$\Delta_{\mu k}$ - алгебраические дополнения элементов определителя Δ, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда

$$D^n Ty(x) = \beta f(x) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^n Tg_k(x), \tag{5}$$

$$D^i Ty(0) = \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^i Tg_k(0), \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Найдем (f, v_k), $k = 1, \ldots, m$. Умножая (5) скалярно на v_j, $j = 1, \ldots, m$, получим

$$(D^n Ty, v_j) = \beta(f, v_j) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k)(D^n Tg_k, v_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Возьмем i_μ, $\mu = 1, \ldots, s$ соотношения из (6) и добавим к ним j_μ, $\mu = s+1, \ldots, m$ соотношения из (7). Определитель этой системы есть $\Delta \neq 0$. Поэтому по формулам Крамера

$$(f, v_k) = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_{\mu=1}^{s} \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} Ty(0) + \sum_{\mu=s+1}^{m} \Delta_{\mu k} (D^n Ty, v_{j_\mu})\right], \; k = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), придем к (3).

Подставляя (8) в оставшиеся j_μ, $\mu = 1, \ldots, s$ соотношения из (7) и i_μ, $\mu = s+1, \ldots, m$ соотношения из (6) и интегрируя по частям, получим (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 - 405.

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2000. № 2. С. 21 - 26.

УДК 518:517.948

Г. В. Хромова

ОБ УРАВНЕНИИ АБЕЛЯ*

В данной статье на уравнении Абеля демонстрируется новый способ регуляризации уравнений первого рода, базирующийся на привлечении операторов из теории приближения функций.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 00-01-00237, 00-15-96123.

Пусть мы имеем уравнение Абеля

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} u(t) = f(x), \qquad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

правая часть которого задана δ-приближением $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$, а $u(t) \in C[0,1]$.

Возьмем расширенный оператор Стеклова $\widetilde{S}_h$, с помощью которого можно получить равномерное приближение к любой непрерывной функции на отрезке $[0,1]$ [1]:

$$\widetilde{S}_h\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{h-x} \varphi(t)dt + \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{h-x}^{h+x}\varphi(t)dt, & x\in[0,h], \\ \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}\varphi(t)dt, & x\in[h,1-h], \\ \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{2-x-h}\varphi(t)dt + \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{2-x-h}^{1}\varphi(t)dt, & x\in[1-h,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим оператор $R_h = S_h A^{-1}$.

ТЕОРЕМА 1. Оператор R_h является линейным ограниченным, действующим из $L_2[0,1]$ в $C[0,1]$ интегральным оператором с ядром $K_h(x,\tau)$, имеющим вид

$$K_h(x,\tau) = [2h\Gamma(1-\alpha)]^{-1}\widetilde{K}_h(x,\tau),$$

$$\widetilde{K}_h(x,\tau) = \begin{cases} (x+h-\tau)^{-\alpha} - (x-h-\tau)^{-\alpha}, & 0\le\tau<x-h, \\ (x+h-\tau)^{-\alpha}, & x-h\le\tau<x+h, \\ 0, & x+h\le\tau\le1 \end{cases} \tag{3}$$

при $x\in[h,1-h]$; при $x\in[0,h]$ $\widetilde{K}_h(x,\tau)$ имеет вид (3) с заменой $x-h$ на $h-x$; при $x\in[1-h,1]$

$$\widetilde{K}_h(x,\tau) = \begin{cases} 2(1-\tau)^{-\alpha} - (x-h-\tau)^{-\alpha} - (2-x-h-\tau)^{-\alpha}, & 0\le\tau<x-h, \\ 2(1-\tau)^{-\alpha} - (2-x-h-\tau)^{-\alpha}, & x-h\le\tau<2-x-h, \\ 2(1-\tau)^{-\alpha}, & 2-x-h\le\tau<1. \end{cases}$$

Доказательство. Известно [2], что в данном случае оператор A^{-1} имеет вид

$$A^{-1}f = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(\tau)d\tau.$$

Проведя соответствующие выкладки, получим вид функции $\widetilde{K}_h(x,\tau)$, приведенный в теореме. Далее, пусть $v(\tau)\in L_2[0,1]$. Обозначим $z(x) = R_h v$. Непрерывность $z(x)$ следует из непрерывности функции

$z_1(x) = \int_0^1 (1-\tau_1)^{-\alpha} v(\tau_1 x) d\tau_1$ в точке $x = 0$ и из ее равномерной непрерывности на любом внутреннем отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, поскольку в этом случае для любых x_1, x_2, таких, что $|x_1 - x_2| \leq \delta_1$, выполняется оценка:

$$|z_1(x_1) - z_1(x_2)|^2 \leq (1-2\alpha)^{-1} \varepsilon^{-1} \omega_{L_2}^2(v, \delta_1),$$

где $\omega_{L_2}(v, \delta_1)$ - модуль непрерывности функции $v(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Ограниченность оператора R_h следует из неравенства Буняковского.

ТЕОРЕМА 2. Если $h = h(\delta)$, так что $\frac{\delta}{h(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\| R_{h(\delta)} f_\delta - u \|_{C[0,1]} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство вытекает из оценки

$$\| R_h f_\delta - u \|_{C[0,1]} \leq \| R_h \|_{L_2 \to C} \delta + \| R_h f - u \|_{C[0,1]}$$

и оценок $\| R_h \|_{L_2 \to C} \leq K h^{-1}$, где K не зависит от h, $\| R_h f - u \|_{C[0,1]} \leq \omega(h)$, где $\omega(h)$ - модуль непрерывности функции $u(x)$ в пространстве $C[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 5. С. 1161 - 1171.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.

УДК 517.51:518

Г. В. Хромова, И. Д. Молоденкова

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОСРЕДНЯЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ*

Данная статья представляет собой обобщение результатов, полученных в [1, 2, 3], на случай одномерных пространств Соболева с весами.

1. Рассмотрим функцию $u(x) \in W_2^r[-\pi, \pi]$, $u^{(k)}(-\pi) = u^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0, r-1}$,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 00-01-00237, 00-15-96123.