n^*)^2 =$$

$$= O\left((m_1^*)^{p_n}(m_2^*)^{p_n}\ldots(m_n^*)^{p_n}\left[w_1\left(\frac{1}{m_1^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_1}}\left[w_2\left(\frac{1}{m_2^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_2}}\ldots w_n\left(\frac{1}{m_n^*}\right)\right). \qquad (4)$$

Доказательство.

Пусть $\left\{l_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec w)$ в $l_A^{\vec p}$. Тогда по теореме о замкнутом графике

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty}\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\ldots,k_n}a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{\frac{1}{p_n}} \le const\left\|f\right\|_{H^{\vec p}(\vec w)},$$

$$f(z)=f(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}.$$

Пусть $f(z_1,\ldots,z_n)=g(r_1z_1,\ldots,r_nz_n)$, $r_j<1$, $g(z_1,\ldots,z_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1-z_j\right)^{b_j}}$, $b_j>\frac{a_{w_j}+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$g(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\ldots,k_n}\sim B(k_1^*)^{b_1-1}\ldots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Используя оценку леммы А, получим:

$$\left\|f\right\|_{H^{\vec p}(\vec w)} = \left(\int_U w_n\left(1-|z_n|\right)\ldots\left(\int_U w_2\left(1-|z_2|\right)\left(\int_U \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1-r_j\bar z_j\right|^{b_jp_1}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times w_1\left(1-|z_1|\right)dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\ldots dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$=\left(\int_U \frac{w_n(1-|z_n|)}{|1-r_n\bar{z}_n|^{b_n p_n}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}\dots\left(\int_U \frac{w_2(1-|z_2|)}{|1-r_2\bar{z}_2|^{b_2 p_2}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{1}{p_2}}\times$$

$$\times\left(\int_U \frac{w_1(1-|z_1|)}{|1-r_1\bar{z}_1|^{b_1 p_1}}dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{p_1}}\le const\,\frac{[w_n(1-r_n)]^{1/p_n}}{(1-r_n)^{(b_n p_n-2)/p_n}}\dots\frac{[w_2(1-r_2)]^{1/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2 p_2-2)/p_2}}\times$$

$$\times\frac{[w_1(1-r_1)]^{1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1 p_1-2)/p_1}}.$$

Возьмем $b_j=1+\frac{2}{p_j}>\frac{a_{w_j}+2}{p_j},\quad j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})}\le const\frac{[w_n(1-r_n)]^{1/p_n}}{1-r_n}\dots\frac{[w_2(1-r_2)]^{1/p_2}}{1-r_2}\,\frac{[w_1(1-r_1)]^{1/p_1}}{1-r_1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}|l_{k_1,\dots,k_n}|^{p_1}(k_1^*)^{\frac{2}{p_1}p_1}(k_2^*)^{\frac{2}{p_2}p_1}\dots(k_n^*)^{\frac{2}{p_n}p_1}r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}\dots\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times r_n^{k_np_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\,\frac{[w_1(1-r_1)]^{1/p_1}}{1-r_1}\,\frac{[w_2(1-r_2)]^{1/p_2}}{1-r_2}\dots\times$$

$$\times\frac{[w_n(1-r_n)]^{1/p_n}}{1-r_n}.$$

Тем более

$$r_1^{N_1p_n}r_2^{N_2p_n}\dots r_n^{N_np_n}\sum_{k_n=0}^{N_n}(k_n^*)^2\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}(k_2^*)^2\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}|l_{k_1,\dots,k_n}|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le$$

$$\le const\frac{[w_1(1-r_1)]^{p_n/p_1}}{(1-r_1)^{p_n}}\,\frac{[w_2(1-r_2)]^{p_n/p_2}}{(1-r_2)^{p_n}}\dots\frac{w_n(1-r_n)}{(1-r_n)^{p_n}}.$$

Положим $r_j=1-\frac{1}{k_j^*}$, если $k_j^*\ge 2$, и $r_j=1-\frac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^*=1$, $\quad j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}|l_{k_1,\dots,k_n}|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2\le$$

$$\le const(N_1^*)^{p_n}(N_2^*)^{p_n}\dots(N_n^*)^{p_n}\left[w_1\left(\frac{1}{N_1^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_1}}\left[w_2\left(\frac{1}{N_2^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_2}}\dots w_n\left(\frac{1}{N_n^*}\right).$$

Первая часть теоремы доказана. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f\in H^{\vec{p}}(\vec{w})$. Докажем, что

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}<+\infty.$$

По лемме 3 из (4) имеем:

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}\le c(m_j^*)^{p_j-2}w_j\left(\frac{1}{m_j^*}\right),\quad j=\overline{1,n}.$$

Положим $s_0=0$, $s_{k_j}=1-\left\{\frac{\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}}{w_j\left(1-s_{k_j}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_j}}$, $k_j=1,2,3,\dots$, $l_{k_j}\ge 0$ и $\sum_{k_j=0}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}=1$, $g_j=2-p_j$, $j=\overline{1,n}$. Так как $\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j}w_j\left(1-s_{k_j}\right)=\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}$ и $w_j(t)$ не обращается в нуль на $(0,1)$, то при $k_j\to+\infty$ $s_{k_j}\to 1$, $j=\overline{1,n}$. По лемме 5 имеем:

$$\int_0^1 w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\dots\left(\int_0^1 w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\int_0^1 w_1(1-r_1)(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times M_1^{p_1}(r_1,r_2,\dots,r_n,f)r_1dr_1\right)^{p_2/p_1}r_2dr_2\right)^{p_3/p_2}\dots r_ndr_n<+\infty.$$

Так как $M_1\left(r_1,r_2,\dots,r_n,f\right)\ge r_1^{k_1}r_2^{k_2}\dots r_n^{k_n}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|$, то

$$+\infty>\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times w_1(1-r_1)M_1^{p_1}(r_1,r_2,\dots,r_n,f)dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\dots dr_n\ge\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\dots\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}w_1(1-r_1)(1-r_1)^{g_1-1}\;r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}\dots r_n^{k_np_1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\dots dr_n=\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}r_n^{k_np_n}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}dr_n\times$$

$$\times\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}r_2^{k_2p_2}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}dr_2\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}r_1^{k_1p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\times w_1(1-r_1)\,dr_1\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}\dots\Bigg)^{p_n/p_{n-1}} \ge \sum_{k_n=0}^{+\infty} s_{k_n}^{k_n p_n}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}} w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\,dr_n \times$$

$$\times\Bigg(\dots\Bigg(\sum_{k_2=0}^{+\infty} s_{k_2}^{k_2 p_2}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}} w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\,dr_2\Bigg(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1 p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\times$$

$$\times w_1(1-r_1)\,dr_1\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}\dots\Bigg)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Оценим интеграл

$$\int_{s_{k_j}}^{s_{k_j+1}} w_j(1-r_j)(1-r_j)^{g_j-1}\,dr_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} w(1-r)(1-r)^{g-1}\,dr = \int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} w(u)u^{g-1}\,du = \frac{w(u)u^g}{g}\Bigg|_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} +$$

$$+\int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}\frac{u^g}{g}w(u)\frac{e(u)}{u}\,du.$$

Следовательно,

$$g\int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} w(u)u^{g-1}\,du - \int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} u^{g-1}w(u)e(u)\,du = w(u)u^g\Big|_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}.$$

Так как $g=2-p>1$, то $g-a_w>0$ $(a_w<1)$. Таким образом,

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} w(1-r)(1-r)^{g-1}\,dr \ge const\left[w(1-s_k)(1-s_k)^g - w(1-s_{k+1})(1-s_{k+1})^g\right],$$

то есть

$$\int_{s_{k_j}}^{s_{k_j+1}} w_j(1-r_j)(1-r_j)^{g_j-1}\,dr_j \ge const\Big[w_j\left(1-s_{k_j}\right)\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j} -$$

$$-w_j\left(1-s_{k_j+1}\right)\left(1-s_{k_j+1}\right)^{g_j}\Big] = const\, l_{k_j}^{p_j},\quad j=\overline{1,n}.$$

Итак,

$$+\infty > const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\Bigg(\dots\Bigg(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1p_1}\, s_{k_2}^{k_2p_1}\dots s_{k_n}^{k_np_1}\times$$

$$\times\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}\dots\Bigg)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Оценим $s_{k_1}^{k_1p_1}$, $s_{k_2}^{k_2p_1},\dots,$ $s_{k_n}^{k_np_1}$. Для $s_{k_1}^{k_1p_1}$ имеем:

$$1-s_{k_1}=\left\{\frac{\sum_{t_1=k_1}^{+\infty}\left|l_{t_1}\right|^{p_1}}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\le const\left\{\frac{(k_1^*)^{p_1-2}w_1\left(1/k_1^*\right)}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}.$$

Тогда

$$w_1\left(1-s_{k_1}\right)\left(1-s_{k_1}\right)^{2-p_1}\le const\left(\frac{1}{k_1^*}\right)^{2-p_1}w_1\left(\frac{1}{k_1^*}\right).$$

Пусть $\Psi(t)=w_1(t)t^{2-p_1}$. Тогда последнее неравенство равносильно неравенству

$$\Psi\left(1-s_{k_1}\right)\le\Psi\left(\frac{c}{k_1^*}\right). \tag{5}$$

Вычислим $\Psi'(t)$.

$$\Psi'(t)=(2-p_1)w_1(t)t^{1-p_1}-w_1(t)t^{2-p_1}\frac{e(t)}{t}=w_1(t)t^{1-p_1}\left(2-p_1-e(t)\right).$$

Но $e(t)\le b_w$, поэтому

$$\Psi'(t)\ge w_1(t)t^{1-p_1}\left(2-p_1-b_w\right)>w_1(t)t^{1-p_1}\left(1-p_1\right)>0,\text{ если } t>0.$$

Так как функция Ψ монотонно растет, то из оценки (5) следует, что

$$1-s_{k_1}\le\frac{c}{k_1^*}.$$

Аналогично,

$$1-s_{k_2}\le\frac{c}{k_2^*},\dots,\ 1-s_{k_n}\le\frac{c}{k_n^*}.$$

Таким образом,

$$s_{k_1}^{k_1p_1}=\left(1-\left\{\frac{\sum_{t_1=k_1}^{+\infty}\left|l_{t_1}\right|^{p_1}}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\right)^{k_1p_1}\ge\left(1-\frac{c}{k_1^*}\right)^{k_1p_1}\to e^{-cp_1}>0.$$

Аналогично,

$$s_{k_2}^{k_2p_1}\ge\left(1-\frac{c}{k_2^*}\right)^{k_2p_1}\to e^{-cp_1}>0,$$

....

$$s_{k_n}^{k_np_1}\ge\left(1-\frac{c}{k_n^*}\right)^{k_np_1}\to e^{-cp_1}>0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}<+\infty,$$

то есть $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в $l_A^{\vec{p}}$. Теорема доказана.

Сформулируем несколько следствий основных теорем. Пусть $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$, тогда

$$H^p(\vec{w}) = \left\{ f \in H\left(U^n\right) : \int_{U^n} w_1\left(1-|z_1|\right)...w_n\left(1-|z_n|\right)\left|f\left(z_1,...,z_n\right)\right|^p dm_{2n}\left(z_1,...,z_n\right) < +\infty \right\},$$

$$l^p = \left\{ w = \left(w_{k_1,...,k_n}\right) : \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} \left|w_{k_1,...,k_n}\right|^p < +\infty \right\}.$$

Следствие 1. *Пусть* $\vec{w} = (w_1,...,w_n)$, $0 < p \le 1$, $w_j \in S$, $a_{w_j} < p$, $j = \overline{1,n}$, $l_{k_1,...,k_n} = \prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$.

$\left\{l_{k_1,...,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^p(\vec{w})$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n} ... \sum_{k_2=0}^{m_2} \sum_{k_1=0}^{m_1} \left|l_{k_1,...,k_n}\right|^p (k_1^*)^2 (k_2^*)^2 ... (k_n^*)^2 =$$

$$= O\left((m_1^*)^p (m_2^*)^p ... (m_n^*)^p w_1\left(\frac{1}{m_1^*}\right) w_2\left(\frac{1}{m_2^*}\right) ... w_n\left(\frac{1}{m_n^*}\right) \right).$$

Положим для простоты $n = 1$.

Следствие 2. *Пусть* $0 < p \le 1$, $w \in S$, $a_w < p$. $\left\{l_k\right\}$ *- мультипликатор из* $H^p(w)$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=0}^{m} \left|l_k\right|^p (k^*)^2 = O\left((m^*)^p w\left(\frac{1}{m^*}\right) \right).$$

В частном случае, если $w(t) = t^a$, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $0 < p \le 1$, $a < p$, $a > -1$. $\left\{l_k\right\}$ *- мультипликатор из* $H^p(a)$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=0}^{m} \left|l_k\right|^p (k^*)^2 = O\left((m^*)^{p-a} \right).$$

Как следствие теоремы 1 можно получить результат, установленный С.В.Шведенко (см. [2]). Пусть

$$A_a^p = \left\{ f \in H\left(U^n\right) : \int_{U^n} \left(1-|z_1|\right)^{a_1} ... \left(1-|z_n|\right)^{a_n} \left|f\left(z_1,...,z_n\right)\right|^p dm_{2n}\left(z_1,...,z_n\right) < +\infty \right\}.$$

Следствие 4. *Пусть* $0 < p \le 1$, $a_j < p$, $a_j > -1$, $j = \overline{1,n}$. *Если*

$$f\left(z_1,...,z_n\right) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}$$

принадлежит классу A_a^p, *то*

$$\sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} \frac{\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^p}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p} ... \left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}} \le c \left\|f\right\|_{A_a^p}.$$

Доказательство.
Докажем, что

$$l_{k_1,...,k_n} = \frac{1}{\left(k_1+1\right)^{(a_1+3-p)/p} ... \left(k_n+1\right)^{(a_n+3-p)/p}}$$

является мультипликатором из A_a^p в l^p. По следствию 1 это будет верно, если

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{\left(k_1^*\right)^2\ldots\left(k_n^*\right)^2}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p}\ldots\left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}}\le\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{\left(k_1+1\right)^2\ldots\left(k_n+1\right)^2}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p}\ldots\left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}}=$$

$$=\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^{a_1+1-p}\ldots\left(k_n+1\right)^{a_n+1-p}}\le cm_1^{\,p-a_1}\ldots m_n^{\,p-a_n}.$$

Так как $p+1-a_j>p-a_j>0,\quad j=\overline{1,n}$, то условие

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^2\ldots\left(k_n+1\right)^2}\left(k_1+1\right)^{p+1-a_1}\ldots\left(k_n+1\right)^{p+1-a_n}\le cm_1^{\,p-a_1}\ldots m_n^{\,p-a_n}$$

эквивалентно условию

$$\sum_{k_n=m_n}^{+\infty}\ldots\sum_{k_1=m_1}^{+\infty}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^2\ldots\left(k_n+1\right)^2}\le\tilde{c}m_1^{\,p-a_1-(p+1-a_1)}\ldots m_n^{\,p-a_n-(p+1-a_n)}=\frac{\tilde{c}}{m_1\ldots m_n},$$

которое, очевидно, выполняется. Утверждение доказано.

Из теоремы 3 следует, что если вместо a_j+3-p брать $b_j<a_j+3-p,\quad j=\overline{1,n}$, то утверждение будет не верно.

The paper describes the multipliers of the form $l_{k_1,\ldots,k_n}=\prod_{j=1}^{n}l_{k_j}$ of the space $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ in space $l_A^{\vec{p}}$.

The key words: *holomorphic function, the unit polydisc, regularly varying functions in* $(0,1]$, *space* $H^{\vec{p}}(\vec{w})$, *space* $l_A^{\vec{p}}$, *multipliers.*

Список литературы

1.Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций//Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 2. С.197-215.

1.Шведенко С.В. О коэффициентах Тейлора функций из пространств Бергмана в поликруге//Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С.325-328.

2.Duren P.L., Theory of H^p spaces, New York and London, Acad. press, 1970.

3.Duren P.L., Shields A.L., Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces//Pacif. Yourn. Math. 1970. V. 32. P.69-78.

4.Duren P.L., Shields A.L., Properties of H^p ($0<p<1$) and its containing Banach spaces//Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P.255-262.

5.Oberlin D.M., Two multiplier theorems for $H^1\left(U^2\right)$//Proc. Edin. Math. Soc. 1977. V. 22. № 1. P.43-47.

Об авторе

О. В. Ярославцева – канд. доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.