

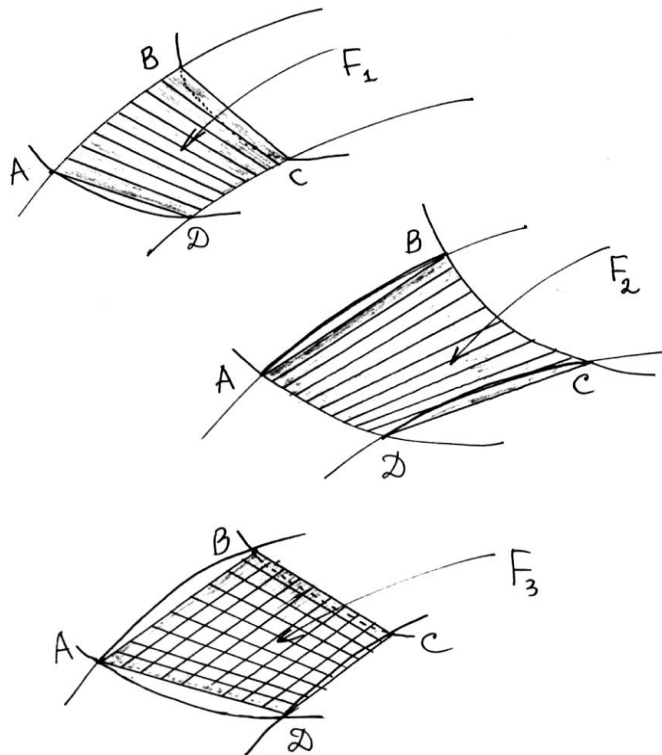


Рис. 4

Аппроксимация ячейки поверхности линейчатыми поверхностями

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Forrest A.R. Computational Geometry. Proc. Roy. Soc. Lond, 1971. С. 187–195.
2. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982. С. 302.
3. Стародетко Е.А. Элементы вычислительной геометрии. Минск: Наука и техника, 1986. С. 240.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. С. 352.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука; 1976. С. 248.

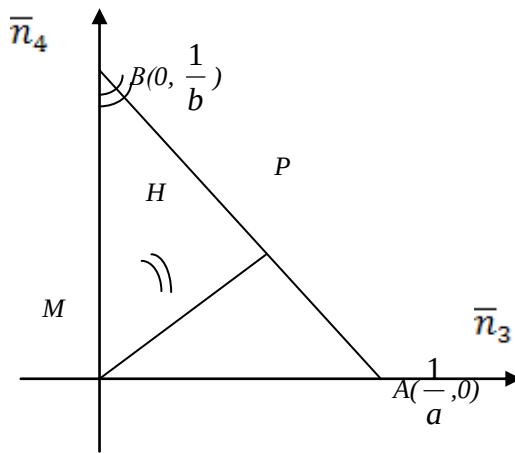
В.Т. Фоменко, О.Н. Фартушная, В.В. Сидорякина

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТОРА КЛИФФОРДА В E^4

П.1 Известно, что тор Клиффорда $T_{a,b}^2$ в E^4 определяется как произведение двух окружностей S_a^1 и S_b^1 радиусов a и b , соответственно. Тор Клиффорда обладает рядом замечательных свойств, в частности:

- 1) имеет плоскую метрику;

- 2) имеет плоскую нормальную связность;
- 3) имеет нулевое нормальное кручение в любой точке по любому направлению;
- 4) имеет постоянные главные кривизны, равные, соответственно, $k_1 = 1/a$; $k_2 = 1/b$;
- 5) имеет постоянную среднюю кривизну $H = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- 6) индикатриса кривизны тора Клиффорда есть отрезок прямой длины $l = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$;
- 7) тор Клиффорда $T_{a,b}^2$ лежит на гиперсфере $S^3(\sqrt{a^2+b^2})$ радиуса $\sqrt{a^2+b^2}$;
- 8) индикатриса кривизны в оснащении $\{\bar{n}_\sigma\}_{\sigma=3}^4$ имеет вид, изображенный на рисунке:



Перечисленными свойствами тор Клиффорда с точностью до движения в E^4 однозначно определен. Это означает, что задав поверхность $T_{a,b}^2$ в E^4 с указанными свойствами, где a и b – некоторые действительные числа, можно утверждать, что T^2 есть тор Клиффорда

$$T^2(a,b) = S_a^1 \times S_b^1$$

П.2. Определение. Обобщенным тором Клиффорда в E^4 назовем поверхность T^2 , обладающую следующими свойствами:

- 1) поверхность T^2 имеет плоскую метрику,
- 2) поверхность T^2 имеет плоскую нормальную связность.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. Обобщенный тор Клиффорда в E^4 есть произведение двух плоских кривых $l^1(k_1)$ и $l^2(k_2)$, где k_1 и k_2 – кривизны кривых $l^1(k_1)$ и $l^2(k_2)$, соответственно.

Доказательство. Так как поверхность имеет нулевую кривизну, то на поверхности T^2 можно ввести декартовы координаты (x, y) так, что метрика ds^2 имеет вид: $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Так как нормальная связность поверхности T^2 является плоской, то, не нарушая в общности, можно считать, что нормальное оснащение, порожденное ортонормированным базисом $\{\bar{n}_\sigma\}_{\sigma=3}^4$, таково, что вторые квадратичные формы поверхности T^2 имеет вид:

$$II(\bar{n}_3) = b_{311} dx^2;$$

$$II(\bar{n}_4) = b_{411} dy^2.$$

В самом деле, индикатриса кривизны есть отрезок прямой (в силу плоской нормальной связности) и этот отрезок просматривается из точки поверхности под прямым углом (в силу плоской метрики точка поверхности лежит на ортооптической окружности).

Обратимся к уравнениям Кодацци:

$$\bar{\nabla}_2 b_{11}^3 = \bar{\nabla}_2 b_{21}^3; \quad \bar{\nabla}_1 b_{22}^3 = \bar{\nabla}_2 b_{12}^3;$$

$$\bar{\nabla}_1 b_{22}^4 = \bar{\nabla}_2 b_{12}^4; \quad \bar{\nabla}_2 b_{11}^4 = \bar{\nabla}_1 b_{21}^4;$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} \partial_y b_{11}^3 + \Gamma_{2\delta}^3 b_{11}^\delta = \partial_x b_{12}^3 + \Gamma_{2\delta}^3 b_{12}^\delta; \\ \partial_y b_{11}^3 + \Gamma_{2\delta}^3 b_{11}^\delta = \partial_x b_{12}^3 + \Gamma_{2\delta}^3 b_{12}^\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x b_{22}^4 + \Gamma_{14}^3 b_{22}^4 = \partial_y b_{12}^4 + \Gamma_{24}^3 b_{12}^4; \\ \partial_y b_{11}^4 + \Gamma_{23}^4 b_{11}^3 = \partial_x b_{12}^4 + \Gamma_{13}^4 b_{12}^3 \end{cases}$$

Эти уравнения дают:

$$\begin{cases} \partial_y b_{11}^3 + \Gamma_{24}^3 b_{11}^4 = \Gamma_{14}^3 b_{12}^4 \\ \partial_y b_{22}^4 + \Gamma_{13}^4 b_{22}^3 = \Gamma_{23}^4 b_{12}^3 \end{cases} \begin{cases} \Gamma_{14}^3 b_{22}^4 = 0 \\ \Gamma_{23}^4 b_{11}^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{14}^3 = \Gamma_{23}^4 = 0.$$

Так как $b_{11}^4 = b_{22}^3 = b_{12}^3 = b_{11}^4$, то имеем

$$\begin{cases} b_{11}^3 = b_{11}^3(x) \\ b_{22}^4 = b_{22}^4(x) \end{cases}$$

Обратимся к уравнению Риччи. Имеем

$$\partial_2 \Gamma_{14}^3 - \partial_1 \Gamma_{24}^3 = 0$$

оно выполняется тождественно.

Далее находим:

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|b_{ij}^3\| = \begin{pmatrix} b_{11}^3(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|b_{ij}^4\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^4(y) \end{pmatrix};$$

Покажем, что в этом случае T^2 есть произведение двух кривых $l^1(k_1)$, $l^2(k_2)$. Полагаем:

$$l^1(k_1): \bar{r} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), 0, 0\};$$

$$l^2(k_2): \bar{r} = \{0, 0, \psi_3(y), \psi_4(y)\};$$

где $\varphi_1'^2(x) + \varphi_2'^2(x) \equiv \psi_1'^2(y) + \psi_2'^2(y) \equiv 1$, $k_1 = b_{11}^3(x)$, $k_2 = b_{22}^4(y)$.

Далее положим $\tilde{T}^2: \bar{r}(x, y) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_3(y), \psi_4(y)\}$

$$\bar{r}_1 = \{\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), 0, 0\};$$

$$\bar{r}_2 = \{0, 0, \psi_3'(y), \psi_4'(y)\};$$

$$\bar{n}_3 = \{-\varphi_2'(x), \varphi_1'(x), 0, 0\}$$

$$\bar{n}_4 = \{0, 0, -\psi_4'(y), \psi_3'(y)\}$$

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|b_{ij}^3\| = \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|b_{ij}^4\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2(y) \end{pmatrix};$$

$\Gamma_{14}^3 = 0$; $\Gamma_{24}^3 = 0$. Это означает, что основные формы поверхностей $\tilde{T}^2$ и T^2 совпадают.

Следовательно, поверхности T^2 и $\tilde{T}^2$ отличаются друг от друга на движение в E^4 .

П.3. Докажем теперь обратную теорему:

Теорема 2. Пусть $\tilde{T}^2 = l^1(k_1) \times l^2(k_2)$, где $l^i(k_i)$, $i = 1, 2$ – есть плоские

кривые с кривизной k_i , $i = 1, 2$ Тогда поверхность $\tilde{T}^2$ есть обобщенный тор Клиффорда.

Доказательство.

Положим

$\tilde{T}^2: \bar{r} = \bar{r}(x, y) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(y), \psi_2(y)\}$, где x, y – натуральные пара-

метры кривых $l^1(k_1): \bar{r} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ и $l^2(k_2): \bar{r} = \{\psi_1(y), \psi_2(y)\}$. Под-

счет показывает:

$$\bar{r}_1 = \{\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), 0, 0\};$$

$$\bar{r}_2 = \{0, 0, \psi'_3(y), \psi'_4(y)\};$$

$$\bar{n}_3 = \{\varphi''_1(x), \varphi''_2(x), 0, 0\} \cdot \frac{1}{k_1(x)};$$

$$\bar{n}_4 = \{0, 0, \psi''_1(y), \psi''_2(y)\} \cdot \frac{1}{k_2(y)};$$

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|b_{3ij}\| = \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|b_{4ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2(y) \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{14}^3 = (\bar{n}_3, \bar{n}_{4x}) = 0; \quad \Gamma_{24}^3 = (\bar{n}_3, \bar{n}_{4y}) = 0.$$

Это означает, что метрика поверхности $\tilde{T}^2$ имеет нулевую кривизну, и нормальная связность поверхности $\tilde{T}^2$ является плоской, то есть поверхность $\tilde{T}^2 = l^1(k_1) \times l^2(k_2)$, есть обобщенный тор Клиффорда, что и доказывает теорему 2.

П.4. Ранее в работах [1], [2] изучались бесконечно малые ARG – деформации тора Клиффорда и его кусков в E^4 . Здесь будут изучены бесконечно-малые ARG – деформации обобщенного тора Клиффорда T^2 либо его односвязных кусков в E^4 . Далее будем считать, что параметры (x, y) пробегают некоторую односвязную область D числовой плоскости R^2 . В случае, если обобщенный тор Клиффорда представляет собой замкнутую без границы ограниченную поверхность рода $p > 0$, то будем изучать ARG – деформации универсальной накрывающей тора $\tilde{T}^2$.

Положим $\bar{r}_\varepsilon = \bar{r}(x, y) + \varepsilon \bar{z}(x, y)$, где $\bar{z}$ – поле деформации поверхности $\tilde{T}^2$ таково, что $\delta n^{\alpha\beta} = 0$ и $\delta(d\sigma) = 2(\bar{H}, \bar{z})\lambda d\sigma$, где $d\sigma$ – элемент площади поверхности, $\bar{H}$ – вектор средней кривизны поверхности, λ – заданный действительный коэффициент рекуррентности, $\lambda \in R$; $n^{\alpha\beta}$ – единичный бивектор нормальной плоскости для $\tilde{T}^2$.

Уравнение ARG – деформации поверхности $\tilde{T}^2$ имеют вид:

$$\begin{cases} g^{ij}(\bar{r}_i, \bar{z}_j) = 4\lambda(\bar{H}, \bar{z}), \\ (\bar{n}_3, \bar{z}_i) = 0, \\ (\bar{n}_4, \bar{z}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \text{ где } g_{ij} = (\bar{r}_i, \bar{r}_j). \end{cases}$$

Полагая $\bar{z} = a^i \bar{r}_i + c^\sigma \bar{n}_\sigma$, отсюда находим систему дифференциальных уравнений от-

носительно a^i, c^σ . Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \sqrt{g} a^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g} a^2}{\partial u^2} - 2(1 + \lambda) \sqrt{g} (H_3 c^3 + H_4 c^4) = 0, \\ \partial_i c^\sigma + a^k b_{ik}^\sigma + \Gamma_{i\tau}^\sigma c^\tau = 0, \quad i = 1, 2; \end{cases}$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$, $H^\sigma \bar{n}^\sigma$ – вектор средней кривизны,

$$H^3 = H_3, H^4 = H_4; \Gamma_{i\tau}^\sigma = g^{\sigma\lambda} \Gamma_{\lambda, i\tau}, \Gamma_{\lambda, i\tau} = (\bar{n}_\lambda, \partial_i \bar{n}_\tau);$$

$$g^{\sigma\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b_{\sigma ik} = (\bar{n}_\sigma, \bar{r}_{ik}); b_{ik}^\sigma = g^{\sigma\lambda} b_{\lambda, ik}, u^1 = x, u^2 = y, (x, y) \in D.$$

Для поверхности $\tilde{T}^2$ эта система принимает вид:

$$\begin{cases} a_x^1 + a_y^2 (1 + \lambda) (k_1 c^3 + k_2 c^4) = 0; \\ c_x^3 + k_1 a^1 = 0; \\ c_y^3 = 0; \\ c_x^4 = 0; \\ c_y^4 + k_2 a^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $c^3 = \varphi(x)$, $c^4 = \psi(y)$

$$a^1 = -\frac{\varphi'_x}{k_1}; \quad a^2 = -\frac{\psi'_y}{k_2}; \quad \left(\frac{\varphi'_x}{k_1}\right)_x + \left(\frac{\psi'_y}{k_2}\right)_y + 2(1 + \lambda)(k_1 \varphi + k_2 \psi) = 0$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\left(\frac{\varphi'_x}{k_1}\right)_x + 2(1 + \lambda)k_1 \varphi = -\left(\frac{\psi'_y}{k_2}\right)_y - 2(1 + \lambda)k_2 \psi.$$

Так как левая часть этого уравнения зависит от x , а правая от y , то последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{cases} \left(\frac{\varphi'_x}{k_1}\right)_x + 2(1 + \lambda)k_1 \varphi = c_0; \\ \left(\frac{\psi'_y}{k_2}\right)_y + 2(1 + \lambda)k_2 \psi = -c_0 \end{cases} / (*)$$

Будем считать, что в некоторой точке M_0 поверхности $\tilde{T}^2$ наложена внешняя связь $z|_{M_0} = 0$. Это означает, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем:

$$a^1|_{M_0} = a^2|_{M_0} = c^3|_{M_0} = c^4|_{M_0} = 0.$$

Отсюда следует, что функции φ и ψ удовлетворяют начальным условиям:

$$\varphi(x_0) = 0; \varphi'_x(x_0) = 0;$$

$$\psi(y_0) = 0; \psi'_y(y_0) = 0 \quad (**)$$

Задача $(*)$, $(**)$ всегда имеет единственное решение $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$ для любой заданной постоянной c_0 и любом значении λ . Таким образом, доказана

Теорема 3. Любая поверхность $\tilde{T}^2$ (или её часть) при закреплённой точке M_0 допускает однопараметрическое семейство ARG – деформации для любого фиксированного коэффициента рекуррентности λ .

Замечание. Положим $\lambda = -1$. Тогда имеем:

$$\varphi_x = (c_0 x + c_1)k_1(x);$$

$$\varphi(x) = c_0 \int_{x_0}^x t k_1(t) dt + c_1 \int_{x_0}^x k_1(t) dt + c_2;$$

$$\psi_y = -(c_0 y + c_3)k_2(y);$$

$$\psi(y) = -c_0 \int_{y_0}^y t k_2(t) dt + c_3 \int_{y_0}^y k_2(t) dt + c_4;$$

Это означает, что поверхность $\tilde{T}^2$ допускает ARG – деформации, зависящие от 5 параметров. Если закрепить точку $M_0(x_0, y_0)$, то $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ и потому $c_2 = c_4 = 0$. Так как $\varphi'_x(0) = \psi'_y(0) = 0$, то $c_1 = c_3 = 0$ при условии, что $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$.

Это означает, что при закреплённой точке M_0 и $\lambda = -1$ поверхность $\tilde{T}^2$ допускает однопараметрическое семейство ARG – деформации с параметром c_0 . Это утверждение содержится также в теореме 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фоменко В.Т. Бесконечно малые ARG – деформации тора Клиффорда в E^4 . Вестник ТГПИ; Естественные науки, 2007. № 1. С. 21-33.
2. Бабенко О.Н. Бесконечно малые ARG-деформации куска тора Клиффорда в E^4 . Вестник ТГПИ; Естественные науки, 2008. № 1. С. 21-26.