

В.И. Костылев,

доктор физико-математических наук,
профессор, Воронежский государственный
университет

И.П. Гресь,

Воронежский государственный
университет

ОБОБЩЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ГАУССОВСКОГО СИГНАЛА В ГАУССОВСКОМ КОРРЕЛИРОВАННОМ ШУМЕ

GENERALIZED ENERGY DETECTION OF RANDOM GAUSSIAN SIGNALS IN CORRELATED GAUSSIAN NOISE

Показано, что применение альтернативного обнаружителя случайного сигнала Чена на фоне коррелированного гауссовского шума позволяет заметно повысить вероятность обнаружения. Тогда как его использование в случае некоррелированного шума, напротив, нецелесообразно.

It was shown, that Chen detector for random signals in correlated Gaussian noise provides better performance. But usage the detector in case of uncorrelated noise is beside the purpose.

Задача оптимального энергетического обнаружения случайного сигнала на фоне шума рассматривалась неоднократно [2, 3]. Было показано, что в случае, если полезный сигнал — гауссовский с некоррелированными отсчетами, и шум — также гауссовский с некоррелированными отсчетами, то оптимальный обнаружитель по критерию Неймана — Пирсона — энергетический [3].

Тем не менее, в статье [1] предлагается альтернативный обнаружитель, который описывается следующим правилом вынесения решения:

$$W' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|y_i|}{\sigma} \right)^p \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} > T', \quad (1)$$

где T' — порог, n — объем выборки, H_1 и H_0 — гипотезы о наличии и отсутствии полезного сигнала соответственно. Такой обнаружитель отличается от энергетического тем, что модуль входных отсчетов возводится в произвольную положительную степень p , а не в квадрат.

Статистические характеристики случайной величины W' определить сложно, если вообще возможно. В [1] предлагается аппроксимация данной решающей статистики с помощью гамма-распределения, путем подбора параметров последнего. Автор указывает на то, что такая аппроксимация хорошо описывает поведение W' и может быть использована для нахождения порога T' .

В статье [1] представлены графики (см. рис. 1) зависимостей оптимального значения показателя степени p , соответствующего максимальной вероятности правильного обнаружения P_D , от отношения сигнал/шум (ОСШ) при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги P_F и объема выборки n , на этом же рисунке ниже представлены графики зависимостей оптимального значения показателя степени p , соответствующего минимальной вероятности ложной тревоги P_F при фиксированных значениях вероятности правильного обнаружения P_D и объема выборки n .

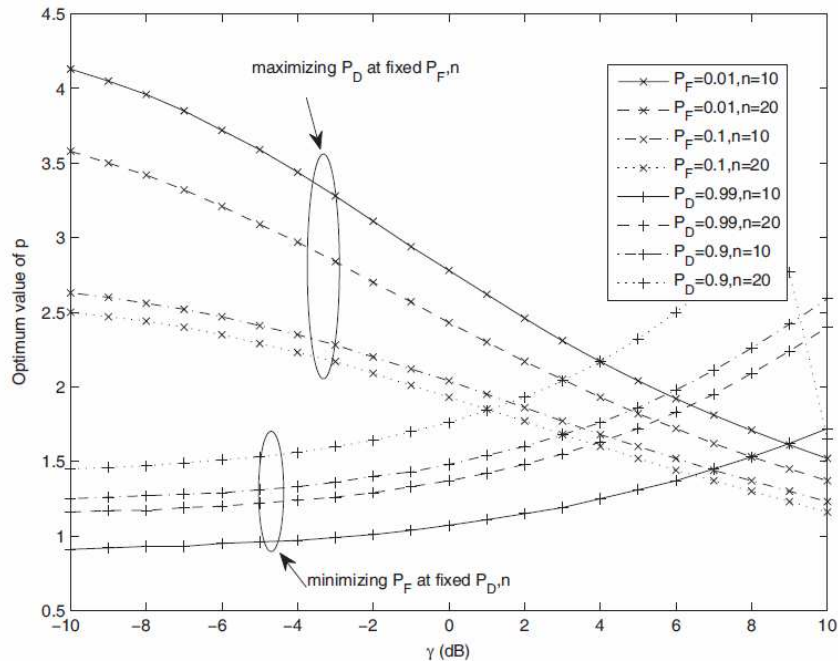


Рис. 1. Зависимость оптимального значения показателя степени p , соответствующего максимальной вероятности правильного обнаружения, от ОСШ при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги и объема выборки (вверху); зависимость оптимального значения показателя степени p , соответствующего минимальной вероятности ложной тревоги от ОСШ при фиксированных значениях вероятности правильного обнаружения и объема выборки (внизу) [1].

Из анализа рисунка можно сделать вывод о том, что различным значениям ОСШ будут соответствовать различные значения показателя степени p . Казалось бы, получен новый обнаружитель, обладающий лучшими характеристиками. Однако несложно показать теоретически, что именно энергетический (т.е. обнаружитель, в котором входные отсчеты возводятся в степень $p=2$) является оптимальным по критерию Неймана-Пирсона для любого ОСШ.

Пусть в результате наблюдения получен вектор \mathbf{x} , представляющий собой значение векторной случайной величины X , принимающей значения из пространства наблюдений R (n -мерная область, которая объединяет все возможные исходы опыта). Опыт, в результате которого выносится решение, можно интерпретировать следующим образом: у нас имеется точка \mathbf{x} из пространства наблюдений R и необходимо выработать решение γ_0 или γ_1 в соответствии с правилом вынесения решения. Правило решения сводится к заданию поверхности в пространстве наблюдений R , которая делит это пространство на две части R_0 и R_1 , такая поверхность называется решающей поверхностью. Если \mathbf{x} попадает в первую часть пространства наблюдений (R_0), необходимо вынести решение γ_0 , если во вторую (R_1) — γ_1 . Так как \mathbf{x} — значения отсчетов случайного

процесса, то каким бы правилом решения мы ни пользовались, мы можем допустить ошибку. Возможны две ошибки:

1. Выносится решение γ_1 , а верна гипотеза H_0 — ошибка первого рода (ложная тревога).

2. Выносится решение γ_0 , а верна гипотеза H_1 — ошибка второго рода (пропуск сигнала).

Условная вероятность ошибки первого рода рассчитывается по формуле

$$P_F = \int_{R_1} P(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Условная вероятность ошибки второго рода — по формуле

$$P_m = \int_{R_0} P(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Введем целевую функцию

$$\Psi = P_m + \left(\int_{R_1} P(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} - P_F \right) \lambda, \quad (4)$$

где λ — неопределенный множитель. Мы используем критерий Неймана — Пирсона, по которому вероятность ложной тревоги фиксирована, поэтому выражение в скобках равно нулю. Очевидно, что вероятность ложной тревоги можно переписать в следующем виде

$$P_F = \int_{R_1} P(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} = 1 - \int_{R_0} P(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Подставим (3) и (5) в (4):

$$\Psi = \int_{R_0} P(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x} + \left(1 - \int_{R_0} P(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} - P_F \right) \lambda. \quad (6)$$

Преобразуем выражение (6)

$$\Psi = \int_{R_0} [P(\mathbf{x} | H_1) - \lambda P(\mathbf{x} | H_0)] d\mathbf{x} + \lambda(1 - P_F). \quad (7)$$

Выражение в квадратных скобках обозначим как $V(\mathbf{x})$. Необходимо провести решающую поверхность в пространстве наблюдений R таким образом, чтобы Ψ было минимально. Поэтому если для некоторой точки $\mathbf{x} \in R$ $V(\mathbf{x}) < 0$, то включим эту точку в R_1 , если же для этой точки $V(\mathbf{x}) > 0$, то не будем ее включать в R_1 . Получим следующее правило:

$$\frac{P(\mathbf{x} | H_1)}{P(\mathbf{x} | H_0)} > \lambda. \quad (8)$$

γ_1

γ_0

Так как вероятность ложной тревоги фиксирована, параметр λ может быть определен из выражения (8).

В [1] рассматривается полезный сигнал, представляющий собой гауссовский дискретный n -мерный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией α^2 и шум, представляющий собой дискретный гауссовский n -мерный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

В этом случае рассмотренные условные плотности вероятности имеют вид:

$$P(\mathbf{x} | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}, \quad (9)$$

$$P(\mathbf{x} | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \alpha^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma^2 + \alpha^2)} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}, \quad (10)$$

Подставим (9) и (10) в (8) и прологарифмируем полученное выражение

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{matrix}, \quad (11)$$

где

$$h = \frac{2\sigma^2(\alpha^2 + \sigma^2)}{\alpha^2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2} \right) \right). \quad (12)$$

Таким образом, показано, что оптимальным по критерию Неймана — Пирсона является энергетический обнаружитель, т.е. обнаружитель, у которого показатель степени равен двум независимо от ОСШ, значения вероятности ложной тревоги и объема выборки.

Чтобы еще раз удостовериться в правильности приведенных рассуждений, было проведено статистическое моделирование. Моделирование проводилось в два этапа. Сначала была найдена зависимость порога T от вероятности ложной тревоги P_F и показателя степени p (при моделировании не использовалась аппроксимация из [1]). Эта зависимость представлена на рис. 2. Для сравнения на этом же рисунке представлена та же зависимость, полученная с помощью предложенной в статье аппроксимации (T').

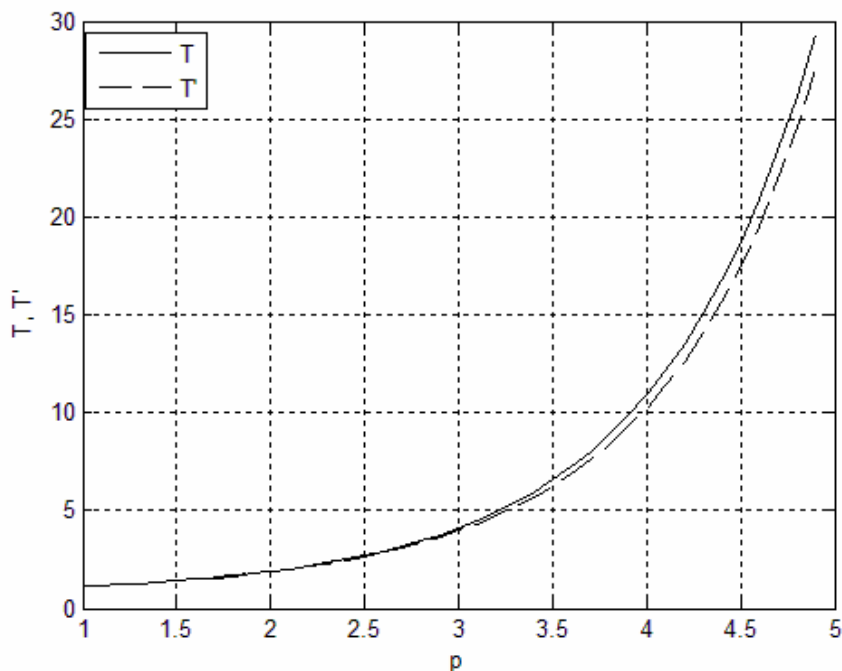


Рис. 2. Зависимость порога T от показателя степени p (сплошная линия), соответствующая вероятности ложной тревоги $P_F=0.01$ и объему выборки $n=20$, та же зависимость, полученная с помощью аппроксимации распределения W' (пунктирная линия)

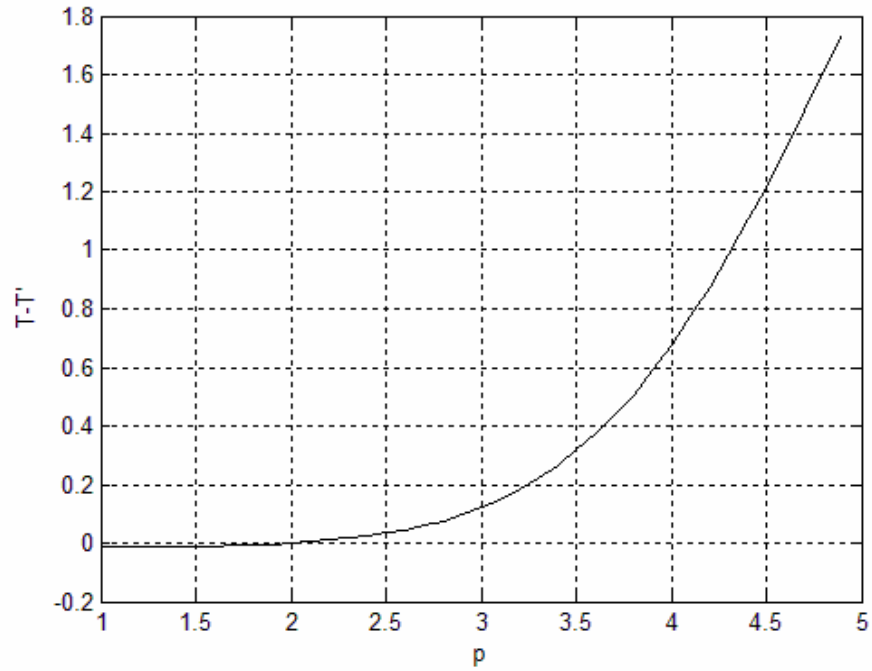


Рис. 3. Разность между указанными на рис. 2 кривыми в зависимости от показателя степени

Уже на данном этапе, из анализа представленных графиков, можно сделать вывод о том, что аппроксимация, предложенная в статье, недостаточно точная. Далее, с использованием найденной зависимости $T(p)$ и аппроксимации $T'(p)$ из [1], с помощью моделирования были найдены зависимости вероятности правильного обнаружения P_D от показателя степени p при фиксированной вероятности ложной тревоги $P_F=0.01$ и объеме выборки $n = 20$. Результат моделирования представлен соответственно на рис. 4 и 5.

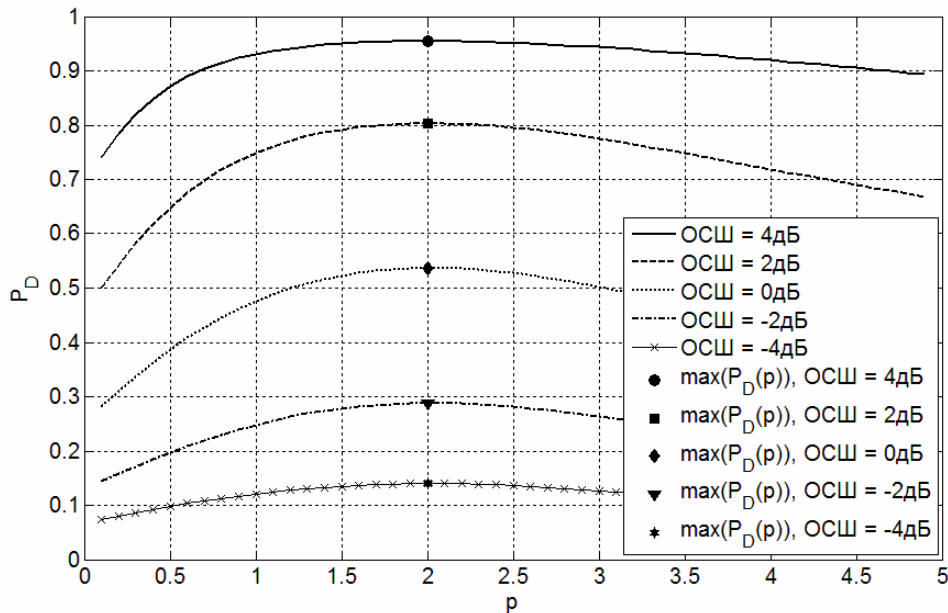


Рис. 4. Зависимость вероятности правильного обнаружения P_D от показателя степени p для различных значений ОСШ. Графики получены без использования аппроксимации из [1]

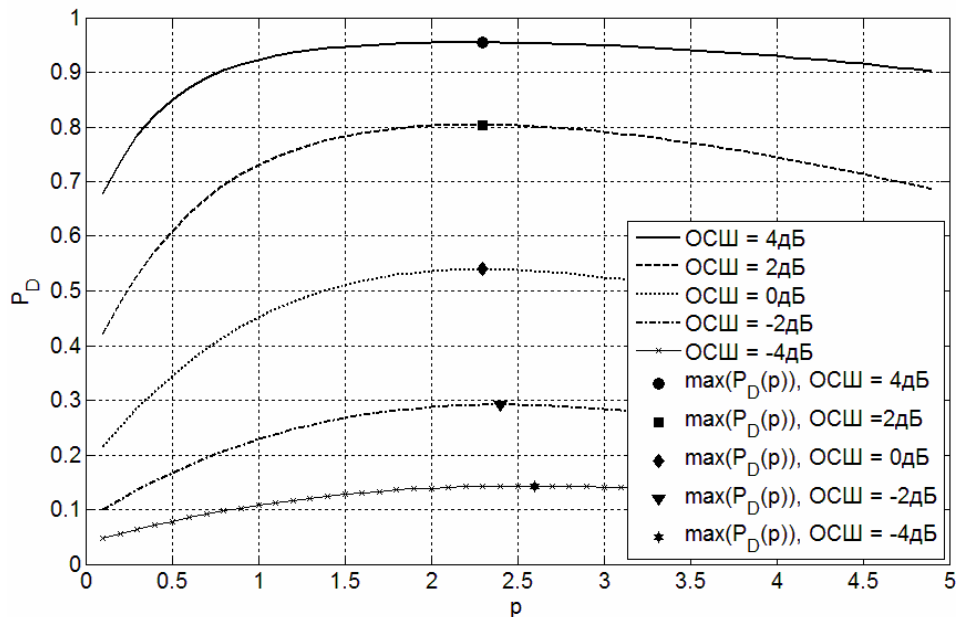


Рис. 5. Зависимость вероятности правильного обнаружения P_D от показателя степени p для различных значений ОСШ. Графики получены с помощью аппроксимации из [1]

Из указанных графиков можно сделать вывод о том, что приведенные теоретические выкладки верны, оптимальным по критерию Неймана — Пирсона является энергетический обнаружитель ($p=2$). Также можно сделать вывод о том, что представленные в статье [1] графики не соответствуют действительности. Причиной этому является неточная аппроксимация решающей статистики W' гамма-распределением.

Однако мы считаем, что использование обнаружителя, задаваемого правилом (1), назовем его обобщенным энергетическим обнаружителем, имеет смысл. Теоретически доказано, что при обнаружении дискретного гауссова сигнала с некоррелированными отсчетами с нулевым математическим ожиданием на фоне дискретного гауссова шума с некоррелированными отсчетами и нулевым математическим ожиданием оптимальным по критерию Неймана — Пирсона является энергетический обнаружитель. Но если отсчеты шума коррелированы, энергетический обнаружитель уже не является оптимальным. Кроме того, найти вид оптимального обнаружителя достаточно сложно, необходимо знать информацию о корреляции отсчетов, поэтому на практике может использоваться энергетический, в силу его простоты. Используя обобщенный энергетический обнаружитель, можно добиться повышения вероятности правильного обнаружения при неизменном ОСШ. Заметим, что переход от энергетического обнаружителя к (1) не приводит к существенному усложнению обработки входной смеси сигнала и шума.

Для определения характеристик алгоритма (1) при обнаружении в коррелированном шуме было проведено статистическое моделирование, при котором производилось обнаружение дискретного гауссова сигнала с нулевым математическим ожиданием и некоррелированными отсчетами в дискретном гауссовском шуме с нулевым математическим ожиданием и коррелированными отсчетами. Корреляционная функция — экспоненциальная, параметр $\alpha=0.25, 0.5, 0.75$. Ее график представлен на рис. 6.

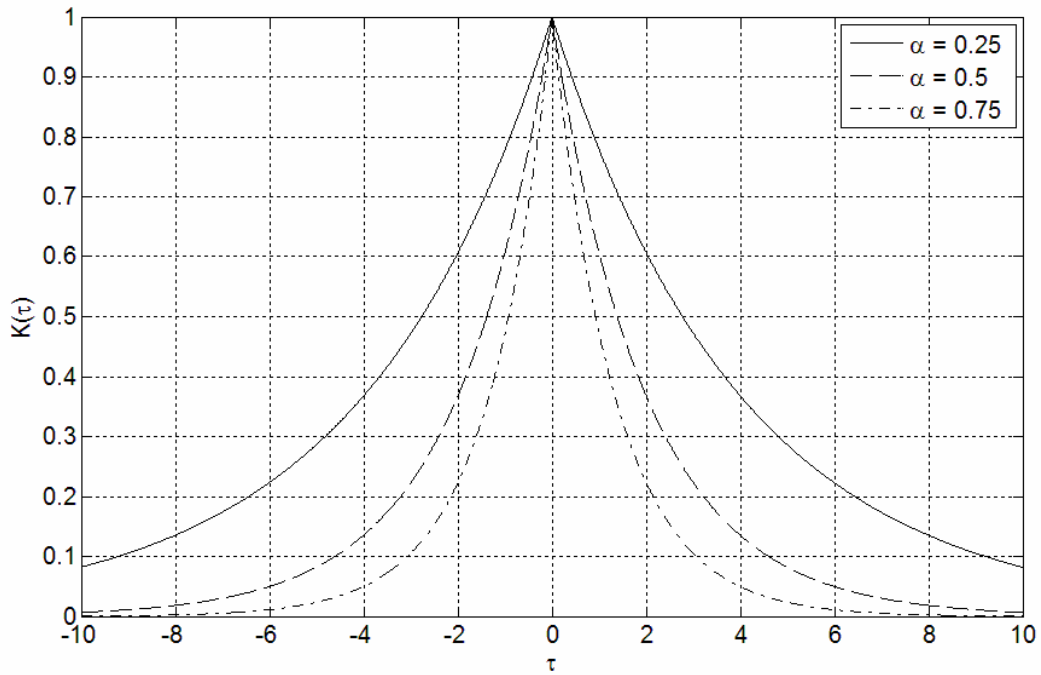


Рис. 6. Экспоненциальная корреляционная функция при различных значениях параметра α

По результатам моделирования построены графики зависимости вероятности правильного обнаружения P_D от показателя степени p при фиксированных вероятности ложной тревоги $P_F=0.01$, объеме выборки $n=20$, ОСШ=4дБ и $\alpha=0,25, 0,5, 0,75$. Эти графики представлены на рис. 7.

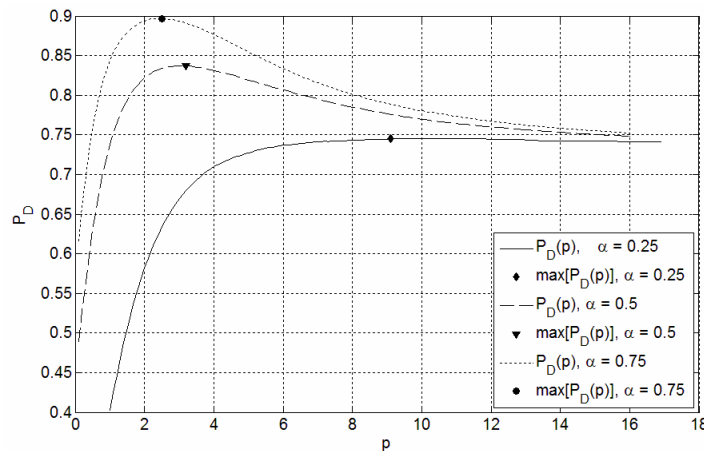


Рис.7. Зависимость вероятности правильного обнаружения P_D от показателя степени p при ОСШ = 4дБ и различных параметрах α корреляционной функции

Рассмотрим рис. 7 (кривую, соответствующую $\alpha=0,25$). Максимальная вероятность правильного обнаружения достигается при $p=9,1$ и равна при этом $P_D = 0,74$. Для сравнения при $p=2$ (энергетический обнаружитель) — $P_D = 0,58$. Таким образом, удалось заметно повысить вероятность правильного обнаружения выбором показателя степени обнаружителя, существенно не усложнив его конструкцию. При этом выигрыш в ОСШ равен примерно 0,8-0,9 дБ, что составляет 20-22% от ОСШ.

Построим характеристики обнаружителя (рис. 8) при различных значениях $p=1, 2, 4, 8$ при фиксированных $\alpha=0,25$, вероятности ложной тревоги $P_F=0,01$ и объеме выборки $n=20$. Из рис. 8 видно, что при больших ОСШ значение показателя степени p не играет роли, тогда как при малых ОСШ обнаружитель с $p=4$ и 8 более эффективен по сравнению с энергетическим.

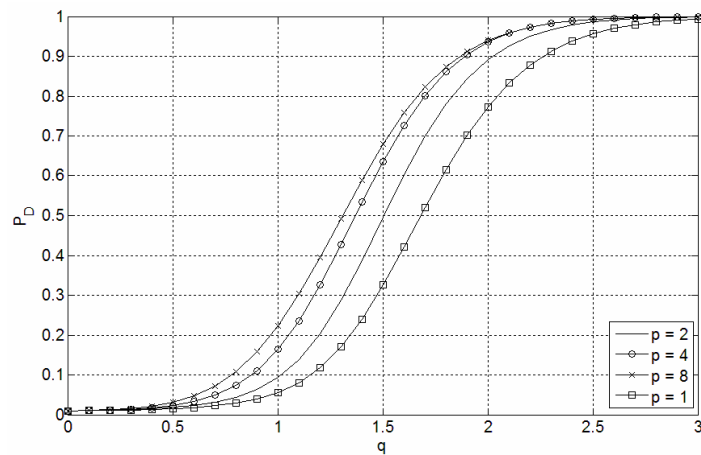


Рис. 8. Зависимость вероятности правильного обнаружения P_D от ОСШ, при различных показателях степени обнаружителя.

Таким образом, показано, что при обнаружении гауссовского некоррелированного сигнала на фоне гауссовского некоррелированного шума оптимальным по критерию Неймана — Пирсона является энергетический обнаружитель, а не обнаружитель предложенный в статье [1]. Кроме того, установлено, что обнаружитель (1) обладает лучшими характеристиками, по сравнению с энергетическим, при обнаружении гауссовского некоррелированного сигнала на фоне гауссовского коррелированного шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Y. Improved Energy Detector for Random Signals in Gaussian Noise. — IEEE Transactions on Wireless Communications, Feb., 2010. — V.9. — P. 558—563.
2. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Том 4. Оптимальное обнаружение сигналов. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 366 с.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.