УДК 517.518.85

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Хохолов В. Б.

Для треугольной матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}$ на отрезке $[-1,1]$ по n-й строке $-1 \leqslant x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} \leqslant 1$, $n = 3,4,5,\ldots$, для любой непрерывной функции $f(x) \in C[-1,1]$ определим интерполяционный процесс Лагранжа $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}_{n=3}^{\infty}$:

$$L_n(\mathfrak{M}, f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}(\mathfrak{M}, x), \tag{1}$$

где

$$l_{k,n} = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_{k,n}).$$

Следуя С. Н. Бернштейну [1], при любом $n \geqslant 3$ для функции $f(x) \in C[-1,1]$ положим

$$B_n(\mathfrak{M}, f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{k,n}) \lambda_{k,n}(\mathfrak{M}, x), \tag{2}$$

где

$$\lambda_{0,n}(\mathfrak{M}, x) = l_{0,n}(\mathfrak{M}, x), \quad \lambda_{n,n}(\mathfrak{M}, x) = l_{n,n}(\mathfrak{M}, x),$$

$$\lambda_{1,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{3l_{1,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{2,n}(\mathfrak{M}, x)}{4},$$

$$\lambda_{n-1,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{3l_{n-1,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{n-2,n}(\mathfrak{M}, x)}{4},$$

$$\lambda_{k,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{l_{k-1,n}(\mathfrak{M}, x) + 2l_{k,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{k+1,n}(\mathfrak{M}, x)}{4}.$$

Миллз и Варма [2] рассмотрели процесс (2) в случае матрицы Чебышева второго рода, т. е. матрицы U, n-я строка которой состоит из нулей многочлена

$$\omega_{n+1}(U,x) = (1-x^2)U_{n-1}(x),$$

где U_{n-1} — многочлен Чебышева второго рода степени $n-1$, и показали, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - B_n(U,f,x)| = 0$$

для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ (на самом деле в [2] получен более сильный результат о порядке наилучшего приближения).

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=3}^{\infty}$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В качестве матрицы интерполирования возьмем матрицу, составленную из корней многочлена $(1-x^2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$, и по n-й строке этой матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$, $n = 3,4,\dots$, $-1 = x_{n,n} < x_{n-1,n} < \dots < x_{1,n} = 1$, запишем по формуле (2) многочлен $B_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ для функции $f(x) \in C[-1,1]$.

Теорема 1. *Если* $|\alpha| = |\beta| = 1/2$, *то для любой функции* $f(x) \in C[-1,1]$ *справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - B_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)| = 0.$$

Ключевым моментом доказательства является установление справедливости неравенств

$$\sum_{k=2}^{n-2} |l_k(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) + l_{k+1}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x)| \leqslant C^{(\alpha,\beta)} \quad \text{при } |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2},$$

где $C^{(\alpha,\beta)} > 0$ зависят только от α и β.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_l$, где $\mathfrak{M}_l$ — матрица равноотстоящих узлов на отрезке $[-1,1]$: $x_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}$, $k = 0,1,2,\dots,n$; $n = 1,2,3,\dots$.

В [1] С. Н. Бернштейн заметил, что для матрицы $\mathfrak{M}_l$ подобное (2) «внесение поправок уже не является достаточным». Также известно, что процесс $\{L_n(\mathfrak{M}_l, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в окрестности точки $x = 0$ и справедлива

Теорема 2 [3]. *Для каждого $r > 0$ найдется такая постоянная A_r, что*

$$\max_{|x|\leqslant r/\sqrt{n}} \lambda_{n+1}(\mathfrak{M}_l, x) \leqslant A_r \ln n.$$

Здесь $\lambda_n(\mathfrak{M}_l, x)$ — функция Лебега интерполяционного процесса Лагранжа (1).

Обозначим через $\mu_n(\mathfrak{M}_l, x)$ функцию Лебега процесса (2).

Теорема 3. *Для каждого $r > 0$ найдется такая постоянная B_r, что*

$$\max_{|x|\leqslant r/\sqrt{n}} \mu_{n+1}(\mathfrak{M}_l, x) \leqslant B_r \ln n.$$

Замечание. Удалось лишь показать, что $B_r < A_r$.

На рис. 1 показано поведение многочлена Лагранжа (1) и многочлена (2) при приближении функции $f(t) = |t|$, $n = 10$.

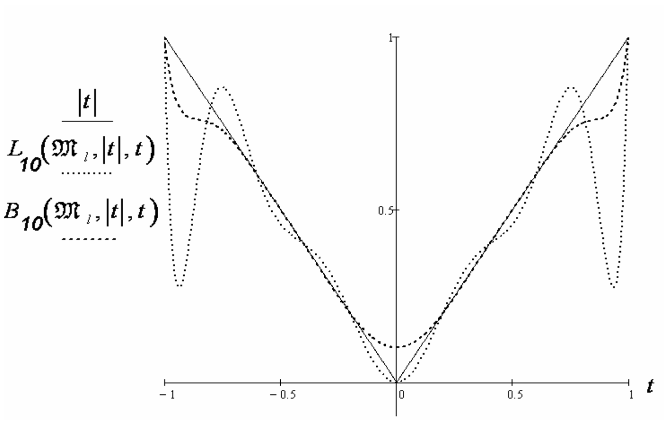

Рис. 1.

Теорема 4. *Для каждого $r > 0$ найдется x', $|x'| \leqslant r/\sqrt{n}$, такой, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu_n(\mathfrak{M}_l, x')}{\ln n} = c > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа // Полн. собр. соч.: В 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. С. 130–140.
2. *Mills T. M., Varma A. K.* A new proof of S. A. Teljakovskii's approximation theorem // Stud. Sci. Math. Hung. 1979. V. 14. P. 241–246.
3. *Runck P. O.* Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit aquidistanten Knoten. I–II // J. Reine Angew. Math. 1961. Bd 208, Heft 1–2. S. 51–69; 1962. Bd 210, Heft 3–4. S. 175–204.

г. Якутск *19 февраля 2013 г.*