2. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.958

© *В. В. Денисенко, В. П. Ильин*

ОБ ОШИБОЧНОСТИ ТЕОРЕМЫ В. В. АКСЕНОВА[1]

Доказана ошибочность сформулированной В.В. Аксеновым теоремы о возможности представления произвольной соленоидальной векторной функции внутри шара с помощью одной скалярной функции специального вида.

Ключевые слова: соленоидальное поле, потенциалы.

© *V. V. Denisenko, V. P. Iliin*

INCORRECTNESS OF THE THEOREM BY V. V. AKSENOV

The theorem by V.V. Aksenov on the possibility of representing an arbitrary solenoidal vector function in a ball with a single scalar function of a special kind is disproved.

Keywords: solenoidal field, potentials.

Введение

Для удобства работы с векторными функциями принято использовать различные потенциалы: скалярные, векторные или их комбинации [1]. Особое внимание уделяется соленоидальным векторным функциям, то есть имеющим нулевую дивергенцию

$$div\,\vec{H} = 0\,. \tag{1}$$

Например, в работе [2] доказано, что всякая непрерывно дифференцируемая соленоидальная векторная функция представима в виде

$$\vec{H} = rot\,\vec{A}\,,$$

где $\vec{A}$ имеет нулевую нормальную компоненту на границе области и удовлетворяет равенству

$$div\,\vec{A} = 0\,.$$

Это условие бездивергентности называется кулоновской калибровкой для векторного потенциала $\vec{A}$, который принято вводить для магнитной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-05-00152), работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00485.

индукции $\vec{B}$, являющейся соленоидальной векторной функцией в силу уравнений Максвелла в стационарном случае.

Теорема В.В. Аксенова

В работе [3] сформулирована следующая теорема:

Соленоидальное векторное поле $\vec{H}$ в сферической области (в шаре с поверхностью S и радиусом R), однозначно восстанавливается выражением

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = rot\,(Q\vec{r}) + rot\;rot\,(Q\vec{r})\,, \tag{2}$$

если известна нормальная составляющая H_N на S, а функция $Q \in C^\infty$, среднее значение которой на S равно нулю, и $\vec{H}, \vec{H}_1, \vec{H}_2 \neq 0$ всюду.

Через $\vec{r}$ обозначен радиус-вектор точки. Утверждения, аналогичные данной теореме, приведены также в книгах В.В. Аксенова [4], [5] и в его некоторых других изданиях.

Справедливость представления (2) с помощью одной скалярной функции существенно упростила бы работу с соленоидальными векторными функциями, и, в частности, кардинально облегчило бы решение многих задач математической физики. Но, к сожалению, оно не верно. Чтобы это доказать, приведем в качестве контрпримеров два вида соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию теоремы, но не удовлетворяющих равенству (2).

Контрпримеры к теореме В.В. Аксенова

Запишем формулу (2) покомпонентно в сферических координатах r, θ, ϕ

$$H_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2}\right), \tag{3}$$

$$H_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right), \tag{4}$$

$$H_\phi = -\frac{\partial Q}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Q}{\partial\phi}\right). \tag{5}$$

Вычислив радиальную компоненту ротора этой векторной функции по формуле

$$rot_r\vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, H_\phi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)$$

с использованием выражений (4), (5) для H_θ, H_ϕ, получаем ее равенство выражению (3) для H_r. Следовательно, всякая векторная функция вида (2) удовлетворяет условию

$$rot_r \vec{H} = H_r . \tag{6}$$

Разумеется, не всякая функция, удовлетворяющая условиям теоремы, удовлетворяет условию (6). Простейшим примером является следующая векторная функция, не зависящая от координат. Пусть вектор $\vec{H}$ параллелен оси $\theta = 0$, и его модуль равен H_0. Эта векторная функция имеет нулевую дивергенцию, и значит, является соленоидальной. Она имеет нулевой ротор и отличную от нуля радиальную компоненту $H_r = H_0 \cos\theta$, и значит, не удовлетворяет (6).

Чтобы не создалось впечатление, что достаточно исключить константы из множества рассматриваемых функций, приведем и пример противоречия условию (6) при $H_r = 0$ и отличной от нуля компоненте ротора $rot_r \vec{H}$. Это поле вида $H_r = H_\theta = 0$, $H_\phi = f(r,\theta)$ с отличной от тождественного нуля функцией $f(r,\theta)$, произвол которой ограничен только условиями гладкости. Дивергенция такого поля равна нулю, и значит, оно удовлетворяет условию теоремы. Компонента ротора $rot_r \vec{H}$ этого поля не может тождественно равняться нулю, поскольку ее интеграл по части сферы $\theta < \theta_0$ равен интегралу касательной компоненты самого поля $\vec{H}$ по ограничивающей ее линии $\theta = \theta_0$, то есть $2\pi r \sin\theta_0 f(r,\theta_0)$. Поскольку $H_r = 0$ тождественно, получаем противоречие (6). В этом примере можно положить $f(r,\theta) = r\sin(\pi\theta / \theta_0)$ при $\theta < \theta_0$, и $f(r,\theta) = 0$ при $\theta \ge \theta_0$, чтобы получить противоречие и последнему утверждению теоремы.

Сопоставление с известными способами введения потенциалов

Рассматриваемую ситуацию можно интерпретировать следующим образом. Трехмерное векторное поле в общем случае определяется тремя скалярными функциями, в качестве которых можно взять три проекции поля на оси координат. Если же векторное поле $\vec{H}$ удовлетворяет условию соленоидальности (1), то данное дополнительное ограничение приводит к тому, что соответствующее поле может быть выражено с помощью не трех, а двух скалярных функций. Данный факт является известным и, например, в книге [6] показано, что произвольное соленоидальное поле $\vec{H}$ может быть представлено в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_T + \vec{H}_P = rot\,(T\vec{r}) + rot\,rot\,(P\vec{r}), \tag{7}$$

где $\vec{H}_T$ и $\vec{H}_P$ называются тороидальным и полоидальным полем соответственно, а скалярные функции выражаются формулами

$$P = -L^{-2}(\vec{r},\vec{H}), \quad T = -L^{-2}(\vec{r}, rot\,\vec{H}) .$$

Здесь в круглых скобках – скалярные произведения, и L есть дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L\psi = (\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2})\psi \,.$$

Доказательство представления (2) в статье [3] основано на представлении (7), но использовано дополнительное не обоснованное равенство

$$\vec{H}_P = rot\,(\vec{H}_T)\,,$$

которое и позволило получить равенство скалярных функций $P = T$. Заметим, что в статье [3] для слагаемых $\vec{H}_T$, $\vec{H}_P$ в представлении (7) использованы те же обозначения $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, что и для слагаемых в (2).

Если в представлении (7) взять не произвольные функции P, T, а связать их некоторыми условиями, то можно получить представления полей $\vec{H}$ в различных частных случаях. Например, в монографии [7] используется пара функций P и $T = hP$, где h - некоторая константа. В качестве функции P берутся решения уравнения Гельмгольца. Тогда формула (7) дает представления некоторых бессиловых магнитных полей. Магнитные поля называются бессиловыми, если равна нулю объемная плотность силы Ампера, действующей на находящийся в этом поле проводник. Поскольку сила Ампера, действующая на единицу объема, равна векторному произведению плотности тока $\vec{j} = rot\,\vec{H}$ и $\vec{H}$, это условие эквивалентно требованию параллельности векторов $\vec{H}$ и $rot\,\vec{H}$

$$\vec{H} = \alpha\, rot\,(\vec{H})\,, \qquad (8)$$

где α может быть константой или некоторой заранее неизвестной функцией.

Заметим, что если бы аналогичные (6) соотношения выполнялись и для $\theta-$, $\varphi-$ компонент, поле, представляемое в виде (2), было бы бессиловым с константой $\alpha = 1$, но при произвольной функции Q этого свойства нет.

В монографии [8] для представления бессиловых полей использована более общая форма

$$\vec{H} = \alpha\, rot\,(\vec{A}) + rot\; rot\,(\vec{A})\,, \qquad (9)$$

которая сходна с (2) и (7) наличием повторной операции rot. Для введенной новой неизвестной функции $\vec{A}$ условие (8) тоже сводится к уравнению Гельмгольца. Использование представлений (7) и (9) свидетельствует в пользу аналогичного им представления (2), однако этим приемом удается воспользоваться только в некоторых частных случаях, как это сделано в [7, 8], а не для произвольного соленоидального поля, как утверждается в обсуждаемой теореме из [3].

О единственности потенциала

В формулировке теоремы [3] есть еще одно утверждение: «... однозначно восстанавливается выражением (2)». Разумеется, вычисление по этим формулам дает единственный результат, поскольку в нем нет неоднозначных функций, но эти слова можно трактовать и не столь тривиально, а как единственность такой функции Q для заданного поля $\vec{H}$. Последнее не верно. Возьмем произвольную скалярную функция $q(r)$, зависящую только от координаты r и равную нулю на граничной сфере $r = R$, чтобы удовлетворить однородному граничному условию, наложенному на $\mathrm{Q}(r)$ условиями теоремы. Направленная по радиусу векторная функция $rq(r)(1,0,0)$ имеет нулевой ротор, и поэтому функция $q(r)$ может быть добавлена к $\mathrm{Q}(r)$ без изменения представляемого поля $\vec{H}$. Значит, единственности $\mathrm{Q}(r)$ нет.

Заключение

Таким образом, представление (2) может быть справедливым только для гораздо более узкого класса функций, чем указанный в теореме, и когда функция $\mathrm{Q}(r)$ существует, она не единственная.

Литература

1. Денисенко В.В. Энергетический метод для трехмерных эллиптических уравнений с несимметричными тензорными коэффициентами // Сибирский математический журнал. - 1997. - Т. 38. № 6. - С. 1267-1281.

2. Быховский Э.Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы // Вестник ЛГУ. - 1957. - № 13. С. - 50-66.

3. Аксенов В.В. О некоторых соленоидальных векторных полях в сферических областях // Дифференциальные уравнения. - 2012. - Т. 48. № 7. - С. 1056-1059.

4. Аксенов В.В. Основы геомагнетизма. - Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН. - 2012. – 132 с.

5. Аксенов В.В. Электромагнитное поле Земли. – Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН. - 2009. – 216 с.

6. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Мир. - 1980. – 332 с.

7. Паркер Е. Космические магнитные поля. - М.: Мир. - 1982. – 608 с.

8. Marsh G.E. Force-free magnetic fields. Solutions, topology and applications. - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. - 1996. – 157 p.

References

1. Denisenko V.V. Jenergeticheskij metod dlja trehmernyh jellipticheskih uravnenij s nesimmetrichnymi tenzornymi kojefficientami // Si-birskij matematicheskij zhurnal. - 1997. - T. 38. № 6. - P. 1267-1281.

2. Byhovskij Je.B. Reshenie smeshannoj zadachi dlja sistemy uravnenij Maksvella v sluchae ideal'no provodjashhej granicy // Vestnik LGU. - 1957. - № 13. P. 50-66.

3. Aksenov V.V. O nekotoryh solenoidal'nyh vektornyh poljah v sfericheskih oblastjah // Differencial'nye uravnenija. - 2012. - T. 48. № 7. - P. 1056-1059.

4. Aksenov V.V. Osnovy geomagnetizma. - Novosibirsk: izd. IV-MiMG SO RAN. - 2012. – 132 p.

5. Aksenov V.V. Jelektromagnitnoe pole Zemli. – Novosibirsk: izd. IVMiMG SO RAN. - 2009. – 216 p.

6. Moffat G. Vozbuzhdenie magnitnogo polja v provodjashhej srede. – M.: Mir. - 1980. – 332 p.

7. Parker E. Kosmicheskie magnitnye polja. - M.: Mir. - 1982. – 608 p.

8. Marsh G.E. Force-free magnetic fields. Solutions, topology and applications. - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. - 1996. – 157 p.

Денисенко Валерий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН, e-mail: denisen@icm.krasn.ru

Ильин Валерий Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, e-mail: ilin@sscc.ru

Valery Vasilievich Denisenko, DSc, Professor, Institute of Computational Modelling RAS SB, e-mail: denisen@icm.krasn.ru

Valery Pavlovich Iliin, DSc, Professor, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, e-mail: ilin@sscc.ru