МАТЕМАТИКА

УДК 517.95:517.97

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ

© 2008 г. *В.С. Гаврилов*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vladimir.s.gavrilov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.03.2008

Доказывается теорема вложения для функций из пространства типа пространства Соболева, определённых на боковой поверхности цилиндра над ограниченной областью $\Omega \subset R^n$.

Ключевые слова: теорема вложения, функция пространства, пространство Соболева.

Работа посвящена исследованию свойств функций, принадлежащих пространству Соболева специального вида. Необходимость такого исследования возникает при изучении вопросов теории оптимального управления начально-краевыми задачами для гиперболических уравнений дивергентного вида с неоднородным третьим краевым условием. К подобным начально-краевым задачам относится, например, задача вида

$$z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t) z_{x_i} + a_i(x,t)z) +$$
$$+ a(x,t,z(x,t)) + b_i(x,t) z_{x_i} +$$
$$+ c(x,t) z_t = 0, \ (x,t) \in Q_T;$$
$$z(x,0) = \varphi(x), \ z_t(x,t) = \psi(x), \ x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial z}{\partial N} + \varsigma(s,t)z = f(s,t), \ (s,t) \in S_T.$$

Здесь и ниже $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, $S_T \equiv S \times (0,T)$, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $\frac{\partial z}{\partial N} \equiv (a_{ij}(x,t) z_{x_i} + a_i(x,t)z) \cos \alpha_i$, $\alpha_i(x,t)$ — угол между внешней нормалью к S_T и осью Ox_i.

При изучении условий существования и единственности решения этой начально-краевой задачи в пространстве Соболева $W_2^1(Q_T)$ требуется исследовать свойства заданных на границе S_T функций из пространства Соболева специального вида. При этом оказывается полезной формулируемая ниже теорема вложения.

Пусть $L_{2,1}(S_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу функций $\xi : S_T \to R$ с конечной нормой $\|\xi\|_{2,1,S_T} \equiv \int_0^T (\int_S |\xi(s,t)|^2 ds)^{1/2} dt$.

Через $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$ обозначим банахово пространство измеримых по Лебегу функций $\xi : S_T \to R$ таких, что $\xi, \xi_t \in L_{2,1}(S_T)$. Норма в $W_{2,1}^{0,1}(S_T)$ задаётся формулой

$$\|\xi\|_{2,1,S_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{2,1,S_T} + \|\xi_t\|_{2,1,S_T}.$$

Наконец, пусть $L_2(S)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу функций $\xi : S \to R$, имеющих конечную норму

$$\|\xi\|_{2,S} \equiv \left(\int_S |\xi(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Основным результатом статьи является

Теорема 1. У любой функции $f \in W_{2,1}^{0,1}(S_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ имеется след $f(\cdot,t) \in L_2(S)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_2(S)$, причём существует константа $c_1 = c_1(T) > 0$, определяемая лишь числом $T > 0$, такая, что

$$\max_{t \in [0,T]} \| f(\cdot,t)\|_{2,S} \le c_1 \| f \|_{2,1,S_T}^{(0,1)}. \quad (1)$$

Доказательство. Произвольно фиксируем $f \in W_{2,1}^{0,1}(S_T)$. Для любой функции $\theta \in C(\overline{S}_T)$, равной нулю вблизи $S \times \{0\}$ и $S \times \{T\}$ и имеющей непрерывную на $\overline{S}_T$ производную θ_t, справедливо тождество

$$\int_{S_T} f(s,t)\theta_t(s,t)dsdt = -\int_{S_T} f_t(s,t)\theta(s,t)dsdt.$$

Полагая $\theta(s,t) \equiv p(s)q(t)$, где $p \in C(\overline{S})$, а $q \in C^\infty[0,T]$ — финитная на отрезке $[0,T]$ функция, получим, что для любых таких p и q

$$\int_S \left[\int_0^T f(s,t)q'(t)dt + \int_0^T f_t(s,t)q(t)dt\right] p(s)ds = 0.$$

Следовательно, какова бы ни была функция q из указанного класса, при п.в. $s \in S$ имеет место соотношение

$$\int_0^T f(s,t)q'(t)dt = -\int_0^T f_t(s,t)q(t)dt.$$

Это означает, что при почти всех $s \in S$ функция $f(s,\cdot)$ является элементом $W_1^1[0,T]$, и в частности, имеет смысл говорить о следе $f(\cdot,t)$.

Покажем, что $f \in C([0,T], L_2(S))$. В самом деле, пусть $\vartheta \in L_2(S)$ — произвольна. Тогда

$$\left|\int_S f(s,t+\Delta t)\vartheta(s)ds - \int_S f(s,t)\vartheta(s)ds\right| =$$

$$= \left|\int_S [f(s,t+\Delta t) - f(s,t)]\vartheta(s)ds\right| \le$$

$$\le \int_S |f(s,t+\Delta t) - f(s,t)|\,|\vartheta(s)|\,ds =$$

$$= \int_S \left|\int_t^{t+\Delta t} f_t(s,\tau)d\tau\right| |\vartheta(s)|\,ds \le$$

$$\le \left|\int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_S |f_t(s,\tau)||\vartheta(s)|ds\right| \le$$

$$\le \|\vartheta\|_{2,S} \left|\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_S |f_t(s,\tau)|^2 ds\right)^{1/2} d\tau\right|.$$

Таким образом,

$$\left|\int_S [f(s,t+\Delta t) - f(s,t)]\vartheta(s)ds\right| \le$$

$$\le \|\vartheta\|_{2,S} \left|\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_S |f_t(s,\tau)|^2 ds\right)^{1/2} d\tau\right|.$$

Беря от обеих частей последнего неравенства точную верхнюю грань по всем $\vartheta \in L_2(S)$, у которых $\|\vartheta\|_{2,S} \le 1$, и используя теорему Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством, заключаем, что

$$\|f(\cdot,t+\Delta t) - f(\cdot,t)\|_{2,S} \le$$

$$\le \left|\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_S |f_t(s,\tau)|^2 ds\right)^{1/2} d\tau\right|.$$

Следовательно, при всех $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_2(S)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_2(S)$.

Докажем теперь оценку (1). Поскольку функция $f(s,\cdot)$ при п.в. $s \in S$ является элементом пространства $W_1^1[0,T]$, то на основании классической теоремы вложения ($W_1^1[0,T]$ ограниченно вложено в $C[0,T]$) найдётся постоянная $c_1 = c_1(T) > 0$, зависящая лишь от $T > 0$ и не зависящая от выбора функции $f \in W_{2,1}^{0,1}(S_T)$, такая, что для каждого $t \in [0,T]$ при почти всех $s \in S$

$$|f(s,t)| \le c_1 \int_0^T \left[|f(s,\tau)| + |f_t(s,\tau)|\right] d\tau.$$

Предположим, что $\vartheta \in L_2(S)$, $t \in [0,T]$ — произвольны. Тогда

$$\left|\int_S f(s,t)\vartheta(s)ds\right| \le \int_S |f(s,t)||\vartheta(s)|\,ds \le$$

$$\le \int_S \left\{c_1 \int_0^T \left[|f(s,\tau)| + |f_t(s,\tau)|\right] d\tau\right\} |\vartheta(s)|\,ds =$$

$$= c_1 [\int_0^T d\tau \int_S |f(s,\tau)||\vartheta(s)|\,ds +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_S |f_t(s,\tau)||\vartheta(s)| ds] \le$$

$$\le c_1 \|\vartheta\|_{2,S} [\int_0^T \left(\int_S |f(s,\tau)|^2 ds\right)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^T \left(\int_S |f_t(s,\tau)|^2 ds\right)^{1/2}] =$$

$$= c_1 \|\vartheta\|_{2,S} \|f\|_{2,1,S_T}^{(0,1)}.$$

Как следствие, для всех $t \in [0,T]$ при каждом $\vartheta \in L_2(S)$

$$\left|\int_S f(s,t)\vartheta(s)ds\right| \le c_1\|\vartheta\|_{2,S}\|f\|_{2,1,S_T}^{(0,1)}.$$

Переходя в обеих частях данного неравенства к точной верхней грани по всем $\vartheta \in L_2(S)$, $\|\vartheta\|_{2,S} \le 1$, на основании теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством, будем иметь при каждом $t \in [0,T]$

$$\|f(\cdot,t)\|_{2,S} \le c_1\|f\|_{2,1,S_T}^{(0,1)}.$$

Это совместно с доказанным ранее включением $W_{2,1}^{0,1}(S_T) \subset C([0,T],L_2(S))$ даёт оценку (1). Теорема полностью доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00495).

ON AN EMBEDDING THEOREM

V.S. Gavrilov

An embedding theorem for functions belonging to Sobolev space is proved. These functions are defined on a cylinder side surface over a bounded domain $\Omega \subset R^n$.