

УДК 519.174.7

*Л. И. Боголюбский¹, А. М. Райгородский^{1,2,3,4}*¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)³Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова⁴Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет

Об оценках в проблеме Борсука

Обсуждаются различные оценки, связанные с проблемой Борсука. Рассматриваются некоторые серии дистанционных графов и индуцированные ими двойственные конфигурации в пространствах «малых» размерностей и при росте размерности. К графам применяется модификация линейно-алгебраического метода, в результате получаются нижние оценки $f(d)$ — минимального числа частей множеств «меньшего диаметра» из проблемы Борсука в $\mathbb{R}^d$.

Ключевые слова: гипотеза Борсука, число Борсука, хроматическое число пространства, число независимости, проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера, дистанционный граф, разбиение, запрещённое расстояние, граф диаметров.

*L. I. Bogolubsky¹, A. M. Raigorodskii^{1,2,3,4}*¹M. V. Lomonosov Moscow State University²Moscow Institute of Physics and Technology³Banzarov Buryat State University⁴Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University

On bounds in Borsuk's problem

In this work we discuss various estimates connected with Borsuk's conjecture. We consider some series of distance graphs and corresponding induced dual configurations embedded to the spaces of «small dimensions» as well as in case of growing dimension. We then apply a modification of the linear algebra method to the graphs. This leads us to lower estimates of $f(d)$ – the minimal possible number of subsets of «smaller diameter» in terms of Borsuk's problem in $\mathbb{R}^d$.

Key words: Borsuk's conjecture, Borsuk number, chromatic number of a space, independence number, Hadwiger–Nelson problem, distance graph, partition, banned distance, diameter graph.

1. Введение и история проблемы

Проблема Борсука — вопрос в комбинаторной геометрии, посвящённый исследованию справедливости следующего утверждения. Дано евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ и произвольное множество диаметра 1 в этом пространстве. Гипотеза такова: *возможно разбить это множество на не более чем $d + 1$ подмножеств, каждое из которых будет иметь диаметр менее 1*. Эквивалентно: *любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на не более, чем $d + 1$ подмножеств меньшего диаметра*.

Гипотеза, ошибочно называемая гипотезой Борсука (сам Борсук такого утверждения не делал — он лишь задал вопрос!), в действительности неверна. Это было доказано Каном и Калаи в 1993 году в [1]. Интерес, однако, представляет дальнейшее изучение величины $f(d)$ — минимального числа подмножеств меньшего диаметра, на которые можно разбить

произвольное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, в зависимости от размерности d . В этих терминах опровергнутое предположение имеет вид

$$f(d) \leq d + 1 \quad \forall d \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Утверждение гипотезы (1) справедливо в некоторых частных случаях, например, при $d = 2$ (это доказал сам Борсук в 1932 г. в [2]), при $d = 3$ (Перкал в 1947 г. в [3]), для выпуклых тел с гладкой границей при всех d (доказано Хадвигером в [1] в 1946 г.), для всех центрально-симметричных тел при всех d (доказано Рислингом в [5] в 1971 г.), для всех тел вращения при всех d (доказано Декстером в [6] в 1995 г.), для множеств, инвариантных под действием группы симметрии d -симплекса (доказано Роджерсом в [7] в 1971 г.).

Однако же в 1993 году Кан и Калаи показали [1], что $f(1325) > 1326$, что опровергло (1). Далее события развивались следующим образом. В 1994 году Алон (под псевдонимом Нилли) нашёл [8] контрпример при $d = 946$. В 1997 году Райгородский уточнил [9] нижнюю грань размерности до 561. Затем в 2000 году Вайсбах понизил [10] её до 560. Далее, в 2002 году, последовали результаты Хинрикса [11] для $d = 323$ и Пихурко [12] для $d = 321$; в 2003 году Хинрикс и Рихтер опубликовали доказательство [13] следующего уточнения: $f(298) > 298 + 11$. В 2014 г. Бондаренко опроверг [14] гипотезу для $d \geq 65$, и, наконец, в том же году Йенрихом была получена [15] наилучшая известная на текущий момент нижняя грань, $d = 64$.

Более подробно с историей проблемы можно ознакомиться в [16] – [20].

Число $f(d)$ изучалось не только в «малых» размерностях, но и в асимптотике ($d \rightarrow \infty$). Известны как оценки сверху — например, в [21] показано, что

$$f(d) \leq (1.224 \dots + o(1))^d,$$

так и оценки снизу:

$$\begin{aligned} f(d) &\geq (1.203 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad (\text{Кан и Калаи, 1993, [1]}), \\ f(d) &\geq (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad (\text{Райгородский, 1999, [22]}). \end{aligned} \quad (2)$$

Интересен следующий факт. Наилучшая известная на текущий момент нижняя оценка (2) числа Борсука $f(d)$ в асимптотике была получена с помощью исследования серии *дистанционных графов* (см. раздел 2) с вершинами на сетке $\{-1, 0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$. С другой стороны, при некоторых «малых» d ($d = 561$, см. [9]) аналогичный подход даёт лучшие результаты за счёт дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 1\}^n$ (что эквивалентно использованию $\{0, 1\}$ -дистанционных графов). Кроме того, авторы последних работ, посвящённых «малым размерностям», вовсе оперируют не дистанционными графами: в статьях [11] и [13] для получения результатов использовались решётки, а в статьях [14] и [15] — сильно регулярные графы.

В какой момент с ростом d устанавливается «доминирование» $\{-1, 0, 1\}$ -дистанционных графов над $\{-1, 1\}$ -дистанционными графами? Как влияет добавление третьего возможного типа координат векторов — вершин графов на оценки при «малых» $d > 561$, то есть какие наилучшие оценки можно получить с использованием $\{-1, 0, 1\}$ -графов, $\{-1, 1\}$ -графов, когда предпочтительны какие из них? В настоящей работе мы исследуем эти вопросы, используя метод, основанный на нашей недавней публикации [24], посвящённой смежной проблеме комбинаторной геометрии — задаче Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о хроматическом числе пространства.

Дальнейшее изложение имеет следующую структуру. В разделе 2 будут даны основные нужные определения и в общих словах будет описана схема доказательства. В разделе 3 мы расскажем об известных вспомогательных результатах, связанных с линейно-алгебраическим методом в комбинаторике, а также сформулируем и докажем новые необходимые нам теоремы. В разделе 4 мы введём понятия двойственного перехода и обобщённого

двойственного перехода и опишем свойства этих отображений. В разделе 5 сформулируем и докажем нужные для получения оценок утверждения, специфичные для конкретных рассматриваемых нами серий дистанционных графов. Наконец, в разделах 6 и 7 мы окончательно сформулируем оценки для каждой из серий, опишем схему вычислений и приведём численные результаты.

2. Главные понятия и общая схема рассуждений

Дадим некоторые базовые определения.

Говоря о *графах*, мы будем рассматривать исключительно неориентированные графы без петель и кратных рёбер, то есть такие пары $G = (V, E)$, где V — произвольное (чаще — конечное и непустое) множество, а E — подмножество декартового произведения $V \times V$, не содержащее элементов вида (v, v) , но всегда содержащее элемент (u, v) одновременно с любым (v, u) , где $u, v \in V$.

Число независимости графа $G = (V, E)$ называется $\alpha(G)$ — наибольшая возможная мощность подмножества вершин $U \subset V$ такого, что никакие две из них не соединены ребром, то есть $(U \times U) \cap E = \emptyset$.

Хроматическим числом графа $G = (V, E)$ называется $\chi(G)$ — наименьшее возможное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины V таким образом, чтобы никакое ребро из E не соединяло две вершины одного цвета.

Для хроматического числа любого конечного графа $G = (V, E)$ имеем

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Дистанционным графом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ (метрика — стандартная ℓ_2) мы будем называть такой граф $G = (V, E)$, что каждая его вершина из V может быть отождествлена с некоторой точкой $\mathbb{R}^d$ таким образом, чтобы множество рёбер E совпало со множеством пар вершин, отстоящих друг от друга на некоторое запрещённое расстояние ρ_{crit} .

Графом диаметров для множества $V \subset \mathbb{R}^d$ называется такой граф $G = (V, E)$, что

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ell_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{diam } V\},$$

где

$$\text{diam } V = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \ell_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

В соответствии со сказанным в разделе 1 определим для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ его *число Борсука* как

$$f(\Omega) = \min\{f : \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_f, \quad \forall i \text{ diam } \Omega_i < \text{diam } \Omega\}, \quad (3)$$

а также определим

$$f(d) = \max_{\Omega \subset \mathbb{R}^d, \text{diam } \Omega = 1} f(\Omega).$$

Из определения следует тривиальный способ получения нижних оценок: если дано ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, то $f(d) \geq f(\Omega)$. Отметим, что здесь мы безболезненно отказались от требования $\text{diam } \Omega = 1$ за счёт гомотетии.

Легко видеть, что если $G = (V, E)$ — конечный граф диаметров, то число Борсука $f(V)$ множества вершин попросту совпадает с хроматическим числом графа $\chi(G)$. Это следует из того, что попадание двух смежных вершин графа диаметров в один «цветовой кластер» при некоторой раскраске V равносильно тому, что диаметр этого цветового кластера совпадает

с $\text{diam } V$, а значит¹, такие цветовые кластеры не могут выступить в роли множеств Ω_i из (3).

Рассуждения выше доказывают следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый конечный граф диаметров, $V \subset \mathbb{R}^d$. Тогда

$$f(d) \geq f(V) = \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}. \quad (4)$$

Утверждение полученной леммы ставит нас в условия, весьма сходные с начальными условиями недавней работы авторов [24], поэтому дальнейшие рассуждения будут сходными с рассуждениями из упомянутой статьи. Мы приводим их здесь целиком.

В тексте статьи будем придерживаться следующих обозначений: n -мерные векторы будем обозначать $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$. Их координаты будем обозначать $x_1, y_1, \dots$, подразумевая всегда $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

3. Линейно-алгебраический метод

В этом разделе мы сперва сформулируем теорему, необходимую для доказательства нужных нам верхних оценок чисел независимости дистанционных графов посредством линейно-алгебраического метода. Эта теорема была доказана в [24] (теорема 4 в цитируемой статье). Затем будут изложены соображения, позволяющие прийти к новым теоремам для случая $\{-1, 1\}$ -векторов. Все эти теоремы будут необходимы нам для рассмотрения некоторых серий дистанционных графов в контексте отыскания нижних оценок чисел Борсука. Отметим, что подробнее с классическим линейно-алгебраическим методом можно ознакомиться, например, по книге [25].

Теорема 1. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$ для любого $\mathbf{x} \in \Sigma$, и подсовкупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r \pmod{p^\alpha},$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, а $r \in \mathbb{N}$ — некоторая константа. Пусть также $r \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{D}} \binom{n}{m_1} \binom{n - m_1}{m_2},$$

где

$$\mathcal{D} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m_1 + 2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1}. \quad (5)$$

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему для $\{-1, 1\}$ -векторов.

¹Здесь важно, что G — конечный граф. В случае бесконечных графов диаметров совпадение числа Борсука с хроматическим числом не имеет места. Контрпример следующий. Рассмотрим граф диаметров единичной сферы $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Этот граф двудольный, так что его хроматическое число — двойка. В то же время классическая теорема Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана утверждает, что $f(S^{d-1}) = d + 1$. Подробнее см. [23]. На интуитивном уровне можно представить «правильную» раскраску двумерной единичной сферы в два цвета, где каждый из двух кластеров является объединением открытой полусферы с полуоткрытым полуэкватором. Диаметр каждого из таких кластеров равен единице.

Теорема 2. Пусть p — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ таких, что первые F координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \{r_0 = 0, r_1\} \pmod{p^\alpha},$$

где $r_1 \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$, причём $r_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Тогда справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha-2} \binom{n-F}{k}.$$

Доказательство. Для произвольного $\mathbf{x} \in \Sigma$ рассмотрим функцию

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^\beta} \prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha-1\} \setminus \{r_1\}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

где аргумент $\mathbf{y}$ — некоторый вектор из Σ , а $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — максимальная степень вхождения p в число

$$\prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha-1\} \setminus \{r_1\}} i.$$

Лемма 2. При любом $\mathbf{y} \in \Sigma$ справедливы следующие утверждения.

- 1) $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$.
- 2) Если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, то $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$.
- 3) Если верно, что

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r_1 \pmod{p^\alpha}, \end{cases} \quad (6)$$

то $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$.

Доказательство. Доказательство пункта 1 разделим на части. Случай, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ будет попутно разобран при доказательстве пункта 2; случай, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pmod{p^\alpha}$ не лежит во множестве $\{0, r_1\}$ — при доказательстве пункта 3. В самом конце останется убедиться в целочисленности значений функции в случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r_1 \pmod{p^\alpha}$.

Докажем утверждение пункта 2. Нам известно, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$. Требуется показать, что $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Рассмотрим два случая.

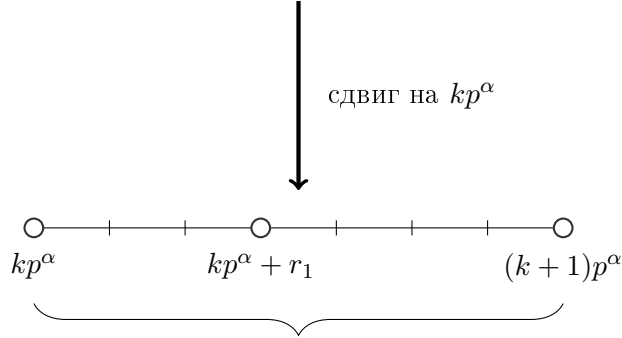
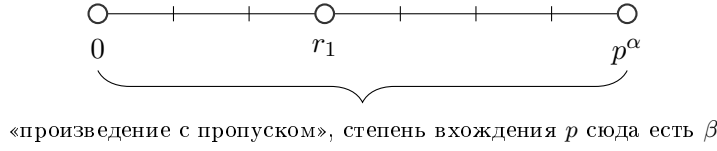
Пусть сперва $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Тогда

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^\beta} \prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha-1\} \setminus \{r_1\}} i = \frac{D p^\beta}{p^\beta} = D,$$

где, по определению β , $D \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Пусть теперь $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -kp^\alpha$ для некоторого $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нужно убедиться, что «сдвиг вправо» на kp^α единиц «произведения с пропуском» не приведёт к тому, что «сдвинутое произведение с пропуском» будет иметь степень вхождения p большую, чем β .



Пусть $D_Q(S)$ — количество чисел, кратных $Q \in \mathbb{N}$, среди элементов некоторого множества целых чисел S .

Вычислим β' .

$$\begin{aligned} \beta' &= \sum_{\gamma=1}^{\infty} [D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + 1, \dots, kp^\alpha + r_1 - 1\}) + D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + r_1 + 1, \dots, (k+1)p^\alpha - 1\})] = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} [D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + 1, \dots, kp^\alpha + r_1 - 1\}) + D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + r_1 + 1, \dots, (k+1)p^\alpha - 1\})] + \\ &+ \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\infty} [D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + 1, \dots, kp^\alpha + r_1 - 1\}) + D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + r_1 + 1, \dots, (k+1)p^\alpha - 1\})]. \end{aligned}$$

Две полученные суммы назовём *первой суммой* и *второй суммой*.

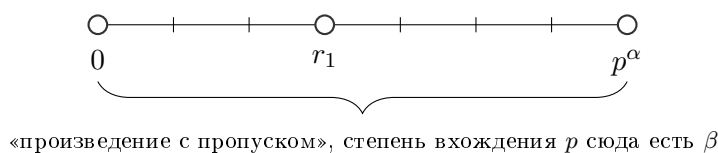
Допустим, что вторая сумма ненулевая. Тогда для некоторого $l \in \mathbb{N}$ верно $kp^\alpha < lp^{\alpha+1} < (k+1)p^\alpha$, то есть $k < lp < k+1$, чего не может быть при $lp \in \mathbb{N}$. Так что вторая сумма равна нулю. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} [D_{p^\gamma}(\{1, \dots, r_1 - 1\}) + D_{p^\gamma}(\{r_1 + 1, \dots, p^\alpha - 1\})], \\ \beta' &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} [D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + 1, \dots, kp^\alpha + r_1 - 1\}) + D_{p^\gamma}(\{kp^\alpha + r_1 + 1, \dots, (k+1)p^\alpha - 1\})]. \end{aligned}$$

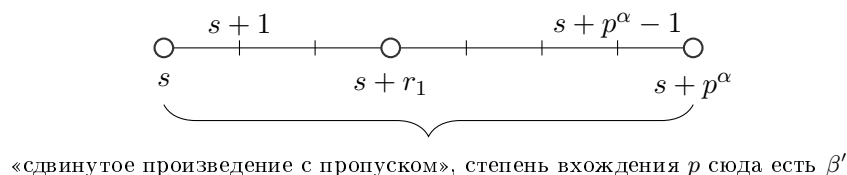
При $\gamma \leq \alpha$ внутренние слагаемые совпадают, так как сдвиг множества вправо на kp^α не влияет на делимость его элементов на p^γ (так как $kp^\alpha \bmod p^\gamma \equiv 0$). Поэтому $\beta' = \beta$, следовательно, $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$. Это завершает доказательство пункта 2.

Перейдём к доказательству пункта 3. Нам известно, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bmod p^\alpha \notin \{0, r_1\}$. Требуется показать, что от сдвига вправо на $-(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ единиц полученное «сдвинутое произведение с пропуском» получит хотя бы одно дополнительное вхождение p по сравнению с обычным «произведением с пропуском» $\prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\} \setminus \{r_1\}} i$.

Назовём *сдвигом* число $s = -(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (конечно, сдвиг зависит от $\mathbf{x}, \mathbf{y}$). Изобразим «сдвинутое произведение с пропуском» и его прообраз относительно сдвига — обычное «произведение с пропуском».



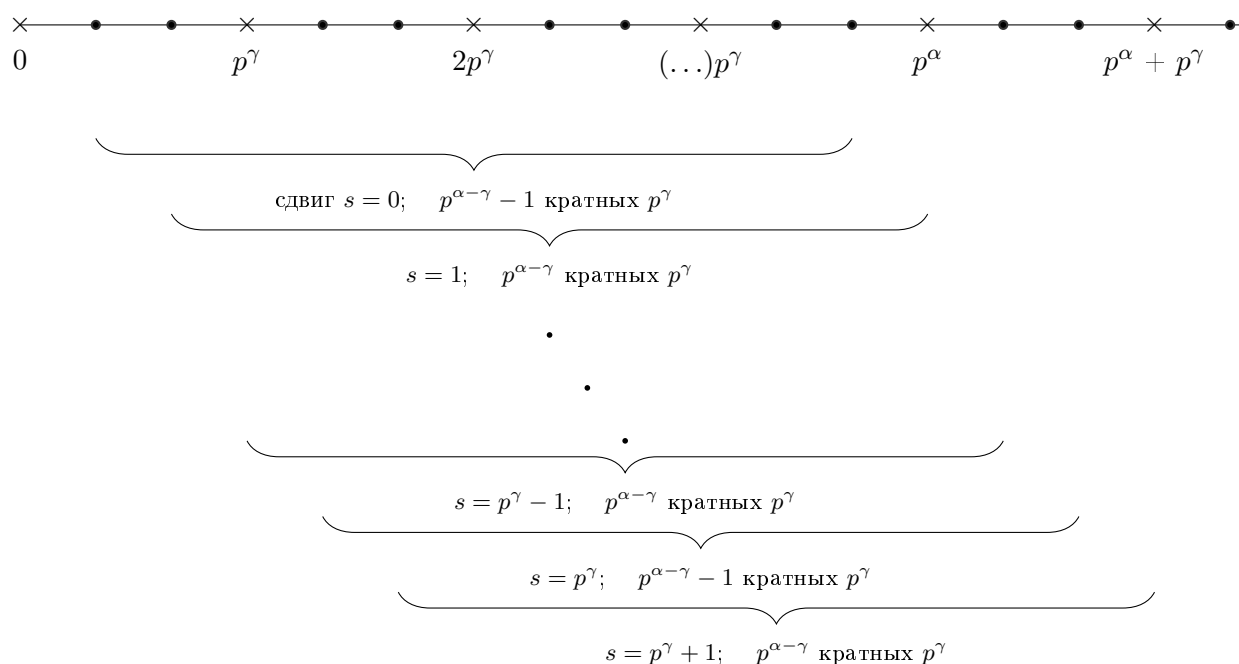
сдвиг на s вправо



Для произвольного $\gamma \in \mathbb{N}$ рассмотрим изменение $D_{p^\gamma}(\dots)$ – числа вхождений p^γ (в точности) после сдвига. Для этого рассмотрим элементы обычного «произведения с пропуском» как разность двух множеств: «целочисленного отрезка» $S = \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$ и ненулевого запрета $\{r_1\}$.

Рассмотрим влияние «пропуска» r_1 на изменение числа вхождений p^γ . Напомним, что $r_1 \not\equiv 0 \pmod p$, т.е. r_1 не даёт ни единого вхождения до сдвига; однако же в случае, когда $r_1 + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$ ($\iff r_1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$), после сдвига мы утрачиваем вхождение p^γ . Итак, «пропуск» может уменьшить на единицу число вхождений каждого из p^γ в «сдвинутое произведение с пропуском» по сравнению с обычным «произведением с пропуском».

С другой стороны, рассмотрим аналогичное влияние на разницу числа вхождений p^γ со стороны «целочисленного отрезка» S . А именно, для фиксированного $\gamma \leq \alpha$ рассмотрим все возможные остатки сдвига s по модулю p^γ , и для каждого из остатков определим число кратных p^γ в сдвинутом целочисленном отрезке.



Как можно видеть, ситуация здесь следующая. При сдвигах вида $s \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$ сдвинутый целочисленный отрезок содержит столько же чисел, кратных p^γ , что и целочисленный

отрезок до сдвига; в случае же $s \not\equiv 0 \pmod{p^\gamma}$ прирост числа вхождений после сдвига составляет $+1$.

Теперь, объединяя рассуждения о влиянии пропуска и целочисленного отрезка, оценим разницу между степенью вхождения p в сдвинутое произведение с пропуском β' и степенью вхождения p в обычное произведение с пропуском β , чтобы убедиться, что при сдвиге эта степень вхождения возросла. Пусть Δ_γ — разница в числе вхождений чисел, кратных p^γ .

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta' - \beta = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \Delta_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \Delta_\gamma + \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\infty} \Delta_\gamma \geq \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \Delta_\gamma = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} [\mathbb{1}(s \not\equiv 0 \pmod{p^\gamma}) - \mathbb{1}(r_1 + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma})] = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} [1 - [\mathbb{1}(r_0 + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma}) + \mathbb{1}(r_1 + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma})]] = \alpha - \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \sum_{i=0}^1 \mathbb{1}(r_i + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma}).\end{aligned}$$

При этом

$$\sum_{\gamma=1}^{\alpha} \sum_{i=0}^1 \mathbb{1}(r_i + s \equiv 0 \pmod{p^\gamma}) = \sum_{\gamma=1}^{\alpha-1} \sum_{i=0}^1 \mathbb{1}((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r_i \pmod{p^\gamma}) + \sum_{i=0}^1 \mathbb{1}((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r_i \pmod{p^\alpha}).$$

Первая сумма не превосходит $\alpha - 1$ вследствие требования $r_1 \not\equiv r_0 \pmod{p}$. Вторая сумма обращается в ноль по условию.

Итого

$$\Delta = \beta' - \beta \geq \alpha - (\alpha - 1) = 1,$$

то есть «сдвинутое произведение с пропуском» точно имеет большую степень вхождения p , чем обычное «произведение с пропуском», что и завершает доказательство пункта 3.

От доказательства леммы нас теперь отделяет только доказательство целочисленности из пункта 1. А именно, нужно показать, что условие

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r_1 \pmod{p^\alpha}$$

гарантирует целочисленность величины

$$\frac{1}{p^\beta} \prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\} \setminus \{r_1\}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r_1 \pmod{p^\alpha}$. По аналогии с доказательством пункта 3 вычислим Δ :

$$\Delta = \beta' - \beta = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \Delta_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \Delta_\gamma + \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\infty} \Delta_\gamma.$$

Отметим, вторая из сумм $\sum_{\gamma=\alpha+1}^{\infty} \Delta_\gamma$ неотрицательна, так как «произведение с пропуском» до сдвига точно не содержало чисел, кратных $p^{\alpha+1}$. Для первой же суммы запишем:

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma=1}^{\alpha} \Delta_\gamma &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \left[\mathbb{1}(s \not\equiv 0 \pmod{p^\gamma}) - \mathbb{1}((r_1 + s) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}) \right] = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \left[\mathbb{1}(r_1 \not\equiv 0 \pmod{p^\gamma}) - \mathbb{1}((-r_1 + r_1) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}) \right] = 0.\end{aligned}$$

Итак, $\Delta \geq 0$, так что величина целочисленна, тем самым пункт 1 доказан, доказана и лемма 2 в целом.

□

Вернёмся теперь к доказательству теоремы 2. Полагая

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

распишем скалярное произведение в $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$:

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^\beta} \prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\} \setminus \{r_1\}} (i - [x_1 y_1 + \dots + x_n y_n]).$$

Рассматривая при произвольном фиксированном $\mathbf{x} \in \Sigma$ функцию $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ как отображение координат $(y_1, \dots, y_n)$, раскроем в полученном выражении скобки и, пользуясь тем, что в предположении теоремы $y_i^2 = 1$, заменим все квадраты переменных на тождественную единицу. Получим некоторый многочлен

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^\beta} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n \leq p^\alpha - 2, \quad \beta_k \in \{0, 1\}} \gamma_{\beta_1 \dots \beta_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, \quad (7)$$

Здесь, конечно, подразумевается, что коэффициенты многочлена $\gamma_{\beta_1 \dots \beta_n}$ зависят от вектора $\mathbf{x}$. Отметим свойство $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$: значения этого многочлена совпадают со значениями $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$. Это позволяет нам сформулировать следующую лемму:

Лемма 3. Пусть некоторое подмножество векторов $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$ таково, что для любых $i, j, i \neq j$ верно

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{r_0 = 0, r_1\} \pmod{p^\alpha}.$$

Тогда соответствующие этим векторам многочлены $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Предположим, что многочлены линейно зависимы, то есть пусть для некоторых констант $c'_1, \dots, c'_s \in \mathbb{Q}$, не равных нулю одновременно, справедливо

$$c'_1 \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_1} + \dots + c'_s \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_s} = 0,$$

то есть линейная комбинация многочленов — тождественный ноль. Домножив рациональные дроби c'_i на произведение их знаменателей, а затем разделив нацело полученные коэффициенты одновременно на наибольшую возможную степень p , получим для некоторых целых c_i , не делящихся на p одновременно,

$$c_1 \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_s \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) = 0$$

для произвольного $\mathbf{y} \in \Sigma$.

Теперь в это равенство подставим поочерёдно $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_s$, а затем рассмотрим его по модулю p . В соответствии с леммой 2 мы при $i \neq j$ имеем $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p}$, а при $i = j$, напротив, $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_j) \not\equiv 0 \pmod{p}$, так как $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$. Поэтому получаем при любом $j = 1, \dots, s$

$$c_j \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p},$$

а значит, $c_j \equiv 0 \pmod{p}$ при всех $j = 1 \dots s$, что приводит нас к противоречию — коэффициенты не должны делиться на p одновременно. □

С помощью доказанной леммы 3 мы можем оценить $|\mathcal{F}|$ сверху размерностью минимального по включению линейного пространства над полем $\mathbb{Q}$, содержащего все (т.е. для всех $\mathbf{x} \in \Sigma$) многочлены $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$. Оценку же этой размерности сверху проведём, пользуясь представлением (7) — подсчитаем количество элементов соответствующего базиса. С учётом того, что первые F координат фиксированы, и включать соответствующие y_i в базисные мономы не имеет смысла, получаем:

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha-2} \binom{n-F}{k},$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

Полученная теорема допускает обобщение на случай ненулевого остатка n по модулю p^α . А именно, справедлива следующая (более общая)

Теорема 3. Пусть p — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv -\varepsilon \pmod{p^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ таких, что первые F координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \{r'_0, r'_1\} \pmod{p^\alpha},$$

где $r'_i = r_i - \varepsilon$, $i = 0, 1$, причём $r_1 \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$, $r_0 = 0$ и выполнено условие

$$r_0 \not\equiv r_1 \pmod{p}. \quad (8)$$

Тогда справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha-2} \binom{n-F}{k}.$$

Доказательство. Доказательство будет проведено по тому же плану, что и доказательство теоремы 2.

Для произвольного $\mathbf{x} \in \Sigma$ рассмотрим функцию

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^\varepsilon(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^\beta} \prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha-1\} \setminus \{r_1\}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varepsilon),$$

где аргумент $\mathbf{y}$ — некоторый вектор из Σ , а $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — максимальная степень вхождения p в число

$$\prod_{i \in \{1, \dots, p^\alpha-1\} \setminus \{r_1\}} i.$$

Лемма 4. При любом $\mathbf{y} \in \Sigma$ справедливы утверждения:

- 1) $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^\varepsilon(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$.
- 2) Если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -\varepsilon \pmod{p^\alpha}$, то $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^\varepsilon(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$.
- 3) Если верно, что

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv -\varepsilon \pmod{p^\alpha}, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r_1 - \varepsilon \pmod{p^\alpha}, \end{cases} \quad (9)$$

то $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^\varepsilon(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 2 — достаточно заметить, что значения $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^\varepsilon(\mathbf{y})$ можно получать, формально увеличивая на ε величину $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в формуле для вычисления $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$. $\square$

Построим многочлены $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}$ по $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}$ аналогично тому, как строились $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}$ по $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}$ — то есть раскроем скобки и заменим все квадраты y_i на тождественную единицу:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^{\beta}} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n \leq p^{\alpha} - 2, \beta_k \in \{0,1\}} \gamma_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\varepsilon} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}. \quad (10)$$

Для $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}(\mathbf{y})$ также имеет место совпадение по значению с $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}(\mathbf{y})$, а кроме того, для этих многочленов верна аналогичная лемме 3 лемма о линейной независимости.

Лемма 5. Пусть некоторое подмножество векторов $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$ таково, что для любых $i, j, i \neq j$ верно

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{-\varepsilon, r_1 - \varepsilon\} \pmod{p^{\alpha}}.$$

Тогда соответствующие этим векторам многочлены $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_1}^{\varepsilon}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}_s}^{\varepsilon}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Полностью аналогично доказательству леммы 3 ввиду того, что для любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ верно $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. $\square$

Тем самым, мы снова можем оценить размерность в соответствии с (10) и прийти к оценке

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^{\alpha}-2} \binom{n-F}{k},$$

что завершает доказательство теоремы 3. $\square$

4. Двойственный переход

4.1. Простой двойственный переход

Пусть $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ — произвольная совокупность векторов. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \Sigma$ определим его образ при (простом) двойственном переходе:

$$(\mathbf{x} * \mathbf{x})_{ij} = x_i x_j.$$

Двойственную конфигурацию — образ всей совокупности Σ при двойственном переходе $*$ будем обозначать Σ^* .

Здесь формально $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а $\mathbf{x} * \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^2}$. Однако, как мы увидим в дальнейшем, размерность Σ^* возможно некоторым образом уточнить в интересных нам частных случаях (см. лемму 15).

Скалярное произведение двух «двойственных элементов» определим естественным образом:

$$(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x} * \mathbf{x})_{ij} (\mathbf{y} * \mathbf{y})_{ij}.$$

Лемма 6. Справедливо равенство

$$(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

Доказательство.

$$(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x} * \mathbf{x})_{ij} (\mathbf{y} * \mathbf{y})_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j y_i y_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

$\square$

Изучим метрику, индуцированную таким скалярным произведением.

Лемма 7. Пусть совокупность $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такова, что во всех её векторах содержится одинаковое количество ненулевых координат, то есть для некоторого $r \in \mathbb{N}$ и любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$. Тогда максимальное расстояние между элементами двойственной конфигурации Σ^* достигается на таких парах векторов, что модули скалярных произведений прообразов этих векторов при отображении $*$ минимальны возможные.

Доказательство. Пользуясь леммой 6, вычислим квадрат расстояния между некоторыми произвольными векторами $\mathbf{x} * \mathbf{x}$ и $\mathbf{y} * \mathbf{y}$ из двойственной конфигурации:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}, \mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{x} * \mathbf{x}) + (\mathbf{y} * \mathbf{y}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x})^2 + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = 2r^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Так как r постоянно, то расстояние в двойственной конфигурации тем больше, чем меньше модуль скалярного произведения в исходной конфигурации Σ , что и требовалось доказать. $\square$

4.2. Обобщённый двойственный переход

Теперь опишем обобщение понятия двойственного перехода, введённого в разделе 4.1.

Пусть выбраны числа $I, J \in \mathbb{N}$, $F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с условиями $I \leq J$, $F \in \{J-1, J\}$. Предположим, что совокупность Σ такова, что первые F координат каждого из её векторов равны $+1$. Определим образ вектора $\mathbf{x}$ при (I, J, F) -двойственном переходе (обобщённом) следующим образом:

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{ij} = x_i \cdot x_j, i = I, \dots, n, j = J, \dots, n.$$

Отметим, что двойственный переход $*$ является частным случаем двойственного перехода $\otimes$, точнее, $*$ — это $(1, 1, 0)$ -обобщённый двойственный переход $\otimes$.

Также зададим скалярное произведение на парах векторов из двойственной конфигурации $\Sigma^\otimes$ (то есть из образа Σ под действием $\otimes$):

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{i=I}^n \sum_{j=J}^n (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{ij} (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{ij}.$$

Лемма 8. В сделанных допущениях справедливо равенство

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) = ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (J - 1)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) &= \sum_{i=I}^n \sum_{j=J}^n (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{ij} (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{ij} = \sum_{i=I}^n \sum_{j=J}^n x_i x_j y_i y_j = \left(\sum_{i=I}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{j=J}^n x_j y_j \right) = \\ &= ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (J - 1)). \end{aligned}$$

Здесь в последнем переходе мы воспользовались тем, что $I - 1 \leq J - 1 \leq F$, а первые F координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это обязательно единицы. $\square$

Рассмотрим вопрос о биективности двойственного перехода.

Лемма 9. Пусть $F \geq I$. Тогда (I, J, F) -двойственный переход биективен.

Замечание. Отметим, что условие $F \geq I$ автоматически влечёт условие $F \geq 1$, то есть мы обязательно фиксируем хотя бы одну единичную координату.

Доказательство. Покажем, что если для двух векторов исходной конфигурации $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ совпадают образы при двойственном переходе, то есть если

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{y} \otimes \mathbf{y},$$

то и сами векторы совпадают.

Рассмотрим случай $F = J - 1$ (изображён, например, на рис. 3). Рассмотрим набор равенств

$$\begin{aligned} x_I x_J &= (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{IJ} = (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{IJ} = y_I y_J, \\ x_I x_{J+1} &= (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{I, J+1} = (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{I, J+1} = y_I y_{J+1}, \\ &\dots \\ x_I x_n &= (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{In} = (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{In} = y_I y_n. \end{aligned}$$

В связи с тем, что $x_I = y_I = 1$, моментально получаем совпадение координат $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с J -й по n -ю включительно. А так как $F = J - 1$, имеем ещё $x_1 = \dots = x_{J-1} = y_1 = \dots = y_{J-1} = 1$. Тем самым векторы-прообразы совпадают полностью.

Доказательство для случая $F = J$ (изображён, например, на рис. 2) абсолютно аналогично. $\square$

Лемма 10. *Двойственный переход $*$ биективен на множествах векторов таких, что ненулевая координата с наименьшим индексом каждого из них есть $+1$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathbf{x} * \mathbf{x} = \mathbf{y} * \mathbf{y}$, причём известно, что первые ненулевые координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ есть $+1$. Покажем, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Пусть x_i — координата $\mathbf{x}$ с наименьшим индексом. По предположению имеем набор равенств

$$\begin{aligned} x_i x_i &= y_i y_i, \\ x_i x_{i+1} &= y_i y_{i+1}, \\ &\dots \\ x_i x_n &= y_i y_n, \end{aligned}$$

причём $x_i = 1$. Пусть y_j — первая ненулевая координата $\mathbf{y}$, и $j \neq i$. Тогда $j < i$, и имеем противоречие вида $0 = x_j x_j = y_j y_j \neq 0$. Стало быть, $j = i$, поэтому $y_i = 1$. Комбинируя вышесказанное, получаем покоординатное совпадение векторов: $x_i = y_i = 1, x_{i+1} = y_{i+1}, \dots, x_n = y_n$, а остальные координаты векторов нулевые; итак, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, что и требовалось доказать. $\square$

Изучим теперь метрику, индуцированную на $\Sigma^{\otimes}$ введённым скалярным произведением.

Лемма 11. *Пусть совокупность $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такова, что во всех её векторах содержится одинаковое количество ненулевых координат, то есть для некоторого $r \in \mathbb{N}$ и любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$, а также пусть первые F координат каждого из векторов Σ равны 1. Пусть заданы некоторые $I, J \in \mathbb{N}, F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с условиями $I \leq J, F \geq I, F \in \{J-1, J\}$. Тогда максимальное расстояние между элементами двойственной конфигурации $\Sigma^{\otimes}$ достигается на таких парах векторов, что скалярные произведения прообразов этих векторов при отображении $\otimes$ минимизируют значения квадратного трёхчлена $(t - (I-1)) \cdot (t - (J-1))$ на множестве возможных скалярных произведений векторов из Σ .*

Доказательство. Вычислим квадрат расстояния между двумя произвольными векторами двойственной конфигурации $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ с учётом леммы 8:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) + (\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) = \\ &= ((\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (J - 1)) + ((\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (J - 1)) - \\ &\quad - 2((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (J - 1)) = \\ &= 2(r - (I - 1)) \cdot (r - (J - 1)) - 2((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (I - 1)) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (J - 1)). \end{aligned}$$

Таким образом, расстояние в двойственной конфигурации максимально при значениях скалярного произведения в исходной конфигурации, минимизирующих квадратный трёхчлен $(t - (I - 1)) \cdot (t - (J - 1))$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 12. Пусть совокупность $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такова, что во всех её векторах содержится одинаковое количество ненулевых координат, то есть для некоторого $r \in \mathbb{N}$ и любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$, а также пусть первые F координат каждого из векторов Σ равны 1. Пусть заданы некоторые $I, J \in \mathbb{N}$, $F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с условиями $I \leq J$, $F \geq I$, $F \in \{J - 1, J\}$. Также пусть для некоторого $\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определены числа

$$r'_1 = I - 1 - \delta, r'_2 = J - 1 + \delta$$

такие, что для некоторых $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in \Sigma$ справедливо $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = r'_1$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = r'_2$, но не существует таких $\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3 \in \Sigma$, что

$$r'_1 < (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) < r'_2.$$

Тогда расстояние между векторами $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ из $\Sigma^{\otimes}$ принимает максимальное возможное значение, если и только если выполнено одно из условий $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_1$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_2$.

Доказательство. Следует из леммы 11 ввиду того, что r'_1 и r'_2 минимизируют квадратный трёхчлен $(t - (I - 1)) \cdot (t - (J - 1))$ на множестве скалярных произведений элементов Σ . $\square$

5. Общие замечания о сериях графов

Лемма 13. (О чётном числе единиц и совпадении остатков.) Пусть каждый вектор некоторой совокупности $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ таков, что количество его положительных координат чётно. Тогда для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ справедливо

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv n \pmod{4}.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение двух данных векторов, условно изобразив (см. рис. 1) их следующим образом: сначала пусть идут все единицы, имеющиеся среди координат $\mathbf{x}$, а затем пусть идут минус единицы. Под единицами из $\mathbf{x}$ расположим сперва единицы из $\mathbf{y}$, а затем минус единицы из $\mathbf{y}$ — в таком же количестве, в котором они присутствуют в $\mathbf{y}$ на позициях, где в $\mathbf{x}$ находятся единицы. Аналогично изобразим и оставшуюся часть координат $\mathbf{y}$, соответствующую минус единицам из $\mathbf{x}$.

Теперь координаты вектора $\mathbf{y}$ разбились на 4 группы — на рисунке они идут одна за другой. Условимся, что в первую группу входит a единиц, а в третью — c минус единиц. Также условимся, что среди координат $\mathbf{x}$ ровно k_1 единиц и k_{-1} минус единиц. В этих обозначениях скалярное произведение двух векторов можно выразить так:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a - (k_1 - a) + c - (k_{-1} - c) = 2a + 2c - k_1 - k_{-1}.$$

При этом мы знаем, что k_1 чётно и что $a + (k_{-1} - c)$ чётно (так как это число единиц среди координат $\mathbf{y}$). Получаем:

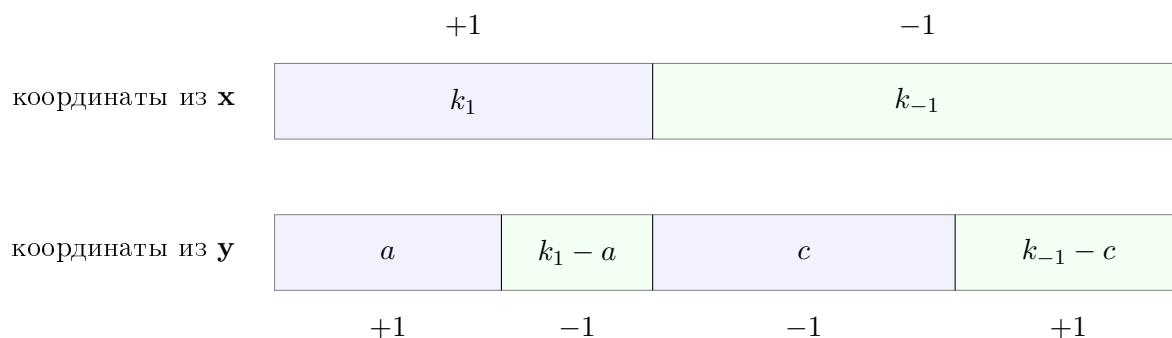


Рис. 1. Сопоставление единиц и минус единиц в двух векторах

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2a + 2c - k_1 - k_{-1} = 4a - 2a - 2k_{-1} + k_{-1} + 2c - k_1 = \\
 &= 4a - 2(a + k_{-1} - c) + k_{-1} - k_1 = \\
 &= 4a - 2(a + k_{-1} - c) - 2k_1 + k_{-1} + k_1 = 4(\dots) + n.
 \end{aligned}$$

В последнем переходе мы учли, что число $(a + k_{-1} - c)$ чётно и k_1 чётно, а многоточием обозначили некоторое целое число. Как видим, остаток от деления $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на 4 совпадает с остатком от деления n на 4.

□

Лемма 14. (*О запрете*). Пусть p — нечётное простое число, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, а $n = 4p^\alpha - \varepsilon$. Пусть $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ — произвольная совокупность векторов такая, что все её векторы содержат чётное число единиц, а первые F координат каждого из её векторов равны единице, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$. Пусть число $r'_1 \in \mathbb{Z}$ таково, что выполнены условия

$$r'_1 \equiv n \pmod{4}$$

и

$$\begin{cases} r'_1 - 4p^\alpha < 2F - n, \\ r'_1 + 4p^\alpha \geq n \end{cases}$$

(второе условие эквивалентно неравенству $-\varepsilon \leq r'_1 < 2F + \varepsilon$).

Тогда для произвольных двух различных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ имеет место эквивалентность

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r'_1 \pmod{p^\alpha} \iff (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_1.$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r'_1 \pmod{p^\alpha}$. Заметим, что скалярные произведения векторов Σ могут принимать значения от $2F - n$ до n включительно, причём значение n достигается только на парах совпадающих векторов.

Заметим, что если $r'_1 > -\varepsilon$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq r'_1 + 4p^\alpha$, т.к. $r'_1 + 4p^\alpha > n$.

Если же $r'_1 = -\varepsilon$, то предположим, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_1 + 4p^\alpha$. Тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4p^\alpha - \varepsilon = n$, то есть $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, что не так по условию.

С другой стороны, по условию леммы $r'_1 - 4p^\alpha < 2F - n$, так что скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ не может принять значение $r'_1 - 4p^\alpha$.

Следовательно, при $r'_1 \geq -\varepsilon$ если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r'_1 \pmod{p^\alpha}$, то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_1 + Bp^\alpha,$$

где $B \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Возьмём это равенство по модулю 4. С учётом леммы 13 получим

$$Bp^\alpha \equiv 0 \pmod{4}.$$

Так как p нечётно, это значит, что $B = 0$, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r'_1$.

Доказательство в обратную сторону тривиально.

□

Условимся, что мы считаем, что в координатах векторов всегда n координат, среди которых количество минус единиц, нулей и единиц составляет соответственно k_{-1} , k_0 и k_1

$$k_{-1} + k_0 + k_1 = n.$$

Лемма 15. (О размерностях) Пусть числа $n, I, J, F \in \mathbb{N}$ таковы, что $I \leq J$, $J \leq n$ и $F \in \{J-1, J\}$. Рассмотрим множество n -мерных векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$, которое назовём исходной конфигурацией. Пусть для каждого из векторов исходной конфигурации справедливо, что первые F его координат равны 1. Пусть также количество ненулевых элементов в векторах Σ фиксировано, то есть для некоторого $r \in \mathbb{N}$ и любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$.

Понимая под размерностью двойственной конфигурации² размерность минимального по включению аффинного пространства, её содержащего, рассмотрим $\dim \Sigma^\otimes$. Справедливы следующие оценки.

Если $F = J$, а все элементы векторов исходной конфигурации суть ± 1 , то

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2}. \quad (11)$$

Если $F = J$, элементы векторов Σ могут принимать значения из $\{-1, 0, 1\}$, а $J = 1$, то

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-2) = \frac{n(n+1)}{2} - 2. \quad (12)$$

Если же $F = J$, элементы векторов Σ могут принимать значения из $\{-1, 0, 1\}$, но $J > 1$, то

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-J+1). \quad (13)$$

Если $F = J-1$, координаты векторов исходной конфигурации суть ± 1 , то

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-J+1). \quad (14)$$

Если же $F = J-1$, но координаты векторов Σ — из множества $\{-1, 0, 1\}$, то

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + 2(n-J+1). \quad (15)$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $F = J$ (рис. 2).

Если все координаты векторов Σ есть ± 1 , размерность $\Sigma^\otimes$ оценивается мощностью «половины квадрата без диагонали» (с учётом $x_J = 1$). Мощность диагонали считать не нужно, так как на ней $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{ii} = 1$. Отсюда $\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2}$, что доказывает (11).

Если координаты векторов Σ — из множества $\{-1, 0, 1\}$, то к аналогичному слагаемому, соответствующему «половине квадрата без диагонали», добавляется размерность подпространства, соответствующего «куску диагонали». Заметим, что сумма всех диагональных элементов $\Sigma^\otimes$ постоянна. Также отметим, что при $J = 1$ не нужно учитывать первый диагональный элемент, равный 1. Поэтому в случае $J = 1$ получаем оценку

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-2) = \frac{n(n+1)}{2} - 2,$$

а в случае $J > 1$ воспользоваться соотношением на сумму диагональных элементов не получается, и получаем оценку

$$\dim \Sigma^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-J+1),$$

²Отметим, что каждый из векторов $\Sigma^\otimes$ содержит $(n-I+1)(n-J+1)$ координат.

что доказывает (12) и (13).

Теперь рассмотрим случай $F = J - 1$ (рис. 3).

Если координаты векторов исходной конфигурации суть ± 1 , оценка размерности складывается из мощности «половины квадрата без диагонали» и $(n - J + 1)$ — размерности подпространства элементов $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})_{ij}$, $i = I, \dots, F$, $j = J, \dots, n$. Диагональ считать не нужно — в двойственной конфигурации на ней всегда единицы. Получаем

$$\dim \Sigma^{\otimes} \leq \binom{n - J + 1}{2} + (n - J + 1).$$

Если координаты векторов Σ — из множества $\{-1, 0, 1\}$, то добавляется размерность подпространства, соответствующего диагонали. Получаем

$$\dim \Sigma^{\otimes} \leq \binom{n - J + 1}{2} + 2(n - J + 1).$$

Тем самым доказаны (14) и (15) и лемма целиком.

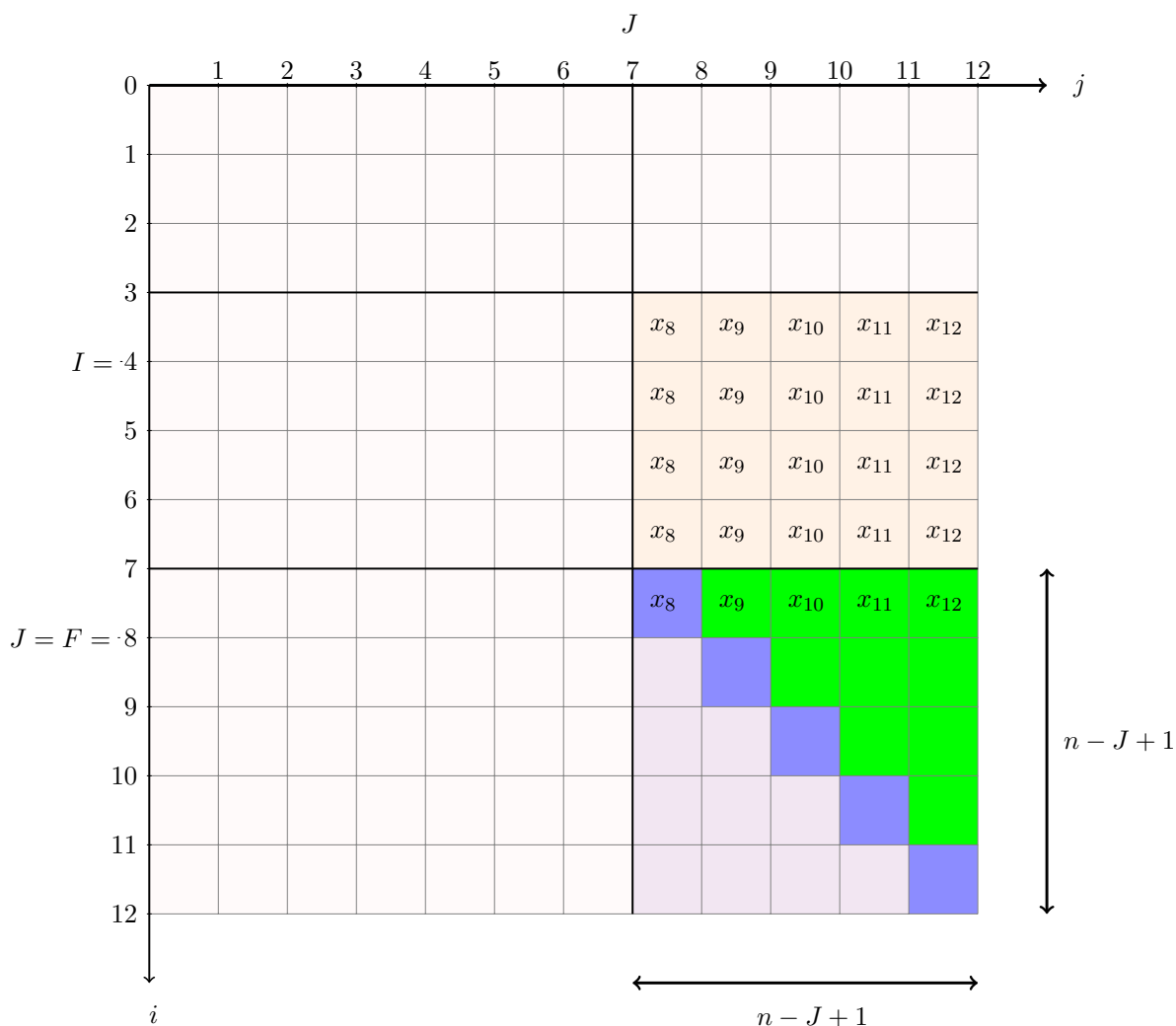
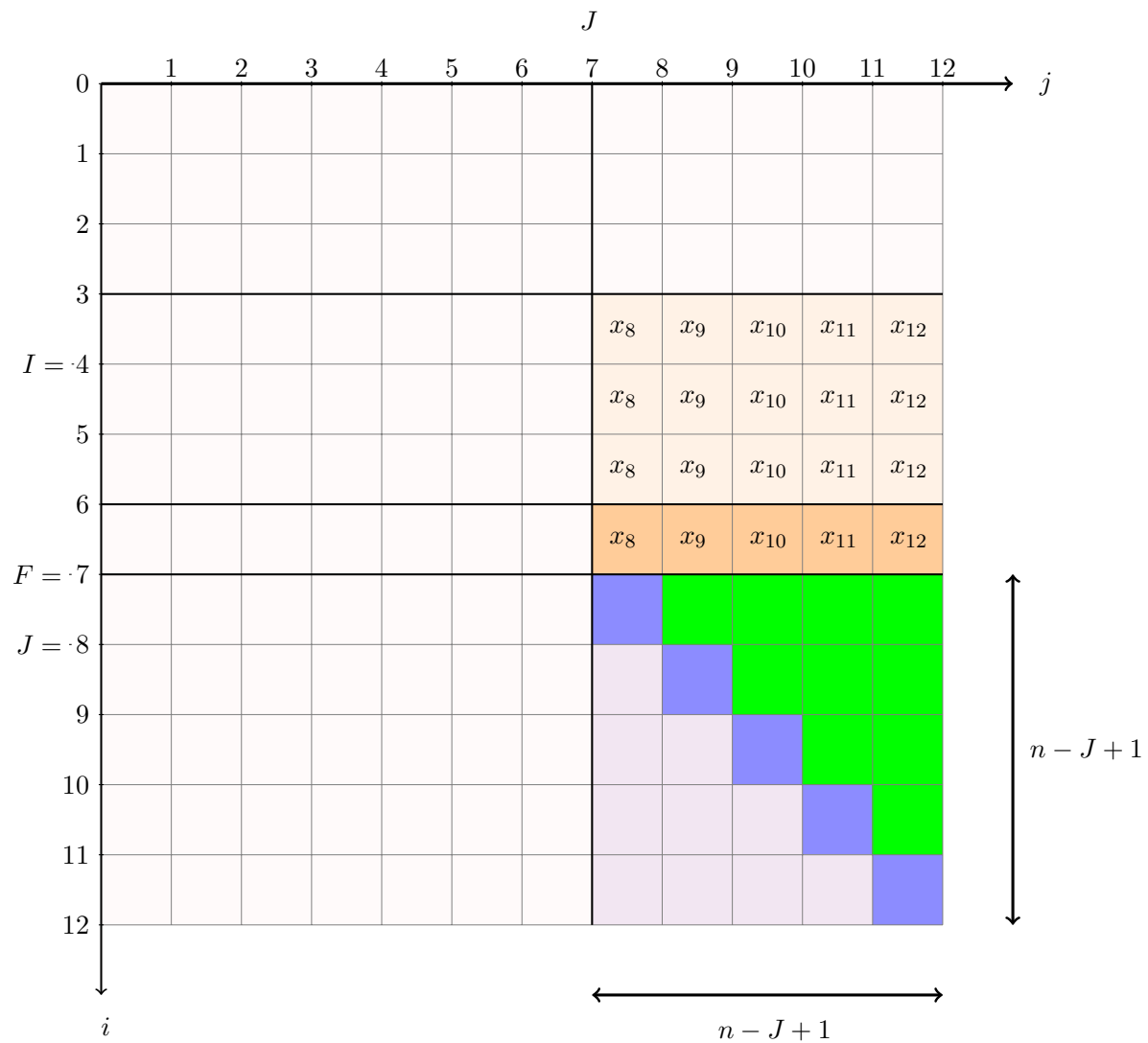


Рис. 2. Размерности в случае $F = J$

□

Лемма 16. (О размерностях образов простого двойственного перехода.) Рассмотрим множество n -мерных векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$, которое назовём исходной конфигурацией. Пусть количество ненулевых элементов в векторах Σ фиксировано, то есть для

Рис. 3. Размерности в случае $F = J - 1$

некоторого $r \in \mathbb{N}$ и любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$. Рассмотрим также двойственную конфигурацию Σ^* . Справедлива следующая оценка её размерности³:

$$\dim \Sigma^* \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1. \quad (16)$$

Доказательство. Доказательство аналогично обоснованию утверждения (12) из леммы 15 (отличие лишь в условии о первых координатах). $\square$

6. Серии дистанционных графов и их образы в двойственном пространстве

Далее общая схема рассуждений будет следующей. В каждом случае мы рассмотрим некоторый граф $G = (\Sigma, E)$ и некоторый (обобщённый) двойственный переход $\otimes$. Убедимся в том, что двойственный переход биективен, и с его помощью естественным образом построим $G^\otimes = (\Sigma^\otimes, E^\otimes)$ — граф, изоморфный G . Затем мы покажем, что множество рёбер E таково, что $G^\otimes$ — граф диаметров $\Sigma^\otimes$. В силу изоморфности графов независимые множества в $G^\otimes$ будут однозначно соответствовать независимым множествам в G , мощность образа любого независимого множества G совпадёт с мощностью самого этого независимого

³Отметим, что каждый из векторов Σ^* содержит n^2 координат.

множества. Это даст нам оценку вида

$$f(\dim \Sigma^\otimes) \geq f(\Sigma^\otimes) = \chi(G^\otimes) \geq \frac{|\Sigma^\otimes|}{\alpha(G^\otimes)} = \frac{|\Sigma|}{\alpha(G)}. \quad (17)$$

Далее для мы укажем способ оценки $\alpha(G)$ сверху и вычислим $|\Sigma|$. Мы рассмотрим несколько параметризованных серий графов и для каждой из них опишем схему перебора параметров, приводящего к оптимальной оценке, соответствующей некоторому конкретному графу G из этой серии.

6.1. Серия $\{-1, 0, 1\}$ -графов с фиксированными числами координат каждого из типов

Рассмотрим серию графов G_1 , где

$$\begin{aligned} G_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1) &= (V_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1), E_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1)), \\ V_1 &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = i\}| = k_i, i \in \{-1, 0, 1\}, \\ &\quad k_1 + k_{-1} = p^\alpha, (x_1 = \dots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\}, \\ E_1 &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1 \times V_1 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}, \end{aligned}$$

n, k_1, k_{-1}, α — натуральные числа, p — нечётное простое число.

Рассмотрим двойственный переход $*$. В соответствии с леммой 7 из определения E_1 моментально вытекает, что $G_1^* = (V_1^*, E_1^*)$ — граф диаметров V_1^* . Из леммы 10 следует, что $*$ действует на G_1 биективно.

Рассмотрим условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ и ответим на вопрос, для каких $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V_1 оно может выполняться. Для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ заметим, что $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = p^\alpha$. Поэтому возможные значения скалярного произведения — $\{-p^\alpha, 0, p^\alpha\}$. Легко видеть, что скалярное произведение p^α соответствует лишь паре из совпадающих векторов, а $-p^\alpha$ — паре из противоположных векторов. Однако в силу требования о том, что первая ненулевая координата любого вектора из V_1 равна единице, противоположные векторы не присутствуют в V_1 одновременно. Стало быть, условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ эквивалентно тому, что либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Наконец, обратим внимание на тот факт, что все векторы — вершины этих графов содержат ровно p^α ненулевых координат. Поэтому для оценки числа независимости графа можно применить теорему 1. В соответствии с ней получаем оценку

$$\alpha(G_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1)) \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{D}} \binom{n}{m_1} \binom{n-m_1}{m_2},$$

где

$$\mathcal{D} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m_1 + 2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

Отметим, что полученная оценка числа независимости зависит лишь от n и p^α . Легко видеть, что число вершин в графе составляет

$$|V_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1)| = \binom{n}{k_0} \binom{n-k_0-1}{k_{-1}}.$$

Для оценки размерности Σ^* пользуемся леммой 16. Утверждение (17) принимает вид

$$f\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \geq \frac{\binom{n}{k_0} \binom{n-k_0-1}{k_{-1}}}{\sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{D}} \binom{n}{m_1} \binom{n-m_1}{m_2}}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{D} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m_1 + 2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

Схема перебора параметров будет следующей. Для каждого n мы рассмотрим нечётные p^α в пределах до $n - 1$ включительно. По n и p^α оценим $\alpha(G_1)$. Для каждой пары (n, p^α) переберём k_1 в пределах от 1 до $p^\alpha - 1$, однозначно определяя k_{-1} и k_0 и получая конкретную оценку вида (18).

6.2. Серия $\{-1, 0, 1\}$ -графов с фиксированным числом ненулевых координат

Рассмотрим серию графов G_2 , где

$$\begin{aligned} G_2(n, p^\alpha) &= (V_2(n, p^\alpha), E_2(n, p^\alpha)), \\ V_2 &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : \\ |\{j : x_j = 1\}| + |\{j : x_j = -1\}| &= p^\alpha, (x_1 = \dots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\}, \\ E_2 &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_2 \times V_2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}, \end{aligned}$$

n — натуральное число, p — нечётное простое число.

Как и в случае G_1 , у каждого графа серии G_2 все вершины содержат одинаковое число ненулевых координат. Поэтому снова при двойственном переходе $*$ получаем, что $G_2^* = (V_2^*, E_2^*)$ — граф диаметров V_2^* . Вновь, пользуясь леммой 10, отметим, что $*$ действует на G_2 биективно. И опять же аналогично рассуждениям о G_1 получаем, что условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ эквивалентно тому, что либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Ввиду того факта, что каждый вектор из множества V_2 вершин графов G_2 содержит $p^\alpha > p^\alpha - 1$ ненулевых координат, число независимости графа оценивается по теореме 1. Без изменений со случая G_1 переносится и оценка размерности по лемме 16. Количество вершин в графе составляет

$$|V_2(n, p^\alpha)| = \binom{n}{p^\alpha} 2^{p^\alpha - 1}.$$

Получаем серию оценок

$$f\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \geq \frac{\binom{n}{p^\alpha} 2^{p^\alpha - 1}}{\sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{D}} \binom{n}{m_1} \binom{n-m_1}{m_2}}, \quad (19)$$

$$\mathcal{D} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m_1 + 2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

Схема перебора здесь упрощается. Рассмотрим нечётные p^α в пределах до $n - 1$ включительно, моментально получая для каждой пары (n, p^α) оценку вида (19). Для каждой из размерностей среди таких оценок выберем наилучшую.

Результаты вычислений для серий G_1 и G_2 приводятся в таблице 1. Таблица организована следующим образом: строки соответствуют верхним оценкам размерностей двойственных конфигураций, столбцы — сериям графов. В каждой ячейке таблицы указана наилучшая оценка снизу числа Борсука, которая была получена нами для данной размерности с использованием графов данной серии. В скобках указаны параметры одного из оптимальных в этом смысле графов: в случае G_1 — (k_{-1}, k_0, k_1) , а в случае G_2 — (n, p^α) . Ячейки, в которых конкретный граф не указан, заполнены оценками, следующими из оценок для младших размерностей⁴. Наконец, лучший результат для каждой строки в каждой из приводимых здесь и далее таблиц мы помечаем **жирным**.

Вычисления были сделаны с помощью программы на Python 2.7, доступной по ссылке [27].

⁴Обладая оценкой вида $f(d) \geq f_1$, где f_1 — число Борсука некоторой конфигурации, лежащей на $(d-1)$ -мерной сфере, мы можем заключить, что $f(d+1) \geq f_1 + 1$, или $f(d+1) \geq f(d) + 1$, предъявив конфигурацию, лежащую на d -мерной сфере. Новая конфигурация получается из старой добавлением единственной новой точки, лежащей вне гиперплоскости старой конфигурации. Подробнее это построение описано, например, в [26]. Мы вправе применять такую «дооценку», так как все рассматриваемые нами графы в двойственных пространствах лежат на сферах вследствие требования о постоянном количестве ненулевых координат.

Т а б л и ц а 1

Оценки, полученные с помощью G_1 и G_2

размерность ↓ серия графов →	G_1	G_2
1127	1128	1194 (47, 19)
1175	1176	1385 (48, 19)
1224	1225	1596 (49, 19)
1274	1275	1830 (50, 19)
1325	1326	2088 (51, 19)
1377	1378	2370 (52, 19)
1430	1431	2678 (53, 19)
1484	1485	3137 (54, 23)
1539	1540	3686 (55, 23)
1595	1596	4305 (56, 23)
1652	1653	5001 (57, 23)
1710	1711	5780 (58, 23)
1769	1770	6648 (59, 23)
1829	1830	7612 (60, 23)
1890	1891	8829 (61, 25)
1952	1953	10238 (62, 25)
2015	2016	11817 (63, 25)
2079	2189 (12, 39, 13)	13580 (64, 25)
2144	2505 (12, 40, 13)	15562 (65, 27)
2210	2855 (12, 41, 13)	18102 (66, 27)
2277	3249 (13, 40, 14)	20961 (67, 27)
2345	3746 (13, 41, 14)	24167 (68, 27)
2414	4301 (13, 42, 14)	27749 (69, 27)
2484	4919 (13, 43, 14)	31957 (70, 29)
2555	5605 (13, 44, 14)	37112 (71, 29)
2627	6414 (14, 43, 15)	42917 (72, 29)
2700	7388 (14, 44, 15)	49433 (73, 29)
2774	8477 (14, 45, 15)	56721 (74, 29)
2849	9691 (14, 46, 15)	65602 (75, 31)
2925	11041 (14, 47, 15)	76075 (76, 31)
3002	12696 (15, 46, 16)	87877 (77, 31)
3080	14610 (15, 47, 16)	101133 (78, 31)
3159	16754 (15, 48, 16)	115973 (79, 31)
3239	19147 (15, 49, 16)	132536 (80, 31)
3320	21810 (15, 50, 16)	150968 (81, 31)
3402	24765 (15, 51, 16)	171422 (82, 31)
3485	28035 (15, 52, 16)	194060 (83, 31)
3569	31645 (15, 53, 16)	220638 (84, 37)
3654	35620 (15, 54, 16)	260693 (85, 37)
3740	40513 (18, 49, 19)	306775 (86, 37)
3827	47490 (18, 50, 19)	359603 (87, 37)
3915	55460 (18, 51, 19)	419958 (88, 37)
4004	64536 (18, 52, 19)	488683 (89, 37)
4094	74838 (18, 53, 19)	566693 (90, 37)
4185	86497 (18, 54, 19)	654974 (91, 37)
4277	99651 (18, 55, 19)	754583 (92, 37)
4370	114452 (18, 56, 19)	866658 (93, 37)
4464	131060 (18, 57, 19)	992417 (94, 37)
4559	149646 (18, 58, 19)	1133159 (95, 37)
4655	170395 (18, 59, 19)	1304158 (96, 41)
4752	193500 (18, 60, 19)	1523731 (97, 41)
4850	222461 (20, 57, 21)	1774425 (98, 41)
4949	258240 (20, 58, 21)	2059811 (99, 41)

6.3. Серии $\{-1, 1\}$ -графов с $n = 4p^\alpha, 4p^\alpha - 1, 4p^\alpha + 1$

Рассмотрим серии графов $G_{3,4,5}$, определённые следующим образом:

$$V_{3,4}(n) = \{(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$G_3(n) = (V_3(n), E_3(n)), n = 4p^\alpha, E_3(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_3 \times V_3 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$G_4(n) = (V_4(n), E_4(n)), n = 4p^\alpha - 1, E_4(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_4 \times V_4 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1\},$$

$$V_5(n) = \{(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = x_2 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$G_5(n) = (V_5(n), E_5(n)), n = 4p^\alpha + 1, E_6(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_6 \times V_6 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\},$$

α — натуральное число, p — нечётное простое число.

Пусть задан $(1, 1, 1)$ -двойственный переход $\otimes$. Вершины $G_{3,4,5}$ содержат чётное число единиц, поэтому в силу леммы 13 попарные скалярные произведения векторов — вершин графов — в каждой из трёх серий сравнимы с n по модулю 4. Отсюда следует, что в каждом из трёх случаев «запретное» (т.е. соответствующее ребру) скалярное произведение — скалярное произведение с минимальным возможным модулем.

Отсюда, пользуясь леммой 11, выводим, что $G_{3,4,5}^\otimes$ — графы диаметров для $V_{3,4,5}^\otimes$ соответственно. Отметим, что в силу леммы 9 двойственный переход $\otimes$ — биекция на соответствующих четырёх множествах.

Следующее утверждение — моментальное следствие леммы 14.

Лемма 17. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — несовпадающие векторы.

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3$, то условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ эквивалентно условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_4$, то условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ эквивалентно условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1$.

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_5$, то условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ эквивалентно условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$.

Полученная лемма позволяет применить для оценивания чисел независимости графов из серий $G_3(n)$, $G_4(n)$, $G_5(n)$ модификацию теоремы 1⁵. Получаем оценки

$$\alpha(G_{3,4}(n)) \leq \binom{n-1}{p^\alpha-1},$$

$$\alpha(G_5(n)) \leq \binom{n-2}{p^\alpha-1}.$$

Одна или две первые единицы во всех векторах-вершинах фиксированы, а общее количество единиц чётно. Следовательно,

$$|V_{3,4}| = 2^{n-2},$$

$$|V_5| = 2^{n-3}.$$

Также во всех трёх случаях справедлива оценка размерности в соответствии с леммой 15, утв. (11):

$$\dim V_{3,4,5}^\otimes \leq \binom{n}{2}.$$

Итого получаем

$$f\left(\binom{n}{2}\right) \geq \frac{2^{n-2}}{\binom{n-1}{p^\alpha-1}}, \quad n = 4p^\alpha, \quad 4p^\alpha - 1, \quad (20)$$

$$f\left(\binom{n}{2}\right) \geq \frac{2^{n-3}}{\binom{n-2}{p^\alpha-1}}, \quad n = 4p^\alpha + 1. \quad (21)$$

Перебор параметров здесь не нужен. Схема вычислений тривиальна и состоит в применении оценок выше при подходящих n .

Результаты вычислений для серий G_3 , G_4 и G_5 приводятся в таблице 2. Таблица организована аналогично таблице 1. В скобках указан единственный параметр графа — n . Если в ячейке конкретный граф не указан, для получения оценки в соответствующей размерности мы воспользовались описанной выше «дооценкой».

⁵Мы пользуемся тем фактом, что в векторах из V_3 , V_4 , V_5 представлено всего два типа координат. Координаты эти, однако, суть единицы и минус единицы, а не единицы и нули, как того требует условие оценки (5). Но в действительности это не влияет на справедливость оценки. Для доказательства этого необходимо будет, следуя доказательству теоремы 4 из [24], при оценке размерности пространства многочленов заметить, что в базисные мономы не имеет смысла включать квадраты переменных — так же, как и в случае нулей и единиц.

Кроме того, в случае G_3 и G_4 нет смысла включать в базисные мономы координату y_1 , так как она всегда равна единице; в случае же G_5 мы фиксируем сразу две первых координаты. Это дополнительно уточняет верхнюю оценку числа независимости: берутся числа сочетаний из $n-1$ и $n-2$ соответственно.

Т а б л и ц а 2

Оценки, полученные с помощью G_3 , G_4 и G_5

размерность ↓ серия графов →	G_3	G_4	G_5
630	730 (36)	631	631
666	766	730 (37)	667
903	1003	967	1495 (43)
946	2294 (44)	1010	1538
990	2338	2294 (45)	1582
1275	2623	2579	4638 (51)
1326	7093 (52)	2630	4689
1378	7145	7093 (53)	4741
2211	7978	7926	43130 (67)
2278	65660 (68)	7993	43197
2346	65728	65660 (69)	43265
2775	66157	66089	129972 (75)
2850	197558 (76)	66164	130047
2926	197634	197558 (77)	130123
4095	198803	198727	1161338 (91)
4186	1761149 (92)	198818	1161429
4278	1761241	1761149 (93)	1161521
4851	1761814	1761722	3449827 (99)
4950	5227010 (100)	1761821	3449926
5050	5227110	5227010 (101)	3450026
5671	5227731	5227631	10214224 (107)
5778	15464526 (108)	5227738	10214331
5886	15464634	15464526 (109)	10214439
6555	15465303	15465195	30157112 (115)
6670	45629021 (116)	15465310	30157227
6786	45629137	45629021 (117)	30157343
7503	45629854	45629738	88820971 (123)
7626	134314638 (124)	45629861	88821094
7750	134314762	134314638 (125)	88821218
10731	134317743	134317619	2242669786 (147)
10878	3386889064 (148)	134317766	2242669933
11026	3386889212	3386889064 (149)	2242670081
13203	3386891389	3386891241	19152094988 (163)
13366	28904388755 (164)	3386891404	19152095151
13530	28904388919	28904388755 (165)	19152095315
14535	28904389924	28904389760	55863170611 (171)
14706	84284783729 (172)	28904389931	55863170782
14878	84284783901	84284783729 (173)	55863170954
17391	84284786414	84284786242	473755108853 (187)
17578	714432837949 (188)	84284786429	473755109040
17766	714432838137	714432837949 (189)	473755109228
18915	714432839286	714432839098	1377689396215 (195)
19110	2077131705062 (196)	714432839293	1377689396410
19306	2077131705258	2077131705062 (197)	1377689396606

Отметим, что во всех рассмотренных выше конфигурациях фигурирует **один запрет**. Ниже, наконец, мы рассматриваем несколько ситуаций, где **запрета два**.

6.4. Серии $\{-1, 1\}$ -графов с двумя запрещёнными скалярными произведениями

Рассмотрим ситуацию, когда запрета два. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 18. (О паре запретов.) Пусть p — нечётное простое число, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, а $n = 4p^\alpha - \varepsilon$. Пусть $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ — произвольная совокупность векторов такая, что все её векторы содержат чётное число единиц, а первые F координат каждого из её векторов равны единице, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$. Тогда, если соблюдено одно из условий 1–8, наложенных на r'_1, r'_2 , F и ε , для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ справедлива эквивалентность

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r'_1 \pmod{p^\alpha} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r'_2 \pmod{p^\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq r'_1, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq r'_2. \end{cases}$$

Условия таковы:

- 1) $\varepsilon = 0, \quad r'_1 = 0, \quad r'_2 = 4, \quad F \geq 3;$
- 2) $\varepsilon = -4, \quad r'_1 = 4, \quad r'_2 = 8, \quad F \geq 7;$
- 3) $\varepsilon = 1, \quad r'_1 = -1, \quad r'_2 = 3, \quad F \geq 2;$
- 4) $\varepsilon = -3, \quad r'_1 = 3, \quad r'_2 = 7, \quad F \geq 6;$
- 5) $\varepsilon = 2, \quad r'_1 = -2, \quad r'_2 = 2, \quad F \geq 1;$
- 6) $\varepsilon = -2, \quad r'_1 = 2, \quad r'_2 = 6, \quad F \geq 5;$
- 7) $\varepsilon = -1, \quad r'_1 = 1, \quad r'_2 = 5, \quad F \geq 4;$
- 8) $\varepsilon = -5, \quad r'_1 = 5, \quad r'_2 = 9, \quad F \geq 8.$

Доказательство. В соответствии с леммой 13 все скалярные произведения векторов из Σ сравнимы с $-\varepsilon$ по модулю 4. Для каждого значения ε выпишем несколько последовательных элементов множества, в котором лежат значения скалярных произведений (в том числе, возможные значения r'_1 и r'_2).

Для $\varepsilon = 0, -4$:

$$\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots$$

Для $\varepsilon = 1, -3$:

$$\dots, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots$$

Для $\varepsilon = 2, -2$:

$$\dots, -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots$$

Для $\varepsilon = -1, -5$:

$$\dots, -15, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots$$

Рассмотрим условия 1–8. Для каждого из них применим лемму 14 к тройкам (ε, F, r'_1) и (ε, F, r'_2) (тривиально проверяется, что условия леммы соблюдены). Так мы увидим, что запрет остатков r'_1 и r'_2 по модулю p^α означает соответственно запрет скалярных произведений r'_1 и r'_2 между различными векторами Σ . Объединяя утверждения для r'_1 и r'_2 , завершаем доказательство леммы. □

Рассмотрим серии графов G_6, G_7, G_8, G_9 , устроенные следующим образом.

$$G_6(n, r'_1, r'_2, F) = (V_6(n, F), E_6(n, r'_1, r'_2)), \quad n = 4p^\alpha, r'_1 = 0, r'_2 = 4, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 4, r'_1 = 4, r'_2 = 8;$$

$$G_7(n, r'_1, r'_2, F) = (V_7(n, F), E_7(n, r'_1, r'_2)), \quad n = 4p^\alpha - 1, r'_1 = -1, r'_2 = 3, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 3, r'_1 = 3, r'_2 = 7;$$

$$G_8(n, r'_1, r'_2, F) = (V_8(n, F), E_8(n, r'_1, r'_2)), \quad n = 4p^\alpha - 2, r'_1 = -2, r'_2 = 2, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 2, r'_1 = 2, r'_2 = 6;$$

$$G_9(n, r'_1, r'_2, F) = (V_9(n, F), E_9(n, r'_1, r'_2)), \quad n = 4p^\alpha + 1, r'_1 = 1, r'_2 = 5, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 5, r'_1 = 5, r'_2 = 9;$$

$$V_{6,7,8,9}(n, F) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = \dots = x_F = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$E_{6,7,8,9}(n, r'_1, r'_2) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_{6,7,8,9} \times V_{6,7,8,9} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{r'_1, r'_2\}\},$$

где p — нечётное простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$, $F \in \mathbb{N}$, $F \leq n - 1$. Также рассмотрим связанные с каждым из графов отображения $\otimes(r'_1, r'_2, \delta, F)$, определённые как (I, J, F) -двойственные переходы при

$$I = r'_1 + 1 + \delta,$$

$$J = r'_2 + 1 - \delta,$$

где δ — целое неотрицательное число, причём

$$I \leq J,$$

$$F \geq I,$$

$$F \in \{J - 1, J\},$$

$$F \geq F_{\min}(r'_1, r'_2),$$

где $F_{\min}(r'_1, r'_2)$ — ограничение снизу на F , соответствующее одному из значений из леммы 18 (это значение определено однозначно для заданных ε, r'_1, r'_2). Также рассмотрим $\otimes(r'_1, r'_2, \delta, F)(G_{6,7,8,9}(n, r'_1, r'_2, F))$ — образы указанных графов под действием соответствующих двойственных переходов.

Все векторы из $V_{6,7,8,9}$ содержат чётное число координат-единиц, поэтому, в соответствии с леммой 13, все значения попарных (внутри каждого V_i) скалярных произведений этих векторов совпадают с n по модулю 4.

Применим лемму 18 к $V_{6,7,8,9}$ и убедимся, что в условиях текущего подраздела выполняется следующая эквивалентность: для несовпадающих векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $V_{6,7,8,9}$ условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pmod{p^\alpha} \in \{r'_1, r'_2\}$ эквивалентно условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{r'_1, r'_2\}$.

Применим лемму 12 к двум *последовательным* таким скалярным произведениям r'_1 и r'_2 (это возможно, так как имеем как раз $r'_1 = I - 1 - \delta$, $r'_2 = J - 1 + \delta$) и убедимся, что рёбра из $E_{6,7,8,9}$ соединяют вершины, расстояние между образами которых в образе $V_{6,7,8,9}^\otimes$ максимально. Неформально это означает, что запрет пары остатков скалярных произведений в прообразе соответствует запрету максимального расстояния в образе.

Отметим, что двойственный переход $\otimes(r'_1, r'_2, \delta, F)$ биективен в силу леммы 9.

С учётом замечания о том, что запрет пары скалярных произведений соответствует запрету пары остатков, для оценки числа независимости применим теорему 3 (легко видеть, что предъявленные совокупности векторов $V_{6,7,8,9}$ удовлетворяют требованиям теоремы). Получим оценку

$$\alpha(G_{6,7,8,9}) \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha-2} \binom{n-F}{k}. \quad (22)$$

Так как первые F координат векторов — вершин графов — фиксированы и равны единице, а всего в каждом векторе содержится чётное количество единиц, то общее количество вершин составляет $|V_{6,7,8,9}(n)| = 2^{n-F-1}$.

Для размерностей образов графов при двойственном переходе в соответствии с утверждениями (14) и (11) из леммы 15 имеем

$$\dim V_{6,7,8,9}^\otimes \leq \binom{n-J+1}{2} + (n-J+1)(J-F).$$

Собирая воедино рассуждения текущего подраздела, получаем следующие оценки чисел Борсука:

$$f\left(\binom{n-J+1}{2} + (n-J+1)(J-F)\right) \geq \frac{2^{n-F-1}}{\sum_{k=0}^{p^\alpha-2} \binom{n-F}{k}}, \quad n = 4p^\alpha, 4p^\alpha - 1, 4p^\alpha - 2, 4p^\alpha + 1, \\ 4p^\alpha + 4, 4p^\alpha + 3, 4p^\alpha + 2, 4p^\alpha + 5.$$

Результаты вычислений для серий G_6 , G_7 , G_8 и G_9 приводятся в таблице 3. В скобках указаны параметры оптимального графа (n, I, J, F) . Если параметры в ячейке не указаны, для соответствующей размерности была применена «дооценка».

Т а б л и ц а 3

Оценки, полученные с помощью G_6 , G_7 , G_8 и G_9

размерность ↓ серия графов →	G_6	G_7	G_8	G_9
561	759 (36, 2, 4, 3)	759 (35, 1, 3, 2)	759 (34, 1, 1, 1)	759 (37, 3, 5, 4)
820	1472 (44, 1, 5, 4)	1472 (43, 1, 3, 3)	1018	1472 (45, 2, 6, 5)
861	2321 (44, 2, 4, 3)	2321 (43, 1, 3, 2)	2321 (42, 1, 1, 1)	2321 (45, 3, 5, 4)
1128	2891 (52, 1, 5, 5)	2891 (55, 4, 8, 8)	2588	2891 (53, 2, 6, 6)
1176	4500 (52, 1, 5, 4)	4500 (51, 1, 3, 3)	2636	4500 (53, 2, 6, 5)
1225	7044 (52, 2, 4, 3)	7044 (51, 1, 3, 2)	7044 (50, 1, 1, 1)	7044 (53, 3, 5, 4)
2016	26592 (68, 1, 5, 5)	26592 (71, 4, 8, 8)	7835	26592 (69, 2, 6, 6)
2080	41044 (68, 1, 5, 4)	41044 (67, 1, 3, 3)	7899	41044 (69, 2, 6, 5)
2145	63626 (68, 2, 4, 3)	63626 (67, 1, 3, 2)	63626 (66, 1, 1, 1)	63626 (69, 3, 5, 4)
2556	79829 (76, 1, 5, 5)	79829 (79, 4, 8, 8)	64037	79829 (77, 2, 6, 6)
2628	122850 (76, 1, 5, 4)	122850 (75, 1, 3, 3)	64109	122850 (77, 2, 6, 5)
2701	189802 (76, 2, 4, 3)	189802 (75, 1, 3, 2)	189802 (74, 1, 1, 1)	189802 (77, 3, 5, 4)
3828	709181 (92, 1, 5, 5)	709181 (95, 4, 8, 8)	190929	709181 (93, 2, 6, 6)
3916	1086594 (92, 1, 5, 4)	1086594 (91, 1, 3, 3)	191017	1086594 (93, 2, 6, 5)
4005	1670378 (92, 2, 4, 3)	1670378 (91, 1, 3, 2)	1670378 (90, 1, 1, 1)	1670378 (93, 3, 5, 4)
4560	2101953 (100, 1, 5, 5)	2101953 (103, 4, 8, 8)	1670933	2101953 (101, 2, 6, 6)
4656	3215194 (100, 1, 5, 4)	3215194 (99, 1, 3, 3)	1671029	3215194 (101, 2, 6, 5)
4753	4933134 (100, 2, 4, 3)	4933134 (99, 1, 3, 2)	4933134 (98, 1, 1, 1)	4933134 (101, 3, 5, 4)
5356	6211462 (108, 1, 5, 5)	6211462 (111, 4, 8, 8)	4933737	6211462 (109, 2, 6, 6)
5460	9487651 (108, 1, 5, 4)	9487651 (107, 1, 3, 3)	4933841	9487651 (109, 2, 6, 5)
5565	14533276 (108, 2, 4, 3)	14533276 (107, 1, 3, 2)	14533276 (106, 1, 1, 1)	14533276 (109, 3, 5, 4)
6216	18308386 (116, 1, 5, 5)	18308386 (119, 4, 8, 8)	14533927	18308386 (117, 2, 6, 6)
6328	27930587 (116, 1, 5, 4)	27930587 (115, 1, 3, 3)	14534039	27930587 (117, 2, 6, 5)
6441	42723846 (116, 2, 4, 3)	42723846 (115, 1, 3, 2)	42723846 (114, 1, 1, 1)	42723846 (117, 3, 5, 4)

7. Заключение

Дадим теперь ответы на вопросы, заданные во введении.

В таблицу 4 для наглядности собраны оценки чисел Борсука пространств малой размерности, полученные с помощью «самых сильных» серий графов. Это означает, что из таблицы были исключены столбцы, в которых для рассмотренных нами размерностей не содержалось ни одного «лучшего в строке» результата, не достигнутого в предыдущих столбцах – так, оказывается, что G_6 в этом смысле доминирует над G_5 , а оценки, основанные на G_4 , сильнее оценок, основанных на G_3 , уже исходя из (20). Остаются столбцы, соответствующие G_2 — серии $\{-1, 0, 1\}$ -графов с фиксированным числом ненулевых координат, G_3 — серии $\{-1, 1\}$ -графов «с одним запретом», G_6 — серии $\{-1, 1\}$ -графов «с двумя запретами». Здесь, как и в таблицах 1 и 3, мы, дабы сделать таблицу обозримой, пренебрегаем её строками, в которых наилучший результат получается с помощью «дооценки». Конечно, такие строки могут быть легко восстановлены. Здесь важно отметить, что для «малых размерностей» в разных случаях работают разные идеи. Для многих d , по всей видимости, нижняя оценка для $f(d)$ приводится в таблице 4 впервые.

Т а б л и ц а 4

Сравнение оценок чисел Борсука пространств малых размерностей

размерность ↓ серия графов →	G_2	G_3	G_6
561	562	562	759 (36, 2, 4, 3)
820	821	920	1472 (44, 1, 5, 4)
861	862	961	2321 (44, 2, 4, 3)
1128	1195	2476	2891 (52, 1, 5, 5)
1176	1386	2524	4500 (52, 1, 5, 4)
1225	1597	2573	7044 (52, 2, 4, 3)
1890	8829 (61, 25)	7657	7709
1952	10238 (62, 25)	7719	7771
2015	11817 (63, 25)	7782	7834
2016	11818	7783	26592 (68, 1, 5, 5)
2080	13581	7847	41044 (68, 1, 5, 4)
2145	15563	7912	63626 (68, 2, 4, 3)
2278	20962	65660 (68)	63759
2556	37113	65938	79829 (76, 1, 5, 5)

2628	42918	66010	122850 (76, 1, 5, 4)
2701	49434	66083	189802 (76, 2, 4, 3)
2850	65603	197558 (76)	189951
3569	220638 (84, 37)	198277	190670
3654	260693 (85, 37)	198362	190755
3740	306775 (86, 37)	198448	190841
3827	359603 (87, 37)	198535	190928
3828	359604	198536	709181 (92, 1, 5, 5)
3916	419959	198624	1086594 (92, 1, 5, 4)
4005	488684	198713	1670378 (92, 2, 4, 3)
4186	654975	1761149 (92)	1670559
4560	1133160	1761523	2101953 (100, 1, 5, 5)
4656	1304159	1761619	3215194 (100, 1, 5, 4)
4753	1523732	1761716	4933134 (100, 2, 4, 3)
4950	2059812	5227010 (100)	4933331
5356	3645551	5227416	6211462 (108, 1, 5, 5)
5460	4227501	5227520	9487651 (108, 1, 5, 4)
5565	4888126	5227625	14533276 (108, 2, 4, 3)
5778	6480872	15464526 (108)	14533489
6216	11381100	15464964	18308386 (116, 1, 5, 5)
6328	13246846	15465076	27930587 (116, 1, 5, 4)
6441	15375505	15465189	42723846 (116, 2, 4, 3)
6670	20548138	45629021 (116)	42724075
7140	36510771	45629491	53843925 (124, 1, 5, 5)
7260	42124522	45629611	82054071 (124, 1, 5, 4)
7381	48483212	45629732	125358495 (124, 2, 4, 3)
7626	63774534	134314638 (124)	125358740
8384	153592119 (129, 53)	134315396	125359498
8514	177000680 (130, 53)	134315526	125359628
8645	203521513 (131, 53)	134315657	125359759
8777	233507010 (132, 53)	134315789	125359891
8910	267342303 (133, 53)	134315922	125360024
9044	305447594 (134, 53)	134316056	125360158
9179	348280600 (135, 53)	134316191	125360293
9315	398529295 (136, 59)	134316327	125360429
9452	466820352 (137, 59)	134316464	125360566
9590	545493701 (138, 59)	134316602	125360704
9729	635925506 (139, 59)	134316741	125360843
9869	739647011 (140, 59)	134316881	125360983
10010	858358804 (141, 59)	134317022	125361124
10152	993946100 (142, 59)	134317164	125361266
10295	1148495045 (143, 59)	134317307	125361409
10296	1148495046	134317308	1354767865 (148, 1, 5, 5)
10440	1324310123	134317452	2059341163 (148, 1, 5, 4)
10585	1523932677	134317597	3137001950 (148, 2, 4, 3)
10878	2040013712	3386889064 (148)	3137002243
11475	3585535973 (151, 61)	3386889661	3137002840
11627	4108658537 (152, 61)	3386889813	3137002992
11780	4699472449 (153, 61)	3386889966	3137003145
11934	5365604653 (154, 61)	3386890120	3137003299
12089	6159942008 (155, 67)	3386890275	3137003454
12245	7201786262 (156, 67)	3386890431	3137003610
12402	8402150920 (157, 67)	3386890588	3137003767
12560	9782444352 (158, 67)	3386890746	3137003925
12719	11366594042 (159, 67)	3386890905	3137004084
12720	11366594043	3386890906	11548841982 (164, 1, 5, 5)
12879	13181297915 (160, 67)	3386891065	11548842141
12880	13181297916	3386891066	17532574162 (164, 1, 5, 4)
13041	15256295978	3386891227	26667999195 (164, 2, 4, 3)
13366	20323127147	28904388755 (164)	26667999520
13860	30828453073 (166, 67)	28904389249	26668000014

Также мы произвели расчёты для случая «растущей размерности». Численный эксперимент показывает, что с ростом d начинают поочерёдно доминировать две серии графов — G_2 ($\{-1, 0, 1\}$ -графы с одним «запретом») и G_6 ($\{-1, 1\}$ -графы с двумя «запретами»). В таблицу 5 мы включаем лишь те достаточно большие размерности, при переходе через которые можно наблюдать смену доминирующей серии, а также размерности, большие предполагаемой «пороговой» — как можно видеть из проведённых расчётов, начиная

с $d = 22154$ устанавливается ожидаемое в соответствии с [22] доминирование $\{-1, 0, 1\}$ -графов с ограничением на количество ненулевых координат.

Т а б л и ц а 5

Сравнение оценок чисел Борсука пространств при росте размерностей

размерность ↓ серия графов →	G_2	G_6
14027	35575214838 (167, 71)	26668000181
14196	41357928108	51071503180 (172, 1, 5, 4)
15050	85452235646 (173, 71)	77633048377
17019	403613843210 (184, 79)	285068165140
17020	403613843211	432113274440 (188, 1, 5, 4)
17204	470465660729 (185, 79)	432113274624
17205	470465660730	656117737023 (188, 2, 4, 3)
17765	737438558303 (188, 79)	656117737583
18720	1514737229760 (193, 81)	1255308792435
18721	1514737229761	1905118736125 (196, 2, 4, 3)
19109	2025160588555 (195, 81)	1905118736513
21944	14903109993823 (209, 89)	10570185288769
21945	14903109993824	16027885419443 (212, 2, 4, 3)
22154	17317326505560 (210, 89)	16027885419652
28440	969776983719828 (238, 101)	389313830989796
28679	1125124376330066 (239, 101)	389313830990035
28919	1303646677247046 (240, 101)	491862065149951
29160	1508544540124909 (241, 101)	743799486168000
29402	1743424867403225 (242, 101)	1126265437348847
29645	2012347763025557 (243, 101)	1126265437349090
29889	2319878366958467 (244, 101)	1126265437349334

Настоящая работа выполнена за счёт гранта РФФИ (проект N 18-01-00355) и гранта президента НШ-6760.2018.1.

Литература

1. Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. P. 60–62.
2. Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Mathematicae. 1933. V. 20, I. 1. P. 177–190.
3. Perkal J. Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloquium Mathematicum. 1947. V. 1. P. 45.
4. Hadwiger H. Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Commentarii Mathematici Helvetici. 1945. V. 18. P. 73–75.
5. Riesling A.S. Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature // Ukr. Geom. Sbornik. 1971. V. 11 P. 78–83.
6. Dekster B. The Borsuk conjecture holds for bodies of revolution // Journal of Geometry. 1995. V. 52, I. 1–2. P. 64–73.
7. Rogers C.A. Symmetrical sets of constant width and their partitions // Mathematika. 1971. V. 18. P. 105–111.
8. Nilli A. On Borsuk's problem // Jerusalem Combinatorics '93: an international conference in combinatorics. 1994. P. 209–210.
9. Райгородский А.М. О размерности в проблеме Борсука // УМН. 1997. Т. 52, вып. 6(318). С. 181–182.
10. Weißbach B. Sets with large Borsuk number // Beiträge Algebra Geom. 2000. V. 41. P. 417–423.
11. Hinrichs A. Spherical codes and Borsuk's conjecture // Discrete Math. 2002. V. 243. P. 253–256.

12. *Pikhurko O.* Borsuk's conjecture fails in dimensions 321 and 322 // arXiv preprint math/0202112. 2002.
13. *Hinrichs A., Richter C.* New sets with large Borsuk numbers // Discrete Mathematics. 2003. V. 270, I. 1–3. P. 137–147.
14. *Bondarenko A.* On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets // Discrete & Computational Geometry. 2014. V. 51, I. 3. P. 509–515.
15. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk's Conjecture // Electronic Journal of Combinatorics. 2014. V. 21, I. 4. #P4.29.
16. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Геометрия и механика. 2007. Т. 23. С. 147–164.
17. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. 2007. V. 347. P. 202–248.
18. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. V. 625. P. 93–109.
19. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. / J. Pach ed. Springer, 2013. P. 429–460.
20. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial geometry and coding theory // Fundamenta Informatica. 2016. V. 145. P. 359–369.
21. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. V. 35, I. 2. P. 180–189.
22. *Райгородский А.М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи математических наук. 1999. Т. 54, вып. 2(326). С. 185–186.
23. *Райгородский А.М.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. Москва : МЦНМО, 2011.
24. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2 // Математические заметки. 2019. Т. 105. С. 187–213.
25. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Москва : МЦНМО, 2007.
26. *Гервер М.Л.* О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры // Математическое просвещение. 1999. Сер. 3, вып. 3. С. 168–183.
27. https://github.com/LevBogolubsky/Borsuk_lower_linear_algebra

References

1. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29 P. 60–62.
2. *Borsuk K.* Three sentences about the n -dimensional Euclidean sphere. Fundamenta Mathematicae. 1933. V. 20, I. 1. P. 177–190.
3. *Perkal J.* On the subdivision of sets into parts of smaller diameter. Colloquium Mathematicum. 1947. V. 1. P. 45.
4. *Hadwiger H.* Coverage of a set by sets of smaller diameter. Commentarii Mathematici Helvetici. 1945. V. 18. P. 73–75.
5. *Riesling A.S.* Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature. Ukr. Geom. Sbornik. 1971. V. 11. P. 78–83.

6. *Dekster B.* The Borsuk conjecture holds for bodies of revolution. *Journal of Geometry*. 1995. V. 52, I. 1–2. P. 64–73.
7. *Rogers C.A.* Symmetrical sets of constant width and their partitions. *Mathematika*. 1971. V. 18. P. 105–111.
8. *Nilli A.* On Borsuk's problem. *Jerusalem Combinatorics '93: an international conference in combinatorics*. 1994. P. 209–210.
9. *Raigorodskii A.* On dimensionality in the Borsuk problem. *Russian Math. Surveys*. 1997. V. 52. P. 1324–1325.
10. *Weißbach B.* Sets with large Borsuk number. *Beiträge Algebra Geom.* 2000. V. 41. P. 417–423.
11. *Hinrichs A.* Spherical codes and Borsuk's conjecture. *Discrete Math.* 2002. V. 243. P. 253–256.
12. *Pikhurko O.* Borsuk's conjecture fails in dimensions 321 and 322. *arXiv preprint math/0202112*. 2002.
13. *Hinrichs A., Richter C.* New sets with large Borsuk numbers. *Discrete Mathematics*. 2003. V. 270, I. 1–3. P. 137–147.
14. *Bondarenko A.* On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets. *Discrete & Computational Geometry*. 2014. V. 51, I. 3. P. 509–515.
15. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk's Conjecture. *Electronic Journal of Combinatorics*. 2014. V. 21, I. 4. #P4.29.
16. *Raigorodskii A.M.* Around Borsuk's Hypothesis. *Journal of Mathematical Sciences*. 2008. V. 154, I. 4. P. 604–623.
17. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem. *London Mathematical Society Lecture Note Series*. 2007. V. 347. P. 202–248.
18. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters. *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*. 2014. V. 625. P. 93–109.
19. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters. *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*. J. Pach ed. Springer, 2013. P. 429–460.
20. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial geometry and coding theory. *Fundamenta Informatica*. 2016. V. 145. P. 359–369.
21. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width. *Mathematika*. 1988. V. 35, I. 2. P. 180–189.
22. *Raigorodskii A.M.* On a bound in Borsuk's problem. *Russian Math. Surveys*. 1999. V. 54, I. 2. P. 453–454.
23. *Raigorodskii A.M.* Kneser's Hypothesis and the Topological Method in Combinatorics. Moscow : MCCME, 2011.
24. *Bogolubsky L.I., Raigorodskii A.M.* A Remark on Lower Bounds for the Chromatic Numbers of Spaces of Small Dimension with Metrics ℓ_1 and ℓ_2 . *Matematicheskie Zametki*. 2019. V. 105, I. 2. P. 187–213.
25. *Raigorodskii A.M.* The linear algebra method in combinatorics. Moscow : MCCME, 2007.
26. *Gerver M.L.* On partition of sets into parts of smaller diameter: theorems and counterexamples. *Matematicheskoe prosveschenie*. 1999. Ser. 3, V. 3. P. 168–183.
27. https://github.com/LevBogolubsky/Borsuk_lower_linear_algebra