УДК: 517.984.5

MSC2010: 35P05

ОПЕРАТОР РОТОР В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{L}_2(G)$

© Р. С. Сакс

ИМВЦ УНЦ РАН, ул.Чернышевского 112, Уфа 450077

e-mail: *romen-saks@yandex.ru*

The curl operator in the $\mathbf{L}_2(G)$ space.

Saks R. S.

Abstract.

Author studies properties of the curl and gradient of divergence operators in the $\mathbf{L}_2(G)$ space, spectral decompositions, and boundary value problems for any bounded domain G with smooth boundary Γ.

It turns out that the space $\mathbf{L}_2(G)$ has orthogonal subspaces $\mathbf{V}^0(G)$ and $\mathscr{A}_\gamma(G)$ such that the curl and gradient of divergence operators admit self-adjoint extensions.

Therefor, each of these operators has a complete system of eigenfunctions corresponding to non zero eigenvalues.

These results supplement Weil's well known theorem on a decomposition of $\mathbf{L}_2(G)$ on orthogonal subspaces $\mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{V}^0(G)$ and $\mathscr{B}_H(G)$ of finite dimension. It show that the space $\mathbf{L}_2(G)$ has a bases consisting of eigenfunctions of the curl and gradient of divergence operators.

We investigate also the solvability of the boundary value problem $\mathbf{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in G, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = g$, for $\lambda \neq 0$ and (by Fourier method) in a ball $G = B$ for all λ.

Key words: the curl and gradient of divergence operators, $\mathbf{L}_2(G)$ space, spectral decompositions, boundary value problem, the bounded domain G, smooth boundary Γ.

Введение

Автор изучает операторы ротор и градиент дивергенции в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$, их спектральные разложения и краевые задачи для них в произвольной ограниченной области G с гладкой границей Γ. Оказывается, что в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ имеются ортогональные подпространства $\mathbf{V}^0(G)$ и $\mathscr{A}_\gamma(G)$, в которых операторы ротор и градиент дивергенции имеют самосопряженные расширения,

$$\mathscr{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G) : \mathbf{n}\cdot\nabla h|_\Gamma = 0\}, \quad \mathbf{V}^0(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0\}.$$

Это означает, что существует оператор $S : \mathbf{V}^0(G) \longrightarrow \mathbf{V}^0(G)$ с областью определения $\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \mathbf{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}$, который совпадает с $\mathbf{rot}$ на подпространстве $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ и является самосопряженным.

Аналогично, существует самосопряженный оператор $N_d : \mathscr{A}_\gamma(G) \longrightarrow \mathscr{A}_\gamma(G)$, совпадающий с ∇div на подпространстве $\mathscr{A}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{A}_\gamma(G) : \nabla div\mathbf{u} \in \mathbf{A}_\gamma(G)\}$.

Следовательно, каждый из этих операторов имеет полную систему собственных функций, отвечающих ненулевым собственным значениям:

$$\mathrm{curl}\mathbf{u}_j^\pm = \pm\lambda_j \mathbf{u}_j^\pm, \quad \lambda_j \in \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \quad \nabla\mathrm{div}\mathbf{q}_l = \mu_l \mathbf{q}_l, \quad \mu_l \in M \subset \mathbb{R}_+.$$

Вектор-функции $\mathbf{a}(x) \in \mathscr{A}_\gamma(G)$ и $\mathbf{b}(x) \in \mathbf{V}^0(G)$. имеют спектральные разложения

$$\mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_l \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_l)\mathbf{q}_l(x), \quad \|\mathbf{q}_l\| = 1,$$

$$\mathbf{b}(x) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(x) + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(x)], \quad \|\mathbf{u}_j^\pm\| = 1.$$

Эти результаты служат дополнением к известной Теореме Г. Вейля [7] о разложении $\mathbf{L}_2(G)$ на ортогональные подпространства $\mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{V}^0(G)$ и $\mathscr{B}_H(G)$, где

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{rot}\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\} = Ker(\mathbf{rot}) \cap \mathbf{Ker}(\nabla\mathbf{div}).$$

Любой вектор $\mathbf{f}(x)$ из $\mathbf{L}_2(G)$ может быть представлен в виде суммы трех векторов $\mathbf{a}(x) \in \mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{b}(x) \in \mathbf{V}^0(G)$ и $\mathbf{c}(x) \in \mathscr{B}_H$: $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}(x) + \mathbf{b}(x) + \mathbf{c}(x)$.

Они показывают, что пространство $\mathbf{L}_2(G)$ имеет базис, состоящий из собственных функций ротора и градиента дивергенции.

Отметим, что $\mathscr{B}_H$ – конечномерное подпространство, его размерность -это род $\rho(\Gamma)$ границы Γ, $\rho(S) = 0$ для сферы и $\rho(\tau) = 1$ для тора τ.

В математической физике особо значимы области: тороидальная (токамак) и шар. В шаре B радиуса R собственные вектор-функции $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора (отвечающие собственным значениям $\pm\rho_{n,m}/R$) и собственные функции $\mathbf{q}_\kappa$ оператора градиент дивергенции (отвечающие собственным значениям $(\alpha_{n,m}/R)^2$) выражаются явными формулами [18]. Числа $\pm\rho_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ - нули функций ψ_n и их производных ψ_n': $\psi_n(\rho_{m,n}) = 0, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0$, где

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad \kappa = (n, m, k), \quad n \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |k| \leq n.$$

Эти формулы приведены в работе автора [18]. Профессор Г.Г.Исламов сообщил мне, что группа физиков использовала некоторые из них в новой теории протона.

Найдено необходимое и достаточное условия на функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$, при котором ее ряд Фурье сходится в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$, оно состоит в принадлежности $\mathbf{u}$ подпространству $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B) \subset \mathbf{V}^0(B)$ (см. п.2.8 и [1, 5, 19, 20]). Аналогично для $\mathbf{v} \in \mathscr{A}_\gamma(B)$.

Исследована разрешимость в подпространствах $\mathbf{L}_2(G)$ краевой задачи для системы $\mathbf{rot u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ при $\lambda \neq 0$ в G с граничным условием $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = g$.

Методом Фурье *при любых* λ в шаре B исследована разрешимость краевой задачи: $\mathbf{rot u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0$.

В этой статье мы изучаем оператор ротор. Оператор градиент дивергенции будет рассмотрен в следующей работе автора. Краткое содержание этих работ опубликовано в ДАН [19, 20].

1. Ротор в ограниченной области

1.1. Спектральная задача. Пусть G - ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к Γ. В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

З а д а ч а 1. *Найти собственные значения* λ *и собственные вектор-функции* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{L}_2(G)$ *оператора ротор такие, что*

$$\mathbf{rot\,u} = \lambda\mathbf{u} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ *- скалярное произведение векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{n}$.

К области определения $\mathscr{M}_{\mathscr{R}}$ оператора $\mathscr{R}$ задачи 1 отнесем все вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ класса $\mathscr{C}^2(G)\cap\mathscr{C}(\overline{G})$, удовлетворяющие граничному условию и условию $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$. Пространство основных вектор-функций $\mathscr{D}(G)$ содержится в $\mathscr{M}_{\mathscr{R}}$ и плотно в $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

1.2. О приложениях. Собственные функции задачи 1 имеют приложения: в гидродинамике, они называются полями Бельтрами [2], в небесной механике и в физике плазмы они называются бессиловыми полями (см. С. Чандрасекхар [9] и Д. Тэйлор [11], В.Козлов [4], а также [14]–[18]).

1.3. Краевая задача. *Даны* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$*, найти вектор-функцию* $\mathbf{u}$*, такую что*

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in G, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = g. \tag{2}$$

Эта задача не эллиптична [12]. Оператор rot $+\lambda$I первого порядка не является эллиптическим, ранг его символической матрицы $\mathrm{rot}(i\xi)$ равен двум при всех $\xi\in\mathscr{R}^3\backslash 0$ и меньше трех. На многообразии без края при $\lambda\neq 0$ он принадлежит классу Вайнберга и Грушина [10].

Оператор rot имеет левый и правый аннуляторы div и ∇:
$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ и $\mathrm{rot}\nabla h = 0$. Поэтому

1) на подпространстве $\mathscr{A} = \{\mathbf{u} = \nabla h : \quad h \in H^1(G)\}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператор $rot\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ совпадает с алгебраическим оператором $\lambda\nabla h$, который отображает $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}$ при $\lambda \neq 0$.

2) В общем случае из системы уравнений (2) при $\lambda \neq 0$ вытекает, что $\lambda \mathrm{div}\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\mathbf{f}$. Следовательно, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является решением системы:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\mathbf{f}. \tag{3}$$

Эта система с краевым условием (2) принадлежит классу переопределенных эллиптических краевых задач, В.А.Солонников [6], то-есть

1) Расширенная система (3) эллиптична,

2) краевое условие в (2) "накрывает" оператор системы (3).

Первое условие сводится к тому, что однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{rot}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \mathrm{div}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \forall\xi \neq 0 \tag{4}$$

с параметром $\xi \in T'(G)$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{w} = 0$.

Второе условие означает, что однородная система линейных дифференциальных уравнений:

$$\mathrm{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{div}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad \forall\tau \neq 0, \tag{5}$$

на полуоси $z \geq 0$ с краевым условием: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{z=0} = 0$ и убыванием, $\mathbf{v}(y, \tau; z) \to 0$ при $z \to +\infty$, имеет только тривиальное решение.

Здесь τ и $\mathbf{n}$ касательный и нормалльный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\mathbf{n}| = 1$. Доказательство этих утверждений не сложно, учитывая соотношение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{v} + \nabla \mathrm{div}\mathbf{v}. \tag{6}$$

Действительно, из уравнений (4) вытекает уравнение $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$, которое распадается на три скалярных уравнения $|\xi|^2 w_j = 0$, где $|\xi| \neq 0$. Значит, $\mathbf{w} = 0$.
Из уравнений (5) получаем уравнение $(-|\tau|^2 + (d/dz)^2)\mathbf{v} = 0$ с параметром $|\tau| > 0$. Его убывающее решение имеет вид: $\mathbf{v} = \mathbf{w}e^{-|\tau|z}$. Оно удовлетворяет уравнениям (5), если вектор-функция $\mathbf{w}$ есть решение линейных алгебраических уравнений:

$$\omega \times \mathbf{w} = 0, \quad \omega' \cdot \mathbf{w} = 0,$$

где $\omega \equiv i\tau - |\tau|\mathbf{n}$ –вектор-столбец, а ω' – вектор-строка.

Легко убедиться, что векторное и скалярное произведения ω на ω равны нулю: $\omega \times \omega = 0, \;\; \omega' \cdot \omega = 0$. Ранг матрицы $\mathrm{rot}(i\xi)$ равен двум при $\xi \neq 0$, поэтому $\mathbf{w} = c\,\omega$, где c - постоянная, и других решений нет.

Граничное условие приводит нас к уравнению: $|\tau|c = 0$ при $|\tau| > 0$. Следовательно $c = 0$ и $\mathbf{v} = 0$.

Итак, краевая задача (2), (3) является эллиптической.

Замечание. Это доказательство не использует топологию области G. Оно справедливо как для тороидальной области $\mathscr{T}$ так и для шара B.

Мы скажем, что при $\lambda \neq 0$ задача (2) является обобщенно эллиптической.

1.4. **Оператор задачи** (2) **в пространствах Соболева.** Пусть вектор-функция $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $\mathbf{H^{s+1}}(G)$, то-есть каждая ее компонента $u_j \in H^{s+1}(G)$. Тогда компоненты rot$\mathbf{u}$ и div$\mathbf{u}$ принадлежат $H^s(G)$, а вектор-функция $\mathbf{f} := \mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{E^s}(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G) : \mathrm{div}\,\mathbf{f} \in H^s(G), \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}.\}$$

Далее $g := \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству $H^{s+1/2}(\Gamma)$.
Следовательно, при $\lambda \neq 0$ задаче соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{A}\mathbf{u} \equiv \begin{matrix} \mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{u} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma \end{matrix} : \mathbf{H^{s+1}(G)} \to \begin{matrix} \mathbf{E^s(G)} \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{matrix}. \tag{7}$$

Согласно теории эллиптических краевых задач в ограниченной области G с гладкой границей $\Gamma \in \mathscr{C}^{s+1}$, обобщенно эллиптический оператор (7) имеет левый параметрикс: то-есть ограниченный оператор $\mathbb{A}^L$ такой, что $\mathbb{A}^L\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{T}$, где $\mathbb{I}$ - единичный, а $\mathbb{T}$ - вполне непрерывный операторы, и существует постоянная $C_s > 0$ такая, что выполняется оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\|_s + |\lambda|\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s, \tag{8}$$

где $\|\mathbf{u}\|_{s+1}$ норма $\mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^{s+1}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2}$ – норма следа нормальной компоненты $\mathbf{u}$ на Γ в $H^{s+1/2}(\Gamma)$, $s \geq 0$ (см. [6, 12], а также [14]). Линейное пространство решений однородной задачи (2) обозначим через $\mathscr{N}$. Итак, имеет место

Теорема 1. *Оператор* $\mathbb{A}$ *в пространствах (7) имеет левый параметрикс. Его ядро* $\mathscr{N}$ *конечномерно и выполняется априорная оценка* (8).

Из этой теоремы и оценки следует, что при $\lambda \neq 0$

a)*число линейно независимых решений задачи 1 конечно,*

b)*любое (обобщенное) решение задачи бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

1.5. **Оператор** rot + λ**I в подпространствах** $\mathbf{L}_2(G)$**.** Как мы уже отмечали, $\mathrm{rot}\nabla\,h = 0$ на подпространстве $\mathscr{A}$ и оператор $\mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ сводится к алгебраическому оператору $\lambda\nabla\,h$.

Ортогональное дополнение $\mathscr{B}$ к подпространству $\mathscr{A}$ в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ определяется так

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \int\limits_G \mathbf{u} \cdot \nabla\, h\, d\, x = 0, \quad \text{для любой} \quad h \in H^1(G)\}. \tag{9}$$

Из этого определения для функций $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^1(G)$ вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в G и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0$.

В пространстве $\mathscr{B}$ выделим подпространство

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathscr{B} : \int\limits_G \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\,\mathbf{x} = 0, \quad \text{для любой} \quad \mathbf{v} \in \mathscr{D}(G)\}. \tag{10}$$

Кратко оно обозначается так

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}. \tag{11}$$

Это пространство конечномерно. Его базис состоит из бесконечно дифференцируемых в G вектор-функций $\{\mathbf{h}_j\}$, $j = 1, ..., N$, где N есть род $\rho(\Gamma)$ границы Γ; $\rho(S) = 0$ для сферы и $\rho(\tau) = 1$ для тора τ.

Ортогональное дополнение к $\mathscr{B}_H$ в $\mathscr{B}$ обозначим как

$$\mathbf{V}^0(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^0} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2}\},$$

так что

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_H \oplus \mathbf{V}^0(G), \quad \mathbf{L}_2(G) = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B}.$$

В случае шара, пространство $\mathscr{B}_H$ пусто и $\mathscr{B} = \mathbf{V}^0(G)$ [7].

Наконец, в $\mathbf{V}^0(G)$ выделяется подпространство

$$\mathbf{W}^1(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}. \tag{12}$$

В силу оценки (8) оно содержится $\mathbf{H}^1(G)$ и плотно в $\mathbf{V}^0(G)$, так как плотное в нем множество $\mathbf{C}_0^\infty \cap \mathbf{V}^0(G)$ содержится в $\mathbf{W}^1(G)$.

Оператору $\operatorname{rot} + \lambda\, I : \mathbf{W}^1(G) \to \mathbf{V}^0(G)$ соответствует краевая задача

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Оператор $\operatorname{rot} + \lambda\, I$ является симметрическим, так как

$$\int\limits_G (\operatorname{rot} + \lambda\, I)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int\limits_G \mathbf{u} \cdot (\operatorname{rot} + \lambda\, I)\mathbf{v}\, d\mathbf{x} \tag{14}$$

для любых функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $\mathbf{W}^1(G)$. Это доказано в [14].

В гильбертовом пространстве $\mathbf{V}^0(G)$ И. Гига и З. Иошида определили оператор $S : \mathbf{V}^0(G) \to \mathbf{V}^0(G)$, который совпадает с $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1(G)$, и доказали, что

Оператор S является самосопряженным.

Область определения S, $\mathbf{W}^1(G)$, содержится в $\mathbf{H}^1(G)$ и плотна в $\mathbf{V}^0(G)$, а область значений совпадает с $\mathbf{V}^0(G)$. Спектр $\sigma(S)$ точечный и действительный. Оператор S имеет компактный обратный $S^{-1} : \mathbf{V}^0(G) \to \mathbf{W}^1(G)$.
Оператор S замкнут и совпадает со своим сопряженным S^*. Семейство собственных функций оператора S образует полный ортогональный базис в пространстве $\mathbf{V}^0(G)$.

Согласно теории операторов в пространстве Гильберта , спектр самосопряженного оператора S точечный, а система его собственных вектор-функций ортогональна и полна в $\mathbf{V}^0(G)$. Каждому собственному значению соответствует конечное число собственных вектор-функций.

Однородная сопряженная задача к (13) совпадает с однородной задачей (13) ($\mathbf{f} = 0$). Так что $\mathscr{N} = \mathscr{N}^*$ и $dim\mathscr{N} < \infty$.

Отметим, то из соотношения

$$(rot + \lambda\, I)(rot - \lambda\, I)\mathbf{u} = -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla\, div\,\mathbf{u} - \lambda^2\,\mathbf{u} \tag{15}$$

и определения пространства $V^0(G)$ собственные функции ротора $\mathbf{u}^{\pm}_{\lambda} \in \mathscr{C}^{\infty}(G)$, отвечающие собственным значениям $\pm\lambda \neq 0$ является также собственными функциями оператора Лапласа:

$$-\Delta\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V^0(G). \tag{16}$$

Нормированные собственные функции ротора $\mathbf{u}^{\pm}_j$ ($\|\mathbf{u}^{\pm}_j\| = 1$ при $\lambda_j \in \Lambda \subset R$) составляют полный ортонормальный базис в пространстве $\mathbf{V}^0(G)$.

Спектральное разложение вектор-функции $\mathbf{f} \in V^0(G)$ по этому базису имеет вид:

$$S\mathbf{f} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\mathbf{f}, \mathbf{u}^+_j)\mathbf{u}^+_j + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^-_j)\mathbf{u}^-_j], \quad \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G). \tag{17}$$

При суммировании такого ряда его элементы нумеруются следуя правилу $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ (см. [3] или п.2.4).

Кроме того, автор доказал, что имеет место

Теорема 2. *Оператор* $\mathrm{rot} + \lambda\, I \,:\, \mathbf{W}^1(G) \to \mathbf{V}^0(G)$ *разрешим по Фредгольму. Его ядро $\mathscr{N}$ и коядро $\mathscr{N}^*$ имеют конечную размерность и $\mathscr{N}^* = \mathscr{N}$. Равенства*

$$\int_G \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx = 0 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathscr{N} \tag{18}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (13).
Если $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G)$ *и* $\lambda \neq \pm\lambda_j$, *то решение уравнения* $\mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ *представляется в*

виде ряда

$$\mathbf{u} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [\frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)}{\lambda + \lambda_j} \mathbf{u}_j^+(x) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{u}_j^-(x)], \quad \mathbf{u} \in \mathbf{W}^1(G). \tag{19}$$

2. Построение собственных функций ротора в шаре

Результаты этого параграфа подробно изложены в работе [18]. Здесь мы напомним этапы решения задачи и приведем основные формулы.

2.1. **Сведение задачи 1 в шаре к спектральной задаче Дирихле.**

Обозначим через $v(\mathbf{x})$ скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Автор заметил, что в шаре B функция $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению $-\Delta v(\mathbf{x}) = \lambda^2 v(\mathbf{x})$, краевому условию $v|_S = 0$, и условию $v(0) = 0$ в центре шара.

Тем самым, задача отыскания собственных функций ротора в шаре B (при ненулевых собственных значениях) приводится к задаче Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием $v(0) = 0$.

З а д а ч а 2. *Найти собственные значения μ и собственные функции $v(x)$ оператора Лапласа $-\Delta$ в шаре B такие, что*

$$-\Delta v = \mu\, v \quad \text{в} \quad B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \tag{20}$$

К области определения $\mathscr{M}_{\mathscr{L}_1}$ оператора $\mathscr{L}_1$ задачи 2 отнесем, [3], все функции $v(\mathbf{x})$ класса $\mathscr{C}^2(B) \cap \mathscr{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие условиям $v|_S = 0$, $v(0) = 0$ и $\Delta v \in L_2(B)$.

Имеет место утверждение

Любому решению $(\lambda, \mathbf{u})$ задачи 1 в шаре B при $\lambda \neq 0$ соответствует решение $(\lambda^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ задачи 2.

2.2. **Собственные значения оператора определяются нулями функции $\psi_n(z)$.**

$$\psi_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma\big(n+1+p+\frac{1}{2}\big)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p+\frac{1}{2}}.$$

Как показал Л. Эйлер (см. [3], §23, с. 356) функции $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ выражаются через элементарные и

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right), \tag{21}$$

Откуда видно, что нули функций $\psi_n(z)$ лежат на действительной оси и располагаются на ней симметрично относительно точки $z = 0$.

2.3. **Решение спектральной задачи Дирихле-Лапласа.**

В сферических координатах (r, θ, φ) методом разделения переменных в [3], §26 доказано, что *собственные значения оператора задачи* $\mathscr{L}$ *в шаре* B *равны* $\lambda^2_{n,m}$, *где* $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, *а числа* $\rho_{n,m} > 0$ *суть нули функций* $\psi_n(z)$, *соответствующие* $\lambda^2_{n,m}$ *действительные собственные функции* v_κ *имеют вид:*

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{22}$$

где $\kappa = (n, m, k)$*- мультииндекс,* $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, c_κ*-произвольные действительные постоянные,* $0 < r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\quad Y^k_n(\theta, \varphi)$*- действительные сферические функции.*

Из ортогональности и полноты функций Бесселя в $L_2[(0, R); r]$ и сферических функций в $L_2(S_1)$ вытекает, что функции v_κ при различных $\kappa = (n, m, k)$ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{v_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [3]. Нормированная система образует в $L_2(B)$ ортонормированный базис.

2.4. **Эквивалентное интегральное уравнение.** С другой стороны, если $f \in C^1(B) \cap C(\overline{B})$, то краевая задача

$$-\Delta v = \mu\, v + f(x), \quad v|_S = 0, \quad v \in C^2(B) \cap C(\overline{B}), \tag{23}$$

эквивалентна [3], §29, интегральному уравнению

$$v(x) = \int\limits_B G(x, y)[\mu\, v(y) + f(y)]\, d\, y, \quad v \in C(\overline{B}), \tag{24}$$

с симметричным слабо полярным ядром

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi|x|y|^2 - yR^2|}. \tag{25}$$

Собственные значения и собственные функции оператора $\mathscr{L}$ совпадают с характеристическими числами и соответствующими собственными функциями ядра $G(x, y)$.

Согласно теории интегральных уравнений *множество собственных значений оператора* $\mathscr{L}$ *не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из* $\mathscr{M}_{\mathscr{L}} = \{v \in \mathscr{C}^2(B) \cap \mathscr{C}(\overline{B}), v|_S = 0, \Delta v \in L_2(B)\}$ *разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора* $\mathscr{L}$. Следовательно, все собственные значения $\lambda^2_{n,m} = \rho^2_{n,m}R^{-2}$ оператора $\mathscr{L}$ можно перенумеровать в порядке возрастания их величин

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ..., \quad \mu_l \to \infty, \quad l \to \infty, \tag{26}$$

повторяя в этом ряде μ_l столько раз, какова его кратность (число $\lambda^2_{n,m}$ повторяется $2n+1$ раз). Соответствующие собственные функции обозначим через $V_1, V_2, ...$, так что в ряде чисел (26) каждому собственному значению μ_l соответствует собственная функция $V_l(x)$,

$$\mathscr{L}V_l = \mu_l \, V_l, \quad l = 1, 2, ..., \quad V_l \in \mathscr{M}_{\mathscr{L}}, \tag{27}$$

причем собственные функции $V_l(x)$ выбираем вещественными и ортонормальными:

$$(\mathscr{L}V_l, V_m) = \mu_l \, (V_l, V_m) = \mu_l \, \delta_{lm} \tag{28}$$

Всякая функция $f(x)$ из $\mathscr{M}_{\mathscr{L}}$ разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе $\{V_l(x)\}$,

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (f, V_l) \, V_l(x). \tag{29}$$

Этот ряд сходится в $L_2(B)$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта ряд сходится регулярно на $\overline{B}$ (см.[3] §20.1).

Но множество $\mathscr{M}_{\mathscr{L}}$ плотно в $L_2(B)$. Откуда получаем доказательство полноты системы $\{V_l(x)\}$ в $L_2(B)$. Отметим, что $\{V_l(x)\}$–это система $\{v_\kappa(x)\}$ с выше определенным порядком нумерации элементов.

Ряд (29) (и другие аналогичные ряды) будем записывать в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (f, v_{n,m,k}) \, v_{n,m,k}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\kappa, n \geq 0} (f, v_\kappa) \, v_\kappa(\mathbf{x}). \tag{30}$$

Частичные суммы $S_N(\mathbf{x})$ ряда (30) состоят из n, m и k, для которых $0 < \rho_{n,m} < N$.

2.5. **Решение спектральной задачи 2 с условием** $v_\kappa(0) = 0$**.** Так как $\psi_0(0) = 1$, то функции $\{v_\kappa\}$ при $\kappa = (0, m, 0)$ удовлетворяют этому условию тогда и только тогда, когда $c_{(0,m,0)} = 0$. Откуда следует, что

собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 2 равны $\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m} R^{-1}$, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$. Кратность значения $\lambda^2_{n,m}$ равна $2n+1$. Собственные функции v_κ задачи, соответствующие значениям $\lambda^2_{n,m}$, имеют вид

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y^k_n(\theta, \varphi), \quad \kappa = (n, m, k), \; m, n \in \mathbb{N}, \; |k| \leq n. \tag{31}$$

2.6. **Решения задачи 1 строятся на основе решений задачи 2.** Попутно мы доказываем [18] , что собственные значения $\pm\lambda_{n,m}$ - это корни квадратные из собственных чисел задачи 2 и что

любому решению (μ, v) задачи 2 при $\mu > 0$ соответствуют два и только два решения $(\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^+)$ и $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 такие , что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^+ = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^- = v$.

Ход рассуждений автора таков. Система $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ из четырех действительных уравнений в сферических координатах, где $u = (u_r,\, u_\theta,\, u_\varphi)$, записывается как система двух комплексных уравнений

$$(\partial_r - i\lambda)\, rw = r^{-1}Hv, \quad \mathrm{K}w = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv), \tag{32}$$

относительно комплексной функции $w = u_\varphi + iu_\theta$ и действительной функции $v = ru_r$. Операторы H и K имеют вид:

$$\mathrm{H}v = \left(\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + i\partial_\theta\right) v \quad \mathrm{K}w = \sin^{-1}\theta\,(\partial_\theta \sin\theta + i\partial_\varphi)w. \tag{33}$$

При этом, если $-\Delta v = \lambda^2 v$, то уравнения (32) относительно w (при заданных v и λ) является совместными.

Выбрав (μ, v), - фиксированное решение задачи 2, ненулевые решения задачи 1 находим так: функция u_r определяется как дробь v/r. Положив $\underline{\lambda} = \sqrt{\mu}$ (или $\underline{\lambda} = -\sqrt{\mu}$), подставим $\underline{\lambda}$, v в уравнения (32) и решаем их. Общее решение первого уравнения в (32) имеет вид

$$\underline{w} = d(\varphi,\theta)r^{-1}e^{i\underline{\lambda}r} + r^{-1}\int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)}Hv(t,\theta,\varphi)t^{-1}\,dt, \tag{34}$$

где d есть произвольная функция от переменных φ и θ. Мы полагаем $d = 0$, так как решение ищем в классе ограниченных функций. Далее доказываем, что функция $\underline{w}$ удовлетворяет второму уравнению.

2.7. **Формулы решений задачи.** Подставив вместо $\underline{\lambda}$ конкретные выражения $\pm\lambda_{n,m}$ и v_κ из (31) в дробь v/r и в интеграл (34), а также d=0, получим явные формулы собственных функций задачи. Итак,

ненулевые собственные значения $\lambda^{\pm}_{n,m}$ задачи 1 равны $\pm\lambda_{n,m} = \pm(\rho_{n,m})/R$, , где R–радиус шара, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$.Собственные функции $u^{\pm}_\kappa$ задачи 1 в сферических координатах вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} u^{\pm}_\kappa = c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}\psi_n(\pm\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_r + \\ c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}Re[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta) + \\ c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}Im[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](-ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta). \end{gathered} \tag{35}$$

где числа $c^{\pm}_\kappa \in \mathbb{R}$, m,$n \in \mathbb{N}$, $|k| \le n$,$\kappa = (n,m,k)$, $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$-репер,

$$\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r) = \int\limits_0^r e^{\pm\, i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(\pm\lambda_{n,m}t)t^{-1}dt, \tag{36}$$

$$\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi) = \left(\sin^{-1}\theta\,\partial_\varphi + i\partial_\theta\right)Y^k_n(\theta,\varphi), \tag{37}$$

Не трудно доказать, что $Im\Phi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0$.

2.8. Сходимость ряда Фурье по собственным функциям ротора в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$. Положим

$$\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \cap \mathbf{H}^s(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0, ..., \mathbf{n}\cdot\ \mathrm{rot}^{s-1}\mathbf{f}|_S = 0,\ \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s}\}.$$

Теорема 3. *Для того, чтобы $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$ разлагалась в ряд Фурье*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa,n>0} ((\mathbf{f},\mathbf{q}^+_\kappa)\mathbf{q}^+_\kappa(\mathbf{x}) + (\mathbf{f},\mathbf{q}^-_\kappa)\mathbf{q}^-_\kappa(\mathbf{x})), \quad \|\mathbf{q}^\pm_\kappa\| = 1, \tag{38}$$

по собственным вектор-функциям $\mathbf{q}^\pm_\kappa(\mathbf{x})$ ротора в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ принадлежала $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$, то сходится ряд

$$\sum_{\kappa,n>0} \lambda_\kappa^{2s}\,(|(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_\kappa)|^2 + |(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_\kappa|^2)), \quad \lambda_\kappa = (\rho_{n,m})/R \tag{39}$$

и существует такая положительная постоянная $C > 0$, не зависящая от $\mathbf{f}$, что

$$\sum_{\kappa,n>0} \lambda_\kappa^{2s}\,(|(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_\kappa)|^2 + |(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_\kappa|^2)) \leq C\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^s(B)}. \tag{40}$$

Если $s \geq 2$, то любая вектор-функция $\mathbf{f}$ из $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$ разлагается в в ряд Фурье, сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$.

Следствие 1. *Любая вектор-функция f из $\mathbf{V}^0 \cap \mathbf{C}^\infty_0(B)$ разлагается в ряд Фурье* (38), *сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^\infty(\overline{B})$.*

При доказательстве этих утверждений мы следовали книге В.П.Михайлова [5].

2.9. Скалярное произведение функций f из $\mathscr{B}$ в базисе из собственных функций ротора. Оно имеет вид [18]:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \sum_{\kappa,n>0} [(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_\kappa)(\mathbf{g},\mathbf{q}^+_\kappa) + (\mathbf{f},\mathbf{q}^-_\kappa)(\mathbf{g},\mathbf{q}^-_\kappa)], \quad \mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathscr{B}. \tag{41}$$

Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ принадлежат $\mathbf{V}^1_{\mathscr{R}}(B)$, то

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{f},\mathbf{g}) = (\mathbf{f},\mathrm{rot}\mathbf{g}) = \sum_{\kappa,n>0} \lambda_\kappa[(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_\kappa)(\mathbf{g},\mathbf{q}^+_\kappa) - (\mathbf{f},\mathbf{q}^-_\kappa)(\mathbf{g},\mathbf{q}^-_\kappa)].$$

Значит, оператор **rot** является *самосопряженными* в пространсте $\mathscr{B} = \mathbf{V}^0(B)$.

3. Решение краевой задачи в шаре

3.1. **Методом Фурье решается краевая задача.** *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(B)$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{H}^1(B)$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0. \tag{42}$$

3.2. **Основные пространства.** Через $\mathbf{E}^s(B)$ (или $\mathbf{H}^s_{div}(B)$) обозначают [13] следующие подпространства в $\mathbf{L}_2(B)$:

$$\mathbf{E}^s(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(B) : \operatorname{div}\mathbf{v} \in H^s(B),\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}\},$$

где числа $s \geq 0$ целые. Они является полными пространствами Гильберта и

$$\mathbf{C}_0^\infty(B) \subset \mathbf{E}^s(B), \quad \mathbf{H}^{s+1}(B) \subset \mathbf{E}^s(B) \subset \mathbf{H}^s(B). \tag{43}$$

Очевидно, $\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in \mathbf{E}^s(B)$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(B)$.

Как известно [5], для функций v из пространства $H^1(B)$ определен оператор *следа* $\gamma : H^1(B) \to H^{1/2}(S)$, равный следу v на S для гладких функций из $\mathscr{C}^1(\overline{B})$: $\gamma\, v = v|_S$, причем $\|\gamma\, v\|_{L_2(S)} \leq c\|v\|_{H^1(B)}$.

Аналогично, для вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{E}^0(B)$ определен [13] оператор *следа нормальной компоненты* $\gamma_\mathbf{n} : \mathbf{E}^0(B) \to H^{-1/2}(S)$, равный сужению $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ на S для гладких функций из $\mathscr{C}^1(\overline{B})$: $\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S$.

Для $u \in \mathbf{E}^0(B)$ и $v \in H^1(B)$ верна обобщенная формула Стокса:

$$\langle\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u}, \gamma\, v\rangle = (\mathbf{u}, \nabla v) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, v) \tag{44}$$

где $\langle\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u}, \gamma\, v\rangle$- линейный функционал над пространством $H^{1/2}(S)$; $\gamma\, v \in H^{1/2}(S)$, а $\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u} \in H^{-1/2}(S)$. Имеют место непрерывные вложения:

$$H^{1/2}(S) \subset L_2(S) \subset H^{-1/2}(S) \tag{45}$$

Определим еще пространства $\mathbf{H}^l_\gamma(B)$ и $\mathbf{E}^s_\gamma(B)$:

$$\mathbf{H}^1_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad l \geq 1. \tag{46}$$

$$\mathbf{E}^s_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{E}^s(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad s \geq 0, \tag{47}$$

и пространство $\mathbf{H}^l_{\gamma\gamma}(B)$, подпространство в $\mathbf{H}^l_\gamma(B)$:

$$\mathbf{H}^l_{\gamma\gamma}(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l_\gamma(B) : \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad l \geq 1. \tag{48}$$

Приведем решение задачи 3 при различных λ.

3.3. **Решение краевой задачи** (42) **при** $\lambda \neq Spe\,(rot)$**.**

Теорема 4. *Если $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0_\gamma(B)$, то единственное решение задачи* (42) *дается суммой рядов $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{49}$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} [(\lambda + \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + \tag{50}$$

$$+ (\lambda - \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})].$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1_\gamma(B)$.
Если $\mathbf{f} \in \mathscr{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, то $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ отображает $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}$.
Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B} \perp \mathscr{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$, то $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ принадлежит $\mathbf{W}^1(B) \subset \mathbf{H}^1_{\gamma\gamma}(B)$.
Если же $\mathbf{f} \in \mathscr{D}(B)$, то ряды (49), (56) *сходятся в любом из пространств $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$ и их сумма есть классическое решение задачи класса $C^\infty(\overline{B})$.*

3.4. **Свойства операторов задачи.** Доказана следующая

Лемма 1. *Оператор $rot + \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств $\mathbf{H}^1_{\gamma\gamma}(B)$ и $\mathbf{E}^0_\gamma(B)$, если λ не принадлежит спектру ротора, то-есть $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$.*

3.5. **Решение задачи** (42) **при** $\lambda = 0$.

Теорема 5. *Если $\lambda = 0$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0_\gamma(B)$, то задача* (42) *разрешима в $\mathbf{L}_2(B)$ тогда и только тогда, когда $div\, \mathbf{f} = 0$. Однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений (все пространство $\mathscr{A}_\gamma$):*

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \xi_{n,m,k}\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{51}$$

где $\xi_{n,m,k}$- произвольные постоянные, такие что $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_2(B)$.

Общее решение неоднороной задачи имеет вид $\mathbf{u}_0 + G^+_0\mathbf{f} + G^-_0\mathbf{f}$, где

$$G^\pm_0 \mathbf{f} \equiv \pm \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \lambda^{-1}_{n,m} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k})\, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x}), \quad G^\pm_0\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1_\gamma(B). \tag{52}$$

Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B} = \mathbf{V}^0(B)$ и решение $\mathbf{u}$ ищется в $\mathscr{B}$, то $\xi_{n,m,k} = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$, и единственное решение задачи $\mathbf{u} = G^+_0\mathbf{f} + G^-_0\mathbf{f}$ принадлежит $\mathbf{H}^1_\gamma(B)$.

Очевидно, что задача (42) разрешима по Фредгольму при $\lambda = \pm\lambda_{n,m}$.

Мы не будем приводить аналогичных формул и доказательств этих утверждений.

4. Оператор $rot + \lambda I$ в пространстве $\mathscr{B}$ при $\mathscr{B}_H \neq \varnothing$

Рассмотрим область G, у которой $\rho(\Gamma) > 0$.

Согласно п.1.5 пространство $\mathscr{B} = \mathscr{B}_H \oplus \mathbf{V}^0$ и подпространство $\mathscr{B}_H$ не пусто.

Любая функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathscr{B}$ имеет разложение:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\rho}(\mathbf{f}, \mathbf{h}_i)\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \sum_{\lambda_j \in \Lambda}[(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(\mathbf{x})], \quad \|h_i\| = \|u_j^{\pm}\| = 1. \tag{53}$$

Функции $\mathbf{h}_i \in \mathscr{C}^\infty(\overline{G})$ и $\mathbf{rot}\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = 0$ в G. Если $\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(G)$, то

$$\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \lambda_j[(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(\mathbf{x})]. \tag{54}$$

4.1. **Краевая задача.** *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathscr{B}$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathscr{B}$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0. \tag{55}$$

Теорема 6. *Если* $\lambda \neq 0, \pm\lambda_j,\ j \in \mathbf{N}$ *и* $\mathbf{f} \in \mathscr{B}$, *то единственное решение задачи* (55) *дается суммой рядов* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, *где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\sum_{n=1}^{\rho}(\mathbf{f}, \mathbf{h}_n)\,\mathbf{h}_n(\mathbf{x}), \tag{56}$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{\lambda_j \in \Lambda}[(\lambda + \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)\,\mathbf{q}_j^+ \;+\; (\lambda - \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)\,\mathbf{q}_j^-] \tag{57}$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1_\gamma(G) \cap \mathscr{B}$.

Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B}_H$, *то* $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ *отображает* $\mathscr{B}_H$ *на* $\mathscr{B}_H$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \perp \mathscr{B}_H$ *в* $\mathscr{B}$, *то* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ *принадлежит* $\mathbf{W}^1(G) \subset \mathbf{H}^1_\gamma(G)$.

Если же $\mathbf{f} \in \mathscr{C}_0^\infty(G) \cap \mathscr{B}$, *то ряд* (57) *сходится в любом из пространств* $\mathbf{H}^s(G)$, $s \geq 1$ *и его сумма с* (56) *есть классическое решение задачи класса* $C^\infty(\overline{G}) \cap \mathscr{B}$.

Не трудно убедиться, что задача (55) разрешима по Фредгольму при $\lambda = \pm\lambda_j$, $j \in \mathbf{N}$ и при $\lambda = 0$. Равенства $(\mathbf{f}, \mathbf{h}_n) = 0$ при $n = 1, ..., \rho$ –условие разрешимости задачи при $\lambda = 0$.

Повидимому в Proposition 1 статьи [14] имеется неточность.

Список литературы

1. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 810 с.
   SOBOLEV, S.L. (1974) *Introduction to the theory of cubature formulas Linear*. Moscow: Nauka.
2. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

LADYZHENSKAYA, O.A. (1970) *Mathematical principles of the viscous noncontractible fluids dymamics.* Moscow: Nauka.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

VLADIMIROV, V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, New York.

4. Козлов, В.В. Общая теория вихрей. — Ижевск: Изд. Дом «Удмурдский университет», 1998. — 240 с.

KOZLOV, V.V. (1998) *General Vortex Theory.* Izhevsk: Udmurd. Univ..

5. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1975. — 392 с.

MIKHAILOV, V.P. (1978) *Partial Differential Equations.* Moscow: Mir.

6. Солонников, В.А. Переопределенные эллиптические задачи // Записки Научных Сем. ЛОМИ. — Ленинград, 1971. — Т.21. № 5. — С. 112–158.
SOLONNIKOV, V.A. (1971) Redefined elliptical problems. *Notes of the Sci. seminar of LOMI.* vol.21 (no. 5). p. 112-158.

7. WEIL, H. (1941) The method of orthogonal projection in potetial theory. *Duke Math.* vol.7. p. 411–444.

8. Быховский, Э.Б., Смирнов, Н.В. Об ортогональном разложении пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и операторах векторного анализа / Труды МИАН им. В.А.Стеклова LIX. Матем. вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. — М.,Л.: Изд. АН СССР, 1960. — 5-36 с..
BYKHOVSKI, E.B., SMIRNOV, N.V. (1960) *About orthogonal decomposition of Spaces* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *and operators of the vector analysis.* Proceeding of Steclov MI LIX. Mathematical questions of the hidrodymamics and magnit hydrodymamics for a viscous incompressible fluids. Moskow, Leningrad: Academy Sci. of USSR.

9. CHANDRASEKHAR, S. (1956) On force-free magnetic fields. *Proc. Nat. Ac. Sci.* vol. 42 (no. 1). p. 1–5.

10. Вайнберг, Б.Р., Грушин, В.В. О равномерно неэллиптических задачах I // Мат. Сб.. — 1967. — Т.72 (114) № 4.. — С. 602–636.
VAINBERG, B.R., GRUSHIN, V.V. (1967) Uniformly nonelliptic problems I. *Math.USSR-Sb.*. v.2(1). p. 111-133.

11. TAYLOR, J.B. (1967) Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Phys. Rev. Letters.* V. 33. p. 1139–1141.

12. Сакс, Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1975. — 164 с.

SAKS, R.S. (1975) *Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Differential Equations.* Novosibirsk: Gos. Univ..

13. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ . — М.: Мир, 1981. — 408 с.

TEMAM, R.I. (1979) *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

14. GIGA, Y., YOSHIDA, Z. (1990) Remark on spectra of operator rot. *Math. Z.*. V. 204.. p. 235-245.

15. PICARD, R. (1996) On selfadjoint realization of curl and some its applications. *Preprint : Technische Universitat Dresden: MATH-AN-02-96.* Dresden, Marz. p. .
16. Сакс, Р.С. Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве // Теоретическая и математическая физика. — 2010. — Т. 162, № 2.. — С. 196–215.
SAKS, R.S. (2010) Global solutions of the Navier-Stokes equations in uniformly rotating space. *Theor. Math.Phys.* vol.162 (no.2). p. 163–178.
17. Сакс, Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3, № 1.. — С. 53–79.
SAKS, R.S. (2011) Cauchy Problem for the Navier-Stokes equations, Fourier method. *Ufim. Math. Zh.* vol.3 (no.1). p. 53–79.
18. Сакс, Р.С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // Уфимский математический журнал. — 2013. — Т. 5, № 2.. — С. 63–81.
SAKS, R.S. (2013) Solution of Spectal Problems for the curl and Stokes operators. *Ufim. Math. Zh.* vol.5 (no.2). p. 63–81.
19. Сакс, Р.С. Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенциии // Доклады Акад. Наук. — 2015. — Т. 462, № 3.. — С. 278–282.
SAKS, R.S. (2015) Orthogonal Subspaces of the Space $\mathbf{L}_2(G)$ and Self-Adjoint Extentions of the Curl and Gradient-of - Divergence Operators. *Doklady Math.* vol.91 (no.3). p. 313–317.
20. Сакс, Р.С. Оператор градиент дивергенции в $\mathbf{L_2(G)}$ // Доклады Акад. Наук. — 2015. — Т. 462, № 5.. — С. 61–65.
SAKS, R.S. (2015) The Gradient-of-Divergence Operator in the Space $\mathbf{L}_2(G)$. *Doklady Math.* vol.91 (no.3). p. 31–35.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015