УДК 517.968.74

С. Искандаров
д-р физ.-мат. наук, профессор,
заведующий лабораторией,
Институт теоретической и прикладной математики
Национальной академии наук Кыргызской Республики,
г. Бишкек, Киргизия

Г.Т. Халилова
преподаватель,
кафедра информатики и вычислительной техники,
Кыргызско-Российская академия образования,
г. Бишкек, Киргизия

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Устанавливаются достаточные условия оценки снизу на полуоси и стремления к бесконечности решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка. Показывается, что этими свойствами обладают решения с начальными данными из определенного многообразия. Обсуждаются вопросы о неосцилляции и неустойчивости решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оценки снизу решений, многообразие начальных данных, неосцилляция, неустойчивость решений.

S. Iskandarov, IInstitute of Theoretical and Applied Mathematics National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan
G.T. Khalilova, Kyrgyz-Russian Academy of Education, Bishkek, Kyrgyzstan

A LOWER ESTIMATE OF SOLUTION OF WEAK NONLINEAR THIRD ORDER VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. We establish sufficient conditions for the lower estimate on the semiaxis and the tends to infinity of solutions of weakly nonlinear Volterra integro-differential equation of the third order. It is shown that these properties have the solutions with initial data from a specific manifold. The issues of nonoscillation and instability of the solutions.

Keywords: integral-differential equation, lower estimate of solutions, a manifold of initial data, nonoscillation, unstable of solutions.

Все фигурирующие функции от $t,(t,\tau)$ и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0,\ t \ge \tau \ge t_0$; фигурирующие ниже функции от x,y,z,u являются непрерывными при $|x|,|y|,|z|,|u| < \infty$; $J = [t_0,\infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

Ставится следующая

Задача. Установить достаточные условия наличия оценки снизу на J и стремления к бесконечности при $t \to \infty$ решений ИДУ вида:

$$\begin{gathered} x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ +\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right] d\tau = f\left(t\right) + \\ +F(t,x(t),x'(t),x''(t),\int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))d\tau), \quad t \ge t_0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $F(t,x,y,z,u)$, $H(t,\tau,x,y,z)$ удовлетворяют условию «слабой нелинейности»: $|F(t,x,y,z,u)| \le g_0(t)|x| + g_1(t)|y| + g_2(t)|z| + g_3(t)|u|$,

$$|H(t,\tau,x,y,z)| \le h_0(t,\tau)|x| + h_1(t,\tau)|y| + h_2(t,\tau)|z| \tag{N}$$

с неотрицательными функциями $g_k(t),\ h_r(t,\tau)$ $(k = 0,1,2,3;\ \ r = 0,1,2)$.

Решение этой задачи дополняет результаты статьи авторов [1]. В отличие от [1] в настоящей статье, главным образом, развивается метод частичного срезывания [2].

Аналогично [1] в ИДУ (1) делается нестандартная замена:

$$x'(t) = \lambda x(t) + W(t)y(t), \tag{2}$$

где $0 < \lambda$ – некоторый параметр, $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция, $y(t)$ – новая неизвестная функция. Тогда ИДУ (1) сводится к эквивалентной системе из ДУ первого порядка для $x(t)$ и ИДУ второго порядка для $y(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + W(t)y(t), \\ y''(t) + b_2(t)y'(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau) + \\ +P_1(t,\tau)y(\tau) + K(t,\tau)y'(\tau)]d\tau = q(t) + F(t;x,x',y,y'), \quad t \ge t_0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + \lambda + 2W'(t)\left(W(t)\right)^{-1},$$

$$b_1(t) \equiv a_1(t) + a_2(t)W_1(t)\left(W(t)\right)^{-1} + \lambda^2 + W_1'(t)\left(W(t)\right)^{-1},\ W_1(t) \equiv W'(t) + \lambda W(t),$$

$$b_0(t) \equiv \left[a_0(t) + \lambda a_1(t) + \lambda^2 a_2(t) + \lambda^3\right]\left(W(t)\right)^{-1},$$

$$P_0(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau) + \lambda Q_1(t,\tau) + \lambda^2 Q_2(t,\tau)\right],$$

$$P_1(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau) + Q_2(t,\tau)W_1(\tau)\right],$$

$$K(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1} Q_2(t,\tau)W(\tau),$$

$$q(t) \equiv f(t)\left(W(t)\right)^{-1},\ F(t;x,x',y,y') \equiv$$

$$\equiv F(t,x(t),\lambda x(t) + W(t)y(t),\lambda^2 x(t) + \left[W'(t) + \lambda W(t)\right]y(t) +$$

$$+W(t)y'(t),\int\limits_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau),\lambda x(\tau) + W(\tau)y(\tau),\lambda^2 x(\tau) +$$

$$+\left[W'(\tau) + \lambda W(\tau)\right]y(\tau) + W(\tau)y'(\tau))d\tau).$$

Пусть [3, с. 42–58; 2]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t)(W(t))^{-1} = \sum_{i=1}^{n} f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые срезывающие функции, $P_i(t) \equiv K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $Q_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t) \equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$,

$$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \tag{P}$$

$c_i(t)(i = 1...n)$ – некоторые функции.

Отметим, что ядра $Q_i(t,\tau)$ $(i = 1...n)$ названы частично срезанными [2].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ аналогично [4, с. 194–217] первое уравнение системы (3) умножаем на $x(t)$, а второе уравнение этой системы на $y'(t)$, полученные соотношения складываем, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом аналогично [3; 2] вводим функции $\psi_i(t),P_i(t),Q_i(t,\tau)$, используем лемму [2], вводим условия (P), функции $c_i(t)(i = 1...n)$. Тогда получаем следующее тождество:

$$
\begin{aligned}
&\left(x(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)\left(y'(s)\right)^2ds+b_1(t)\left(y(t)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\Big\{A_i(t)\left(Y_i(t,t_0)\right)^2+\\
&+B_i(t)\left(Y_i(t,t_0)\right)^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\Big[B_i'(s)\left(Y_i(s,t_0)\right)^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)\Big]ds\}\\
&\equiv c_*+2\lambda\int_{t_0}^{t}\left(x(s)\right)^2ds+2\int_{t_0}^{t}W(s)x(s)y(s)ds+\int_{t_0}^{t}b_1'(s)\left(y(s)\right)^2ds+\\
&+\sum_{i=1}^{n}[\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2ds+2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}Q_{i\tau}'(s,\tau)X_i(\tau,t_0)x(s)d\tau ds]+\\
&-2\int_{t_0}^{t}y'(s)\Big\{b_0(s)x(s)+\int_{t_0}^{s}\left[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)\right]d\tau+F(s;x,x',y,y')\Big\}ds,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y'(\eta)d\eta\quad(i=1..n),\ c_*=\left(x(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2+b_1(t_0)\left(y(t_0)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)\,.
$$

Отметим, что в отличие от [1] к ИДУ второго порядка для $y(t)$ системы (3) применили метод частичного срезывания С. Искандарова, Д.Н. Шабданова из статьи [2].

Переходом от тождества (4) к интегральному неравенству и применением леммы 1 [7] доказывается следующая

Теорема. Пусть

1) $\lambda>0, W(t)>0$, выполняются условия

2) $b_2(t)\ge 0;$

3) $b_1(t)\ge b_{10}>0,\ (K),(f),(P);$ существует функция $b_1^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $b_1'(t)\le b_1^*(t)b_1(t);$

4) $A_i(t)>0, B_i(t)\ge 0,\ B_i'(t)\le 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\ge 0,\ c_i(t)$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t),(E_i^{(k)}(t))^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ (i=1..n;\ k=0,1)$;

5)
$$
\begin{aligned}
&W(t)+\int_{t_0}^{t}\left|Q_{i\tau}'(t,\tau)\right|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau+\left|b_0(t)\right|+\int_{t_0}^{t}[\left|P_0(t,\tau)\right|+\left|P_1(t,\tau)\right|]d\tau+g_k(t)+\\
&+[g_1(t)+g_2(t)]W(t)+g_2(t)\left|W'(t)+\lambda W(t)\right|+\\
&+\int_{t_0}^{t}\{G_k(t,\tau)+[G_1(t,\tau)+G_2(t,\tau)]W(\tau)+G_2(t,\tau)\left|W'(\tau)+\lambda W(\tau)\right|\}d\tau\in\\
&\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})\ \ (G_k(t,\tau)\equiv g_3(t)h_k(t,\tau)\ \ (k=0,1,2)).
\end{aligned}
$$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (3) справедливы следующие оценки сверху:

$$
(x(t))^2+(y'(t))^2+b_{10}(y(t))^2\le c_{**}\exp[2\lambda(t-t_0),
\tag{5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&c_{**}=c_*\exp\int_{t_0}^{\infty}\{2W(s)(b_1(s))^{-\frac{1}{2}}+b_1^*(s)+\sum_{i=1}^{n}A_1^*(s)+2\int_{t_0}^{s}\left|Q_{i\tau}'(s,\tau)\right|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau]+\\
&+2\left|b_0(s)\right|+2\int_{t_0}^{s}[\left|P_0(s,\tau)\right|+\left|P_1(s,\tau)\right|(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}]d\tau+\\
&+2g_0(s)+2g_1(s)[\lambda+W(s)(b_1(s))^{-\frac{1}{2}}]+g_2(s)[\lambda^2+W(s)+\\
&+\left|W'(s)+\lambda W(s)\right|(b_1(s))^{-\frac{1}{2}}]+\int_{t_0}^{s}[G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\lambda+W(\tau))+
\end{aligned}
$$

$$+G_2(s,\tau)(\lambda^2+|W'(\tau)+\lambda W(\tau)|(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}+W(\tau)]d\tau\}ds<\infty,$$

т.е.

$$|x(t)|\le\sqrt{c_{**}}\,\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)},\tag{6}$$

$$|y(t)|\le\sqrt{\frac{c_{**}}{b_{10}}}\,\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)},\tag{7}$$

$$|y'(t)|\le\sqrt{c_{**}}\,\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}.\tag{8}$$

Далее из ДУ (2) методом Лагранжа [6, с. 391–394] получаем следующее интегральное представление для $x(t)$:

$$x(t)=e^{\lambda(t-t_0)}\left[x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\lambda(s-t_0)}W(s)y(s)ds\right].\tag{9}$$

Из (9) аналогично [7; 8] имеем оценку снизу для $|x(t)|$:

$$|x(t)|\ge e^{\lambda(t-t_0)}\left[|x(t_0)|-\int_{t_0}^{t}e^{-\lambda(s-t_0)}W(s)|y(s)|ds\right].\tag{10}$$

Подставляя (7) в (10), получаем оценку снизу:

$$|x(t)|\ge M\left(x(t_0),x'(t_0),x''(t_0)\right)e^{\lambda(t-t_0)},\tag{11}$$

где

$$M\left(x(t_0),x'(t_0),x''(t_0)\right)=|x(t_0)|-\sqrt{\frac{c_{**}}{b_{10}}}\int_{t_0}^{\infty}W(s)ds>0.\tag{12}$$

Из (11) вытекает

Следствие. Если выполняются все условия теоремы, то все решения $x(t)$ ИДУ (1), начальные условия которых берутся из многообразия начальных данных (12), стремятся к ∞ при $t\to\infty$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы, решения ИДУ третьего порядка (1), начальные данные $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1,2)$ которых взяты из многообразия начальных данных (12) не осциллируют и неустойчивы по Ляпунову.

Замечание. С учетом соотношений

$$c_*=(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+b_1(t_0)(y(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0),\ x'(t_0)=\lambda x(t_0)+W(t_0)y(t_0),$$

$$x''(t_0)=\lambda^2x(t_0)+[W'(t_0)+\lambda W(t_0)]y(t_0)+W(t_0)y'(t_0)$$

определяется многообразие начальных данных (12).

Таким образом, нами найден класс ИДУ третьего порядка вида (1), для которого выше сформулированная задача решаема.

Список литературы:

1. Искандаров С., Халилова Г.Т. Оценки снизу решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2011. – Спец. вып. – С. 61–65.

2. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С. 67–71.

3. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства

решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / пер. с фр. О.Н. Бондаренко под ред. Ю.М. Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 288 с.

5. Ведь Ю.А. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68–103.

6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.

7. Ведь Ю.А. Достаточные признаки отсутствия особенных точек у интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 123–135.

8. Китаева Л.Н. О наличии невертикальных асимптот у решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 213–222.