УДК 517.53 : 517.537.72

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ГОВОРОВА–МАКЛЕЙНА–ШЕРЕМЕТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОРЯДКА

© Г. А. Гайсина

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 65.
Email: gaisinaga@mail.ru

Исследуется влияние точности условий на показатели ряда Дирихле, сходящегося лишь в полуплоскости, при выполнении которых порядок суммы ряда может быть вычислен при помощи некоторой формулы (зависящей только от коэффициентов и показателей). Для неограниченных аналитических в единичном круге функций формула такого типа в разное время независимо была установлена рядом авторов, в том числе Н. В. Говоровым (1959), Маклейном (1966) и М. Н. Шереметой (1968). Позже был введен аналог этого понятия и для рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в некоторой полуплоскости. Но соответствующая формула для порядка суммы ряда Дирихле всеми авторами была установлена либо при наложении существенных ограничений на показатели или коэффициенты. В настоящей работе рассматривается условие ограничений на показатели, которое также является и необходимым для справедливости известной формулы для порядка.

Ключевые слова: *целая функция, максимум модуля, ряды Дирихле, формула для порядка, R-порядок, полуплоскость сходимости.*

Целые функции являются непосредственным обобщением многочленов. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

является целой, то по принципу максимума модуля

$$M_f(r) \overset{\text{def}}{=} \max_{|z|=r}|f(z)| = \max_{|z|\le r}|f(z)|.$$

Так что $M_f(r)$ – неубывающая на $[0,\infty)$ функция, причем если $f(z) \not\equiv const$, то $M_f(r)$, строго возрастая, стремится к $+\infty$ при $r\to\infty$.

Для многочлена f степени n

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln r} = n.$$

Для целых трансцендентных функций (т.е. функций, отличных от многочлена) отношение $\frac{\ln M_f(r)}{\ln r}$ стремится к ∞. Поэтому рост $\ln M_f(r)$ сравнивают не с $\ln r$, а с более быстро растущими функциями, например, со степенными. Поступая таким образом, в 1896 г. Э. Борель пришел к понятию порядка ρ целой функции, полагая

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Было показано, что порядок целой функции (1) равен

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|}.$$

Пусть функция f, определенная рядом (1), аналитична только в круге $D(0,1) = \{z: |z| < 1\}$ (в этом случае радиус сходимости ряда (1) равен единице). Будем предполагать, что функция f не ограничена в $D(0,1)$. Так что $M_f(r)\uparrow\infty$ при $r\uparrow 1$. Порядком ρ неограниченной аналитической в круге $D(0,1)$ функции f называется величина

$$\rho = \varlimsup_{r\uparrow 1}\frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Как известно (см., например, [1–3]),

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n},$$

$$a^+ = \max(a,0).$$

Если положить $z = e^{-s}$ $(s = \sigma + it)$, то имеем:

$$F(s) = f(e^{-s}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}. \qquad (2)$$

Поскольку при указанной замене полуплоскость $\Pi_0 = \{s = \sigma + it: \sigma > 0\}$ отображается в единичный круг $D(0,1)$, то

$$M(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \sup_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)| = M_f(r),$$

где $\sigma > 0, r = e^{-\sigma} < 1$. Проверяется, что $-\ln(1-r) \sim -\ln\sigma$ при $r\uparrow 1$ (при этом, очевидно, $\sigma\downarrow 0$). Учитывая это, имеем:

$$\rho = \rho_F \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\downarrow 0}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\ln\sigma}.$$

Таким образом, порядок ρ функции f в $D(0,1)$ равен характеристике ρ_F роста ряда Тейлора-Дирихле (*2*). Ее называют обычным порядком или просто порядком функции F (в отличие от так называемого порядка ρ_R по Ритту (или *R*-порядка) в полуплоскости Π_0 [4]: $\rho_R = \varlimsup_{\sigma\downarrow 0}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$). Это наблюдение приводит к понятию порядка общего ряда Дирихле, сходящегося лишь в полуплоскости.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ – произвольная последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что область сходимости ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (4)$$

есть полуплоскость Π_0. В силу условия (3), ряд (4) сходится в Π_0 абсолютно, и потому его сумма F аналитична в этой полуплоскости [5]. Здесь изучается рост функции F в зависимости от поведения коэффициентов a_n ряда (4), поэтому естественно предположить, что $M_F(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \downarrow 0$, где

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \ (\sigma > 0).$$

Класс всех таких функций F, представленных рядами Дирихле (4), обозначим $D_0(\Lambda)$. Величина

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma}$$

называется порядком суммы ряда Дирихле (4). Именно так порядок определяется, например, в работах [6–10]. В [11, 12] порядок функции $F \in D_0(\Lambda)$ определяется по формуле

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln(1 - e^{-\sigma})},$$

что, очевидно, совпадает с выше введенным порядком. В перечисленных работах [7–9, 11, 12] без доказательств приводится формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}, \qquad (5)$$

справедливость которой утверждается лишь при некоторых дополнительных ограничениях на показатели λ_n и коэффициенты a_n ряда (4). Эти ограничения, весьма разные, порой являются очень жесткими. Так, в [11, 12] предполагается, что последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty.$$

Это условие, как будет видно, слишком сильное. С другой стороны, в [9] утверждается, что формула (5) верна при выполнении условий

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0.$$

Здесь же будет показано, что лишь при этих требованиях формула (5) неверна (см. также [10]). В статье [6] формула (5) доказана, но при

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\lambda_n} = \gamma < \infty. \qquad (6)$$

Оказывается, это условие может быть существенно ослаблено (см. ниже).

Обозначим

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}.$$

Положим также

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}.$$

В статье [7] утверждается, что если $\alpha \le \mu$, то $\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$, т.е. верна формула (5). Недостатком этого результата является то, что условие $\alpha \le \mu$ содержит дополнительное ограничение на коэффициенты a_n ряда Дирихле (4). Поэтому, согласно [7], формула для порядка ρ_F имеет место не для любой функции F из класса $D_0(\Lambda)$.

Равенство $\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$ доказано в [10] при $\alpha = 0$. Это условие слабее условия (6). Действительно, если $\gamma < \infty$, то

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\lambda_n} \cdot \frac{\ln\ln n}{\ln n} = 0.$$

С другой стороны, для последовательности $\{\lambda_n\}, \lambda_n = \ln^2(n+1)$, имеем: $\alpha = \frac{1}{2}$, но $\gamma = \infty$. При этом, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

В [10] показано еще следующее: существует последовательность Λ с $\alpha > 0$, существует функция $F \in D_0(\Lambda)$, для которой $\mu \ne \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$.

Цель статьи – показать, что условие $\alpha = 0$ на самом деле является необходимым. Верна следующая

Теорема. *Для того, чтобы для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ порядок ρ_F вычислялся по формуле*

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} = 0.$$

Достаточность доказана в [10]. При этом формула верна и для случая $\rho_F = \infty$.

Необходимость. Пусть $\alpha > 0$, т.е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} > 0.$$

Это означает, что для некоторой последовательности $\{n_m\}$ натуральных чисел n_m, $n_m \uparrow \infty$,

$$\frac{\ln\ln n_m}{\ln\lambda_{n_m}} \ge \beta > 0. \qquad (7)$$

Далее, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

то найдется постоянная $C > 0$, такая что

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} \le C \ (n \ge 1).$$

Значит, $\ln n \le C\lambda_n$, и $\ln\ln n \le \ln C + \ln\lambda_n$ $(n \ge 2)$. Отсюда следует, что всегда $\alpha \le 1$. Так что в (7) можно считать, что $\beta \le 1$.

Рассмотрим ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \ (s = \sigma + it), \qquad (8)$$

где $a_n = e$. Как и ранее, предполагаем, что выполнено условие $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Ряд (8) сходится, в силу последнего условия и абсолютно, в правой полуплоскости Π_0 [5]. Вычисляя порядок по формуле (5), имеем $\rho_F = 0$. Убедимся, что на самом деле порядок $\rho_F > 0$. Это будет означать также, что сумма ряда (8) не ограничена в Π_0, т. е. $F \in D_0(\Lambda)$.

Действительно, так как $a_n > 0$, то

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \ \ge |F(\sigma)|$$

$$= e\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n\sigma} \ (\sigma > 0).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$M_F(\sigma) \le e\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n\sigma}.$$

Следовательно, $M_F(\sigma) = |F(\sigma)|$. Пользуясь оценкой $M_F(\sigma) \ge |F(\sigma)|$ (нам понадобится только это соотношение), для любого натурального N имеем:

$$M_F(\sigma) \geq e \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N} e^{-\lambda_n \sigma} \geq e\frac{N}{2} e^{-\lambda_N \sigma} \geq N e^{-\lambda_N \sigma},$$

где $[a]$ – целая часть a. Учитывая (7), теперь положим $N = n_m$ $(m = 1,2, \dots)$. Тогда получим

$$M_F(\sigma) \geq n_m e^{-\lambda_{n_m}\sigma} = \exp\left[\ln n_m - \lambda_{n_m}\sigma\right] \ (\sigma > 0).$$

Далее, из соотношения (7) видно, что

$$\lambda_{n_m} \leq (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} \ (m \geq 1).$$

Следовательно, из предыдущего имеем

$$M_F(\sigma) \geq \exp\left[\ln n_m - (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}\sigma\right] \ (m \geq 1), \quad (9)$$

где $0 < \beta \leq 1, \sigma > 0$ – любое.

Если $\beta = 1$, положим $\sigma = \sigma_m$, где $\sigma_m = \ln^{-1} n_m$ $(m \geq 1)$. Тогда $\sigma_m \downarrow 0$ при $m \to \infty$ и $\ln M_F(\sigma_m) \geq \frac{1}{\sigma_m}(1 - \sigma_m)$. Отсюда

$$\frac{\ln\ln M(\sigma_m)}{-\ln \sigma_m} \geq 1 - \sigma_m.$$

Это означает, что $\rho_F \geq 1$.

Если $\beta < 1$, то в качестве σ возьмем решение σ_m уравнения

$$(\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\beta} \ (0 < \beta < 1). \quad (10)$$

Тогда, учитывая (*10*), из (*9*) получаем

$$\ln M_F(\sigma_m) \geq (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}\left[(\ln n_m)^{1-\frac{1}{\beta}} - \sigma_m\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\beta}\left[(\ln n_m)^{\frac{\beta-1}{\beta}} - (\ln n_m)^{-\frac{1}{\beta^2}}\right] \times$$
$$\times \ (m \geq 1). \quad (11)$$

Но

$$(\mathrm{Ln}\, n_m)^{\frac{\beta-1}{\beta}} - (\ln n_m)^{-\frac{1}{\beta^2}} =$$
$$= (\ln n_m)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\left[1 - (\ln n_m)^{\frac{\beta(1-\beta)-1}{\beta^2}}\right]. \quad (12)$$

Так как $0 < \beta < 1$, то $(\ln n_m)^{\frac{\beta(1-\beta)-1}{\beta^2}} = o(1)$ при $m \to \infty$, а

$$(\ln n_m)^{\frac{\beta-1}{\beta}} = \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\beta(\beta-1)}. \quad (13)$$

Следовательно, из (11–13) получаем, что при $m \to \infty$

$$\ln M(\sigma_m) \geq \left(1 + o(1)\right)\left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\beta+\beta(\beta-1)}$$
$$= \left(1 + o(1)\right)\left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\beta^2}.$$

Отсюда, учитывая асимптотическое соотношение $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, окончательно получаем, что

$$\ln\ln M_F(\sigma_m) \geq o(1) + \beta^2 \ln\frac{1}{\sigma_m}, \ m \to \infty.$$

Так как $\sigma_m \downarrow 0$ при $m \to \infty$, то

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\ln\sigma} \geq \beta^2 \ (0 < \beta < 1).$$

Поскольку, очевидно, $F \in D_0(\Lambda)$, необходимость теоремы полностью доказана.

Замечание. *Пусть* $D(0,1)$ *– круг сходимости степенного ряда (1). Для ряда Тейлора–Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

обычный порядок ρ_F *совпадает с порядком* ρ *функции f вида (1). Так как в данном случае* $\lambda_n = n$, *то*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} = 0,$$

и поэтому из теоремы как следствие вытекает упомянутая в самом начале формула Говорова–Маклейна–Шереметы для вычисления порядка ρ *функции f, заданной в круге* $D(0,1)$ *рядом (1).*

Отметим, что обобщением целых функций (1) конечного порядка являются ряды Дирихле (4), абсолютно сходящиеся во всей плоскости и имеющие конечный R-порядок. Поведение целых функций F вида (4) конечного порядка по Ритту исследовалось в статье [13].

В заключение автор благодарит лектора по спецкурсам «Целые функции» и «Ряды Дирихле» профессора А. М. Гайсина за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Говоров Н. В. О связи между ростом функции, аналитической в круге и коэффициентами ее степенного разложения // Труды Новочеркасск. политехн. ин-та. 1959. Т. 100. С. 101–115.
2. Мак-Лейн Г. Асимптотические значения голоморфных функций. М.: Мир, 1966. – 104 с.
3. Шеремета М. Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Изв. вузов. Математика. 1968. №6. С. 115–121.
4. Гайсин А. М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Матем. сб. 1982. Т. 117. №3. С. 412–424.
5. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
6. Дагене Е. Я. О центральном показателе ряда Дирихле // Литовск. матем. сб. 1968. Т. 8. №3. С. 504–521.
7. Бойчук В. С. О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле // Матем. сб., К.: Наукова думка, 1976. С. 238–240.
8. Галь Ю. М., Шеремета М. Н. О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле // Докл. Акад. наук Укр. ССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1978. №12. С. 1065–1067.
9. Yu Chia-Yung. Sur la croissance et la répartilion des valeurs des series de Dirichlet quine convergent que dans un demi-plan // C. R. Sci. 1979. V. 288. №19. A891–A893.
10. Гайсин А. М. О росте функции, представленной рядом Дирихле, вблизи прямой сходимости // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1981. С. 5–13.
11. Krishna Nandan. On the maximum terms and maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series // Ann. Polon. Math. 1973. V. 28. P. 213–222.
12. Krishna Nandan. On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1976. V. 21. №10. P. 1361–1368.
13. Латыпов И. Д. Оценка ряда экспонент заданного роста на кривых // Вестник Башкирского университета. 2004. №3. С. 80–85.

Поступила в редакцию 16.05.2016 г.

ON A GENERALIZATION OF GOVOROV–MACLANE–SHEREMETA FORMULA FOR CALCULATING AN ORDER

© G. A. Gaisina

Bashkir State University
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 65.
Email: gaisinaga@mail.ru

Let $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, $\ln n = o(\lambda_n)$ as $n \to \infty$, and let convergence domain of a Dirichlet series

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

be a half-plane $\Pi_0 = \{s = \sigma + it\colon \sigma > 0\}$. Let $D_0(\Lambda)$ denote class of all unbounded on Π_0 functions F of type (*1*). Let $M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$ $(\sigma > 0)$. A value

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma \downarrow 0}} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{-\ln \sigma}$$

is called an order of the sum of the Dirichlet series (*1*). The formula

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}$$

is given without a proof in works [1] – [4]. Moreover, authors of these papers formulated this result under additional conditions on λ_n and (or) a_n. We give a criterion for the formula (*2*) to hold.

Theorem. The order ρ_F of any function $F \in D_0(\Lambda)$ to be calculated by formula (*2*) if and only if

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0.$$

Being known as the Govorov – MacLane – Sheremeta formula for the order of function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, which is analytic in the unit disk, follows from (*2*).

Keywords: *entire function, maximum modulus, Dirichlet series, formula for an order, R-order, half-plane of convergence.*

REFERENCES

1. Govorov N. V. Trudy Novocherkassk. politekhn. in-ta. 1959. Vol. 100. Pp. 101–115.
2. Mak-Lein G. Asimptoticheskie znacheniya golomorfnykh funktsii [The asymptotic values of holomorphic functions]. Moscow: Mir, 1966.
3. Sheremeta M. N. Izv. vuzov. Matematika. 1968. No. 6. Pp. 115–121.
4. Gaisin A. M. Matem. sb. 1982. Vol. 117. No. 3. Pp. 412–424.
5. Leont'ev A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent [Entire functions. Exponent series]. Moscow: Nauka, 1983.
6. Dagene E. Ya. Litovsk. matem. sb. 1968. Vol. 8. No. 3. Pp. 504–521.
7. Boichuk V. S. Matem. sb., K.: Naukova dumka, 1976. Pp. 238–240.
8. Gal' Yu. M., Sheremeta M. N. Dokl. Akad. nauk Ukr. SSR. Ser. A. Fiz.-mat. i tekhn. nauki. 1978. No. 12. Pp. 1065–1067.
9. Yu Chia-Jung. Sur la croissance et la répartilion des valeurs des series de Dirichlet quine convergent que dans un demi-plan. C. R. Sci. 1979. Vol. 288. No. 19. A891–A893.
10. Gaisin A. M. Issledovaniya po teorii approksimatsii funktsii. Ufa: Bashkirskii filial AN SSSR, 1981. Pp. 5–13.
11. Krishna Nandan. On the maximum terms and maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series. Ann. Polon. Math. 1973. Vol. 28. Pp. 213–222.
12. Krishna Nandan. On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1976. Vol. 21. No. 10. Pp. 1361–1368.
13. Latypov I. D. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2004. No. 3. Pp. 80–85.

Received 16.05.2016.