ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.37 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-335-342

Об одной формуле Лиувилля

Ю. В. Андрианова, В. Б. Шерстюков

Андрианова Юлия Владимировна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: yulia.andrianova@math.msu.ru
Шерстюков Владимир Борисович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: shervb73@gmail.com

Аннотация

Обсуждается классическая формула Лиувилля, выражающая кратный интеграл по многомерной пирамиде через интеграл по отрезку. Показано, как формула Лиувилля связана со специальной суммой, содержащей последовательные первообразные подынтегральной функции. Приведены конкретные примеры, иллюстрирующие общий результат. Попутно доказана компактная формула для вычисления степенных моментов экспоненциальной функции.

Ключевые слова: кратный интеграл, формула Лиувилля, биномиальная сумма, факториал, субфакториал, число e.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Андрианова, Ю. В., Шерстюков, В. Б. Об одной формуле Лиувилля // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 335–342.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.37 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-335-342

A certain formula of Liouville

Yu. V. Andrianova, V. B. Sherstyukov

Andrianova Yulia Vladimirovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: yulia.andrianova@math.msu.ru
Sherstyukov Vladimir Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: shervb73@gmail.com

Abstract

The classical Liouville formula expressing the multiple integral over a multidimensional pyramid through the integral over a segment is discussed. It is shown how the Liouville formula is related to the special sum, containing successive antiderivatives of the integrand. Specific examples are given to illustrate the general result. Along the way, a compact formula for calculating the power moments of an exponential function is proved.

Keywords: multiple integral, Liouville formula, binomial sum, factorial, subfactorial, Euler number.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Andrianova, Yu. V., Sherstyukov, V. B. 2024, “A certain formula of Liouville” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 335–342.

1. Введение

Идея написать заметку родилась в ходе обсуждения примера № 15.478 из известного задачника [1]. Требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\,\dots\,,\,x_n\geqslant 0,\\ x_1+\ldots+x_n\leqslant 1}}\!\!\cdots\!\int \sqrt{x_1+\ldots+x_n}\;dx_1\,\ldots\,dx_n. \tag{1}$$

Нахождение кратного интеграла (1) двумя различными способами приводит к неочевидной формуле

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{4^k k!}{(2k+1)!\,(n-k)!}=\frac{2}{(2n+1)(n-1)!},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

которую, кстати, не так просто вывести напрямую. Заинтересовавшись случайно обнаруженным эффектом, авторы решили поделиться возникающими на этом пути соображениями.

2. Формула Лиувилля

Начнём с одного общего результата, называемого формулой Лиувилля (см. [1; № 15.486]).

Теорема 1. *Пусть* $f\in C[0,a]$, *где* $a>0$, *и*

$$V_n(a)=\{(x_1,\,\dots\,,x_n):\ \ x_1\geqslant 0,\,\dots\,,\,x_n\geqslant 0,\ \ x_1+\,\ldots\,+x_n\leqslant a\}\,,\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

есть n*-мерная пирамида. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{V_n(a)}\!\!\cdots\!\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a t^{n-1}f(t)\,dt,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Доказательство. Для полноты изложения и сравнения с последующим приведём обоснование формулы (4). Перейдём в кратном интеграле к новым переменным

$$y_1=x_1+\ldots+x_n,\quad y_2=x_1+\ldots+x_{n-1},\quad \ldots\,,\quad y_n=x_1.$$

Область интегрирования в координатах $(y_1,\,\ldots\,,\,y_n)$ задаётся неравенствами

$$0\leqslant y_1\leqslant a,\quad 0\leqslant y_2\leqslant y_1,\quad \ldots\,,\quad 0\leqslant y_n\leqslant y_{n-1},$$

а модуль якобиана соответствующего отображения равен единице. Тогда

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\;dx_1\;\ldots\;dx_n=\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-1}}dy_n=$$

$$=\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-2}}y_{n-1}\,dy_{n-1}=\frac{1}{2!}\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-3}}y_{n-2}^2\;dy_{n-2}=\;\ldots\;=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a y_1^{n-1}f(y_1)\,dy_1.$$

Формула (4) доказана. □

Другое доказательство формулы Лиувилля предложено в [2; гл. 18, § 5]. Как видно из (4) при $f\equiv 1$, объём n-мерной пирамиды (3) находится по формуле

$$|V_n(a)|=\frac{a^n}{n!},\qquad a>0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Используя (5) выразим кратный интеграл в (4) по-другому.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при любых* $a>0$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\;\ldots\;dx_n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\,F_k(a), \tag{6}$$

где F_k *обозначает* k*-ую первообразную функции* f *на* $[0,a]$, *определяемую рекуррентным правилом*

$$F_k(t)=\int\limits_0^t F_{k-1}(s)\,ds,\quad k\in\mathbb{N},\qquad F_0(t)\equiv f(t). \tag{7}$$

Доказательство. В соответствии с определением (3) имеем

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\;\ldots\;dx_n=\int\limits_{V_{n-1}(a)}\cdots\int dx_1\;\ldots\;dx_{n-1}\int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}}f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_n.$$

Внутренний интеграл в терминах первообразной $F_1(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds$ переписывается так

$$\int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}}f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_n=\int\limits_{x_1+\ldots+x_{n-1}}^a f(t)\,dt=F_1(a)-F_1(x_1+\ldots+x_{n-1}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\;\ldots\;dx_n=|V_{n-1}(a)|\,F_1(a)-\int\limits_{V_{n-1}(a)}\cdots\int F_1(x_1+\ldots+x_{n-1})\,dx_1\;\ldots\;dx_{n-1}.$$

Те же соображения с использованием следующей первообразной $F_2(t) = \int\limits_0^t F_1(s)\,ds$ дают

$$\int\limits_{V_{n-1}(a)}\!\!\cdots\!\int F_1(x_1+\ldots+x_{n-1})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-1} =$$

$$= |V_{n-2}(a)|\,F_2(a) - \int\limits_{V_{n-2}(a)}\!\!\cdots\!\int F_2(x_1+\ldots+x_{n-2})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-2}.$$

Отсюда с учётом (5) имеем

$$\int\limits_{V_n(a)}\!\!\cdots\!\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n =$$

$$= \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\,F_1(a) - \frac{a^{n-2}}{(n-2)!}\,F_2(a) + \int\limits_{V_{n-2}(a)}\!\!\cdots\!\int F_2(x_1+\ldots+x_{n-2})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-2}.$$

Продолжив процесс на нужное число шагов, придём к формуле (6). Обратим внимание, что на последнем шаге возникнет интеграл $\int\limits_0^a F_{n-1}(x_1)\,dx_1 = F_n(a)$ по одномерной пирамиде $V_1(a)$, совпадающей с отрезком $[0,a]$, и для корректного действия формулы (6) важен выбор n-ой первообразной именно по правилу (7). □

Из теорем 1, 2 очевидно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $f \in C[0,a]$, где $a > 0$, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда верна формула*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\,F_k(a) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a t^{n-1} f(t)\,dt, \tag{8}$$

левая часть которой вычисляется на основе (7).

Вернёмся к исходному кратному интегралу (1). С одной стороны, по формуле Лиувилля (4) находим

$$\int\limits_{V_n(1)}\!\!\cdots\!\int \sqrt{x_1+\ldots+x_n}\,dx_1\,\ldots\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 t^{n-1/2}\,dt = \frac{2}{(2n+1)(n-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку для $f(t) = \sqrt{t}$ первообразные (7) имеют вид

$$F_k(t) = \frac{t^{1/2+k}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{2}} = \frac{4^k\,k!}{(2k+1)!}\,t^{1/2+k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0,1],$$

то формула (6) в таком случае означает, что

$$\int\limits_{V_n(1)}\!\!\cdots\!\int \sqrt{x_1+\ldots+x_n}\,dx_1\,\ldots\,dx_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{4^k\,k!}{(2k+1)!\,(n-k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Сопоставив (9) и (10), получим тождество (2) как частный случай (8) при выборе $a = 1$ и $f(t) = \sqrt{t} \in C[0,1]$.

Разумеется, соотношение (8) можно доказать иначе — многоразовым интегрированием по частям его правой половины с пошаговым привлечением первообразных (7). Способ, основанный на соединении теорем 1, 2, представляется более изящным.

Рассмотрим ещё два примера на применение формулы (8).

Пример 3. *Пусть* $f(t) = t^\alpha$, *где* $\alpha > 0$. *Элементарно проверяется, что*

$$F_k(t) = \frac{t^{\alpha+k}}{(\alpha+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha+k)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Подставив это выражение и $a = 1$ *в* (8), *получим соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!\,(\alpha+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha+k)} = \frac{1}{(n-1)!\,(\alpha+n)}, \tag{11}$$

выполненное при всех $\alpha > 0$ *и любом* $n \in \mathbb{N}$. *По принципу аналитического продолжения формула распространяется на все значения* α *в плоскости* $\mathbb{C}$ *с выброшенными из неё целыми точками* $-n, \ldots, -1$. *Соотношение* (11) *есть частный случай тождества, с помощью которого обычно выводят интерполяционную формулу Ньютона (см., например,* [3; § 3, *формула* 3.1.1]). *Мы уже видели, что при* $\alpha = 1/2$ *тождество* (11) *конкретизируется в* (2). *Но теперь можно подставлять в* (11) *запрещённые ранее условием* $\alpha > 0$ *значения. Например, выбор* $\alpha = -1/2$ *позволяет вычислить схожую с* (2), *но чуть другую сумму*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{4^k k!}{(2k)!\,(n-k)!} = \frac{2}{(2n-1)(n-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Обе суммы допускают эквивалентную запись через биномиальные коэффициенты. Именно,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{4^k}{2k+1} \frac{C_n^k}{C_{2k}^k} = \frac{2n}{2n+1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 4^k \frac{C_n^k}{C_{2k}^k} = \frac{2n}{2n-1}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Пример 4. *Пусть* $f(t) = e^t$. *Тогда по формуле* (7) *находим*

$$F_k(t) = e^t - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{t^m}{m!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

При $a = 1$ *левая часть в* (8) *принимает вид*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!} F_k(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!} \left(e - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \right) =$$
$$= (-1)^{n-1} e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} = (-1)^{n-1} \left(e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right),$$

а правая — соответственно, вид

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 t^{n-1} e^t\, dt.$$

Поэтому, заменив в (8) $n-1$ *на* n, *придём к равенству*

$$\int_0^1 t^n e^t\, dt = (-1)^n n! \left(e \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{12}$$

(см. также [4, раздел 1.3.2]). Дальнейшие возможные упрощения правой части (12) связаны с понятием субфакториала $!n$, определяемого для натурального числа n как количество перестановок n элементов без неподвижных точек (т. е. количество беспорядков). Известно (см. [5, гл. 5, § 5.3], [6]), что

$$!n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $\lfloor x \rceil$ обозначает ближайшее к $x \in \mathbb{R}$ целое число. Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_0^1 t^n e^t\,dt = (-1)^n e\left(!n - \frac{n!}{e}\right) = (-1)^n e\left(\left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil - \frac{n!}{e}\right).$$

Наконец, обозначив через $\|x\|$ расстояние от x до ближайшего к нему целого числа, запишем окончательно изящную формулу

$$\int\limits_0^1 t^n e^{t-1}\,dt = \left\| \frac{n!}{e} \right\|, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

(при $n = 0$ правило (13) не работает). Отсюда мгновенно следует асимптотика

$$\left\| \frac{n!}{e} \right\| \sim \frac{1}{n}, \qquad n \longrightarrow \infty,$$

поскольку для любой функции $f \in C[0,1]$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n\int\limits_0^1 t^n f(t)\,dt = f(1).$$

Кроме того, последовательность расстояний $\|n!/e\|$, где $n \in \mathbb{N}$, как последовательность степенных моментов положительной и непрерывной на $[0,1]$ функции, является вполне монотонной (положительны все её конечные разности любого порядка), в частности — в строгом смысле убывает и выпукла. Несколько близких к (13) тождеств для интегралов (в других обозначениях) приведено в [6].

Заметим, что разложение экспоненты в степенной ряд с последующим почленным интегрированием даёт в дополнение к (12), (13) представление

$$\int\limits_0^1 t^n e^t\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

менее удобное для практического применения. Например, взяв $n = 3$, по формулам (12), (13) устно вычисляем

$$\int\limits_0^1 t^3 e^t\,dt = -6\left(e\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!} - 1\right) = 6 - 6e\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 6 - 2e,$$

$$\int\limits_0^1 t^3 e^t\,dt = e\left\| \frac{6}{e} \right\| = e\left(\frac{6}{e} - 2\right) = 6 - 2e,$$

в то время как ответ

$$\int\limits_0^1 t^3 e^t \; dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+4)},$$

получаемый по формуле (14)*, ещё нужно «довести до числа».*

Завершая разбор примера, отметим найденное по ходу дела красивое соотношение

$$\int\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0,\, \ldots,\, x_{n+1} \geqslant 0,\\ x_1+\ldots+x_{n+1} \leqslant 1}} \cdots \int e^{x_1+\ldots+x_{n+1}}\, dx_1 \,\ldots\, dx_{n+1} = \frac{e}{n!} \left\| \frac{n!}{e} \right\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. Заключение

Очевидно, потенциал формулы (8) не исчерпывается рассмотренными простейшими примерами. Ясно также, что многие из фигурирующих в работе соотношений могли быть подмечены ранее. Однако, нам кажется полезным взгляд с разных позиций на классическую формулу Лиувилля.

Кстати говоря, было бы любопытно в духе предложенной заметки проанализировать общий вариант этой формулы

$$\int\limits_{V_n(1)} \cdots \int x_1^{p_1-1} \,\ldots\, x_n^{p_n-1} f(x_1+\ldots+x_n)\, dx_1 \,\ldots\, dx_n \;=\; \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n)} \int\limits_0^1 t^{\,p_1+\ldots+p_n-1} f(t)\, dt,$$

действующий для любой $f \in C[0,1]$, с произвольными $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, где $n \in \mathbb{N}$, и значениями гамма-функции $\Gamma(p)$ в соответствующих точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Т. 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. — М.: МЦНМО, 2018. — 256 с.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. — М.: Наука, 1966. — 656 с.

3. Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения. — М.: КомКнига, 2006. — 112 с.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.

5. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 704 с.

6. Hassani M. Derangements and applications // Journal of Integer Sequences. 2003. Vol. 6. Article 03.1.2.

REFERENCES

1. Vinogradova, I. A., Olekhnik, S. N., Sadovnichii, V. A. 2018, “Mathematical analysis in tasks and exercises”, *MCCME, Moscow*, 256 pp.

2. Fikhtengol'ts, G. M. 1966, "A Course of Differential and Integral Calculus", *Nauka, Moscow*, Vol. 3, 656 pp.

3. Gel'fond, A. O. 2006, "Residues and Their Applications", *KomKniga, Moscow*, 112 pp.

4. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I. 1981, "Integrals and Series. Elementary functions", *Nauka, Moscow*, 800 pp.

5. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. 1994, "Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science", *2nd edition. Addison-Wesley, MA*, xiv+657 pp.

6. Hassani, M. 2003, "Derangements and applications", *Journal of Integer Sequences*, vol. 6. Article 03.1.2.

Получено: 14.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024