Краткие сообщения

УДК 517.514+517.574

ОБ УГЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ НОРМАЛЬНЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Л. Берберян[1], Р. В. Даллакян[2]

В работе продолжаются исследования граничных свойств нормальных субгармонических функций, определенных в единичном круге D. Доказаны теоремы о существовании угловых пределов у нормальных субгармонических функций почти всюду на дуге единичной окружности при выполнении ограничений на функцию в соответствующих секторах.

Ключевые слова: единичный круг, нормальные субгармонические функции, угловые граничные пределы.

The paper continues the study of boundary properties of normal subharmonic functions defined in the unit circle D. Theorems are obtained on the existence of angular boundary limits for normal subharmonic functions almost everywhere on the unit circle D.

Key words: unit circle, normal subharmonic functions, angular boundary limits.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-49-53

1. Введение. В настоящей работе исследуется вопрос существования угловых граничных пределов у нормальных субгармонических функций, определенных в единичном круге D. При изучении граничных свойств субгармонических функций, в отличие от граничных свойств аналитических и мероморфных функций, возникают дополнительные трудности. Имеются примеры, показывающие, что получить полные аналоги известных теорем для аналитических функций в случае субгармонических фукций невозможно, если не рассматривать дополнительные условия.

Мы будем придерживаться тех же обозначений, что и в статье [1]. Кроме того, введем еще несколько обозначений. Скажем, что $\xi \in \Gamma$ является обобщенной точкой Плеснера для субгармонической функции $u(z)$, если для любого угла Штольца $\Delta(\xi)$ с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$ предельное множество $C(u, \xi, \Delta(\xi))$ совпадает с некоторым промежутком $[a, +\infty]$, где a — некоторое число из промежутка $[-\infty, +\infty)$. Множество обобщенных точек Плеснера обозначим через $I_*(u)$. Очевидно, что при $a = -\infty$ будем иметь классические точки Плеснера. Множество точек Фату, т.е. точек, в которых существуют угловые граничные пределы, обозначим через $F(u)$. Субгармоническая функция $u(z)$ называется логарифмически субгармонической, если $\ln u(z)$ также является субгармонической функцией.

Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных и голоморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z + a)(1 + \bar{a}z)^{-1}$, a — произвольная точка в D, α — произвольное действительное число$\}$. Говорят (см., например, [2]), что голоморфная функция $f(z)$ нормальна в D, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi : \{f(S(z); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к ∞ на K. Говорят (см., например, [3]), что субгармоническая функция $u(z)$ нормальна, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi : \{u(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности $\{u(S_n(z)\}$ семейства Φ, где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность

[1] *Берберян Самвел Левонович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математики и математического моделирования Ин-та математики и мат. моделирования Российско-Армянского (Славянского) ун-та, e-mail: samvel357@mail.ru.

Berberyan Samvel Levonovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Russian-Armenian (Slavonic) University, Department of Mathematics and Mathematical Modeling.

[2] *Даллакян Рубик Ваникович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математики и программной инженерии Нац. политехн. ун-та Армении, e-mail: dallakyan57@mail.ru.

Dallakyan Rubik Vanikovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Polytechnic University of Armenia, Head of the Department of Mathematics and Software Engineering.

$\{u(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K.

Интерпретируя единичный круг D как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неевклидово расстояние между точками z_1, z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}\,, \text{ где } u = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \cdot \bar{z}_2} \right|.$$

Как известно, еще Дж. Литлвудом [4] было доказано, что если субгармоническая функция $u(z)$ в D удовлетворяет условию

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_0^{2\pi} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta < +\infty, \tag{1}$$

то $u(z)$ почти всюду на $\Gamma : |z| = 1$ имеет радиальные пределы.

Были попытки доказать, что почти всюду на Γ при условии (1) субгармоническая функция $u(z)$ (см. [5]) имеет угловые граничные пределы. В частности, это утверждал И. И. Привалов в своей книге [5, с. 185], но данный результат неверен. Дело в том, что И. И. Приваловым в [5, с. 191] было доказано вспомогательное утверждение о существовании угловых граничных пределов почти всюду на множестве $E \subset \Gamma$, где $\mathrm{mes}E > 0$, в случае, если в каждой точке $\xi \in E$ существует некоторый угол Штольца $\Delta(\xi)$, внутри которого измеримая и почти всюду конечная в D функция $u(z)$ стремится к конечному пределу $u(\xi)$, когда точка z приближается к точке ξ, оставаясь внутри указанного угла $\Delta(\xi)$. Доказательство этого утверждения было корректным, и И. И. Привалов применил его к потенциалам Грина $\omega(z)$. Как известно (см., например, [4] или [5]), при условии (1) субгармоническая функция $u(z)$ представляется в виде

$$u(z) = v(z) - \omega(z),$$

где $v(z)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая условию (1), и $\omega(z)$ — потенциал Грина для единичного круга D. Известно также, что при выполнении условия (1) для гармонической функции $v(z)$ (см., например, [4] или [5]) у нее существуют почти всюду на Γ угловые пределы. Поэтому граничное поведение функции $u(z)$ зависит от граничного поведения потенциала Грина $\omega(z)$. М. Цудзи был приведен пример такого потенциала Грина $\omega(z)$ (см., например, [6]), что в почти каждой точке $\xi \in \Gamma$ нет хотя бы одного угла Штольца $\Delta(\xi)$, внутри которого существует определенный предел $\omega(\xi)$, когда z приближается к ξ, оставаясь внутри угла $\Delta(\xi)$. Следовательно, условия вспомогательного утверждения, доказанного И. И. Приваловым, не имеют места для потенциала Грина $\omega(z)$ при наличии условия (1) на субгармоническую функцию $u(z)$. А это значит, что нельзя было использовать вспомогательное утверждение в п. 5 работы [5, с. 191] для доказательства существования угловых пределов потенциалов Грина $\omega(z)$ почти всюду на Γ. Что касается остальных рассуждений И. И. Привалова (см. [5]), не касающихся существования угловых пределов у отрицательных субгармонических функций, они научно обоснованы и строго доказаны. Для нормальных субгармонических функций имеет место следующая теорема.

Теорема А (см. [7]). *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция в D, удовлетворяющая условию* (1). *Тогда почти всюду на Γ функция $u(z)$ имеет конечные угловые граничные пределы.*

Одним из авторов настоящей работы для нормальных субгармонических функций были получены две теоремы, на которые мы будем существенно опираться в дальнейшем.

Теорема Б (см. [8]). *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция, определенная в D. Если существует такая последовательность точек $\{z_n\} \to \xi = e^{i\theta}$, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma(z_n, z_{n+1}) = M < +\infty$, $\{z_n\}$ лежит внутри некоторого угла Штольца $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ и предельное множество $C(u, \xi, \{z_n\})$ ограничено сверху* (*или снизу*), *то функция $u(z)$ ограничена сверху* (*или снизу*) *в любом угле $\Delta(\xi)$.*

Теорема В (см. [9]). *Для произвольной нормальной субгармонической функции $u(z)$, определенной в D, справедливо разложение*

$$\Gamma = F(u) \cup I_*(u) \cup E,$$

в котором E — некоторое множество меры нуль.

Теорема В, полное доказательство которой опубликовано в работе [9], является некоторым аналогом классической теоремы Плеснера (см. [10, с. 228]) для мероморфных функций. Полный аналог теоремы Плеснера для нормальных субгармонических функций не имеет места. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть модулярную функцию $\mu(z)$, голоморфную в D и не принимающую значения 0, 1, ∞. Известно (см. [11]), что такая функция $\mu(z)$ — нормальная голоморфная функция, а значит, $|\mu(z)|$ — нормальная субгармоническая функция (см. [12]). Так как множество точек Фату для функции $\mu(z)$ счетное (см. [11]), то $\operatorname{mes} F(\mu) = 0$ и в силу теоремы Плеснера почти каждая точка на Γ является точкой Плеснера для $\mu(z)$. Следовательно, в почти каждой точке $\xi \in \Gamma$ предельное множество $C(|\mu|, \xi, \Delta(\xi))$ по любому углу $\Delta(\xi)$ совпадает с промежутком $[0, +\infty]$. Поэтому почти каждая точка на Γ не является ни точкой Плеснера, ни точкой Фату для функции $|\mu(z)|$, но является для этой функции обобщенной точкой Плеснера. Таким образом, для $|\mu(z)|$ утверждение теоремы Плеснера не имеет места, но справедливо утверждение теоремы В.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция в D. Если на каком-либо отрезке $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, функция*

$$U(\theta) = \sup_{0<r<1} |u(re^{i\theta})|$$

почти всюду конечна, то функция $u(re^{i\theta})$, $0 < r < 1$, имеет почти для всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ конечные угловые пределы.

Доказательство. Из условия, что функция $U(\theta)$ конечна для почти всех значений $\theta \in [\alpha, \beta]$, следует, что почти для всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ функция $u(re^{i\theta})$ ограничена на радиусах. В силу теоремы Б функция $u(re^{i\theta})$ ограничена для почти всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ в любом угле Штольца $\Delta(\xi)$, где $\xi = e^{i\theta}$. Теперь, воспользовавшись утверждением теоремы В и ограниченностью $u(re^{i\theta})$ в любом угле $\Delta(\xi)$, где $\xi = e^{i\theta}$, для почти всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ получим, что почти каждая точка $\xi = e^{i\theta} \in [e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$ принадлежит множеству $F(u)$. Следовательно, функция $u(re^{i\theta})$ почти для всех значений $\theta \in [\alpha, \beta]$ имеет конечные угловые пределы.

Следствие 1. *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция, определенная в D, удовлетворяющая условию*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sup_{0<r<1} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta < +\infty, \quad \textit{где} \ \ 0 < \delta < 1.$$

Тогда для почти всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ функция $u(re^{i\theta})$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Доказательство. Действительно, из условия следствия 1 вытекает, что $\sup\limits_{0<r<1} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right|^{\delta}$ конечен для почти всех $\theta \in [\alpha, \beta]$. Значит, $\sup\limits_{0<r<1} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right|$ конечен для почти всех значений $\theta \in [\alpha, \beta]$, и остается применить утверждение теоремы 1.

Докажем еще одну теорему о существовании угловых граничных пределов у нормальных субгармонических функций.

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция в D, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{0<r<1} \int_{\alpha}^{\beta} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta < +\infty, \quad \textit{где} \ \ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi.$$

Тогда для почти всех значений $\theta \in [\alpha, \beta]$ функция $u(re^{i\theta})$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Доказательство теоремы 2. Придерживаясь рассуждений И. И. Привалова (см. [5, с. 194–196]), можно функцию $u(z)$, субгармоническую в секторе $S(\alpha, \beta) : \{z = re^{i\theta}, \alpha < \theta < \beta, |z| < 1\}$, преобразовать с помощью отображения $z = e^{i\alpha} \cdot \xi^{\frac{\beta-\alpha}{\pi}}$ в функцию $U(\xi) = u(z)$, субгармоническую внутри верхнего единичного полукруга Q. При этом И. И. Приваловым было доказано, что $U^{+}(\xi)$ имеет гармоническую мажоранту в Q и функция $U(\xi)$ представляется в виде

$$U(\xi) = u_1(\xi) + h(\xi), \tag{2}$$

где $u_1(\xi)$ — отрицательная субгармоническая функция в Q, а $h(\xi)$ — положительная гармоническая функция в Q. В силу известного утверждения (см., например, [5]) $h(\xi)$ почти всюду на границе Q

имеет конечные угловые граничные пределы. Выполнив конформное отображение полукруга Q на единичный круг $D_1 : |re^{i\theta}| < 1$, мы получаем функцию

$$U_1(re^{i\theta}) = u_1(\xi), \tag{3}$$

субгармоническую и отрицательную в круге D_1. Так как условия

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |U_1(re^{i\theta})|\, d\theta < +\infty \quad \text{и} \quad \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} U_1^+(re^{i\theta})\, d\theta < +\infty, \tag{4}$$

где $U_1^+(re^{i\theta}) = \max\{U_1(re^{i\theta}), 0\}$ (см. [5, с. 101]), эквивалентны, то функция $U_1(re^{i\theta})$ удовлетворяет условиям (4). Значит, в почти каждой точке $\eta \in \Gamma_1 : |re^{i\theta}| = 1$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют конечные и равные между собой пределы

$$\lim_{\substack{re^{i\theta} \to \eta \\ re^{i\theta} \in h(\eta,\varphi)}} U_1(re^{i\theta}) = U_1(\eta).$$

Так как при конформных отображениях областей со спрямляемыми границами имеет место инвариантность множеств меры 0 и сохранение углов почти всюду на границе (см. [10]), то у функции $u_1(\xi)$ существует почти всюду на границе Q, т.е. для почти всех ξ, принадлежащих границе Q, конечный предел α_ξ, по крайней мере, по одному некасательному к границе Q в точке ξ пути L_ξ. Снова, применяя свойства инвариантности множеств меры 0 и сохранения углов почти всюду на границе при конформных отображениях, получим, принимая во внимание соотношения (2) и (3), что и функция $u(re^{i\theta})$ имеет для почти всех значений $\theta \in [\alpha, \beta]$ конечный предел по некоторому некасательному к Γ пути L_ν, где $\nu = e^{i\theta}$. В силу теоремы Б для указанных значений $\theta \in [\alpha, \beta]$ предельные множества $C(u, \nu, \Delta(\nu))$ ограничены для любого угла Штольца $\Delta(\nu)$, где $\nu = e^{i\theta}$, и, значит, такие точки $\nu \notin I_*(u)$. Обозначим через M множество таких точек. Очевидно, что $M = [\alpha, \beta] \setminus E_1$, где $\operatorname{mes} E_1 = 0$. Применяя теорему В, получим, что для значений $\theta \in M \setminus E_2$, где $\operatorname{mes} E_2 = 0$, функция $u(re^{i\theta})$ имеет конечный угловой граничный предел. Следовательно, для значений $\theta \in [\alpha, \beta] \setminus E$, где $E = E_1 \cup E_2$ и $\operatorname{mes} E = 0$, существует конечный угловой граничный предел $u(e^{i\theta})$. Таким образом, для почти всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ функция $u(re^{i\theta})$ имеет конечные угловые граничные пределы, что и требовалось доказать.

Замечание. В частном случае, когда $\alpha = 0$ и $\beta = 2\pi$, из теоремы 2 получим теорему Мика (см. [7]).

Отметим, что условия $\sup\limits_{0<r<1} \left|u(re^{i\theta})\right| < +\infty$ почти всюду на $[\alpha, \beta]$ и $\sup\limits_{0<r<1} \int_\alpha^\beta \left|u(re^{i\theta})\right| < +\infty$ несравнимы. Их рассматривают отдельно и для голоморфных функций.

3. Нерешенные задачи. В теории граничных свойств нормальных субгармонических функций открытыми остаются следующие вопросы.

1) Можно ли сказать, что множество точек Фату для нормальных субгармонических функций всюду плотно на единичной окружности Γ?

Для нормальных гармонических функций положительный ответ получен П. Лаппаном (см. [12]).

2) Что можно сказать о граничном поведении нормальных субгармонических функций $u(z)$, если они удовлетворяют условию

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|^\delta d\theta < +\infty, \tag{5}$$

где $0 < \delta < 1$?

Как известно, если вместо субгармонической функции $u(z)$ рассмотреть аналитическую функцию $f(z)$, то при условии (5) аналитическая функция $f(z) \in H_\delta$ (см. [10]) и имеет почти всюду на единичной окружности Γ конечные угловые граничные пределы.

3) Можно ли утверждать при условии (5) существование у нормальных гармонических функций $u(z)$ угловых граничных пределов почти всюду на Γ?

Работа выполнена в рамках программы развития РАУ (Российско-Армянского университета) из средств Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берберян С.Л.* Об ограниченности нормальных гармонических функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 57–61.
2. *Носиро К.* Предельные множества. М.: ИЛ, 1963.
3. *Rung D.* Asymptotic values of normal subharmonic functions // Math. Z. 1964. **84**, N 1. 9–15.
4. *Littlewood J.* On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. 1927. **27**. 172–176.
5. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.; Л.: Научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1937.
6. *Tsuji M.* Littlewood theorem on subharmonic functions in a unit circle // Comment. Math. Univ. St. Pauli. 1956. **5**, N 7. 3–16.
7. *Meek J.* Subharmonic versions of Fatous theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. **30**, N 2. 313–317.
8. *Берберян С.Л.* О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга // Изв. АН АрмССР. 1980. **15**, № 4. 395–402.
9. *Берберян С.Л.* О граничных особенностях нормальных субгармонических функций // Mathematica Montisnigri. 2005–2006. **18–19**. 5–14.
10. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
11. *Bagemihl F., Seidel W.* Sequential and continuous limits of meromorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI. 1960. N 280. 1–17.
12. *Lappan P.* Fatou points of harmonic normal functions and uniformly normal functions // Math. Z. 1967. **102**, N 3. 110–114.

Поступила в редакцию
20.11.2021

УДК 517.982.256

МНОЖЕСТВА В $\mathbb{R}^n$, МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ В НЕКОТОРОЙ НОРМЕ

Е. А. Савинова[1]

Для линейно связного множества M в $\mathbb{R}^n$ получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы оно было монотонно линейно связным в некоторой норме.

Ключевые слова: монотонная линейная связность, m-связность, нормированное пространство.

Conditions on a path-connected set M in $\mathbb{R}^n$ that are necessary and sufficient for M to be monotone path-connected with respect to some norm are obtained.

Key words: monotone path-connectedness, m-connectedness, normed space.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-53-55

В 2005 г. в работе [1] А. Р. Алимов ввел понятие монотонно линейно связного множества, которое оказалось весьма полезным в геометрической теории приближений. В настоящее время теория монотонно линейно связных множеств и их приложений активно развивается (см., например, [2, 3]). Напомним определение монотонно линейно связного множества.

Пусть X — нормированное пространство, ext $S(X^*)$ — множество крайних точек единичной сферы сопряженного пространства.

Непрерывная кривая $\gamma(\cdot) : [0,1] \to X$ *монотонна*, если $f(\gamma(t))$ является монотонной функцией на отрезке [0, 1] для всякого $f \in \text{ext } S(X^*)$ [4].

Множество $M \subset X$ *монотонно линейно связно* [1], если для любых $a, b \in M$ существует такая монотонная кривая $\gamma(\cdot) \subset M$, что $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

[1] *Савинова Екатерина Андреевна* — студ. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; техник-программист Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: sawinowa.katia@yandex.ru.

Savinova Ekaterina Andreevna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Engineer in Computer Science, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.