

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах, содержащих функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ множества H_{2k+1} . Предполагается, что базисные элементы независимо друг от друга с вероятностью ϵ ($\epsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на входах элементов. В работе показано: 1) в произвольном конечном полном базисе B , содержащем функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ множества H_{2k+1} , все булевы функции можно реализовать схемами с ненадежностью не более $a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m – наибольшее число входов элементов

в полном конечном базисе B ; 2) в базисе $\tilde{B}$, содержащем все функции, зависящие не более чем от двух переменных, и функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, функции $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ можно реализовать абсолютно надежно, а все остальные функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\epsilon \rightarrow 0$) равной $a\epsilon^{k+1}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Ключевые слова: булевы функции, синтез, асимптотически оптимальные по надежности схемы.

Abstract. The realization of Boolean functions with circuits of unreliable functional elements in bases, contained the function $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ from set H_{2k+1} is considered. The basis elements are supposed to be prone to inverse faults on element inputs independently from each other with the probability ($\epsilon \in (0; 1/2)$). In this work there are demonstrated: 1) in arbitrary finite full basis B , contained function $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ of set H_{2k+1} , all Boolean functions are possible to realize with circuits with reliability at most $a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ at $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$, where $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m is the greatest

number of element inputs in finite full basis B ; 2) in basis $\tilde{B}$, contained all functions, depended at most on two variables, and the function $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, functions are possible to realize with asymptotically optimal on reliability circuits, worked with unreliability, asymptotically equal to $a\epsilon^{k+1}$ (at $\epsilon \rightarrow 0$), where $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Keywords: boolean functions, asymptotically optimal reliable circuits.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ϵ ($\epsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\bar{e}(\tilde{x})$.

Для повышения надежности схем Дж. фон Нейман использовал схему, реализующую функцию голосования $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Позднее М. А. Алехина и С. И. Аксенов ввели в рассмотрение новые классы функций, корректирующих ошибки: $G_1 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee x_1^{\delta_1}x_3^{\delta_3} \vee x_2^{\delta_2}x_3^{\delta_3}\}$, $G_2 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee x_3^{\delta_3}x_4^{\delta_4}\}$, $G_3 = \{(x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2}) \& (x_3^{\delta_3} \vee x_4^{\delta_4})\}$ (где $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$).

С. И. Аксенов показал [2], что при инверсных неисправностях на выходах элементов наличие любой из функций множества $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ в заданном полном базисе B гарантирует реализацию произвольной булевой функции схемой, функционирующей с вероятностью ошибки не больше $\epsilon + c\epsilon^2$, где $\epsilon \leq d$, c, d – некоторые положительные константы.

В работе [3] М. А. Алехина ввела новый класс функций M_k , повышающих надежность схем, и доказала для него теорему 1. Множество M_k – множество всех булевых функций $m(x_1, \dots, x_k)$ ($k \geq 3$), обладающих свойством: найдется такой набор $(b_1, \dots, b_k)$, что на нем и всех соседних с ним наборах функция $m(x_1, \dots, x_k)$ принимает значение 0, а на наборе $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ и всех соседних с ним наборах – значение 1. Наборы $(b_1, \dots, b_k)$ и $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ называются характеристическими наборами функции $m(x_1, \dots, x_k)$.

Теорема 1 [3]. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, ее реализующая с ненадежностью $P(S) \leq p$. Пусть схема S_m реализует функцию $m(x_1, \dots, x_k) \in M_k$ и $P(S_m) \leq p$. Обозначим v^1 и v^0 – вероятности ошибок схемы S_m на характеристических наборах. Тогда функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать такой схемой $\phi(S)$, что $P(\phi(S)) \leq \max\{v^1, v^0\} + + cp^2$, где положительная константа $c \leq kC_k^{[k/2]}$.

Следствие 1. Пусть полный базис B содержит функцию $m(x_1, \dots, x_k) \in M_k$, а функциональные элементы с вероятностью ϵ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, реализующая ее с ненадежностью $P(S) \leq s\epsilon$ (s – положительная константа). Тогда функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать такой схемой A над B , что $P(A) \leq \epsilon + c\epsilon^2$ (положительная константа $c \leq kC_k^{[k/2]}s^2$).

Из рассмотренных выше результатов следует, что существуют такие булевы функции, наличие которых в рассматриваемом базисе при инверсных неисправностях на выходах позволяет реализовать почти все булевы функции асимптотически оптимальными по надежности схемами с ненадежностью ϵ (при $\epsilon \rightarrow 0$).

Пусть функциональные элементы подвержены инверсным неисправностям на входах. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на каждый вход элемента значение a ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ϵ ($0 < \epsilon < 1/2$) может превратиться в значение $\bar{a}$. Очевидно, что при инверсных неисправностях на входах с увеличением t – числа входов каждого элемента базиса B , его ненадежность увеличивается до $t\epsilon$. Возникает вопрос: можно ли при инверсных неисправностях на входах элементов реализовать произвольную бу-

леву функцию схемой с ненадежностью порядка $\varepsilon^{\lceil t/2 \rceil + 1}$ (где $t \geq 3$)? Ответ на него получен в этой статье.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S , реализующей булеву функцию $f(\tilde{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Обозначим $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где S – схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию $f(\tilde{x})$, назовем асимптотически оптимальной (наилучшей) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим множество функций H_{2k+1} , содержащее функции $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$, существенно зависящие от $(2k+1)$ (где $k = 1, 2, \dots$) переменных и обладающие свойствами:

1) найдется такой набор значений переменных $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_{2k+1})$, что на нем и на всех наборах $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_{2k+1})$ таких, что

$$\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{i=1}^{2k+1} |a_i - b_i| \leq k,$$

функция принимает значение 0, т.е. $h(\tilde{b}) = h(\tilde{a}) = 0$;

2) на наборе $\tilde{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{2k+1})$ и на всех наборах $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_{2k+1})$, таких, что

$$\rho(\tilde{c}, \tilde{b}) = \sum_{i=1}^{2k+1} |c_i - \bar{b}_i| \leq k,$$

функция принимает значение 1, т.е. $h(\tilde{b}) = h(\tilde{c}) = 1$.

Наборы $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_{2k+1})$ и $\tilde{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{2k+1})$ назовем характеристическими наборами функции $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$.

Функции множества H_{2k+1} можно представить в виде ДНФ. Для этого фиксируем числа $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2k+1} \in \{0, 1\}$ и получаем соответствующую им функцию:

$$h(x_1, \dots, x_{2k+1}) = \bigvee_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{k+1} \in \{1, 2, \dots, 2k+1\} \\ i_j \neq i_p}} x_{i_1}^{\delta_{i_1}} x_{i_2}^{\delta_{i_2}} \dots x_{i_{k+1}}^{\delta_{i_{k+1}}},$$

где под знаком дизъюнкции стоят все возможные элементарные конъюнкции ранга $(k+1)$ от $(2k+1)$ переменных (их C_{2k+1}^{k+1} штук).

Число функций во множестве H_{2k+1} равно: $|H_{2k+1}| = 2^{2k+1}$.

Пример 1. При $k = 1$ множество рассматриваемых функций H_3 имеет вид: $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \vee x_1^{\delta_1} x_3^{\delta_3} \vee x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3}$, где $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$.

Пример 2. При $k = 2$ и $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 1$ функция множества H_5 может быть задана СДНФ: $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$.

Минимизируя СДНФ, получим: $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_4 x_5$.

В случае $k = 2$ и произвольных $\delta_i \in \{0, 1\}$, рассуждая аналогично, получим: $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3} \vee x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} x_4^{\delta_4} \vee x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} x_5^{\delta_5} \vee x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3} x_4^{\delta_4} \vee x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3} x_5^{\delta_5} \vee x_3^{\delta_3} x_4^{\delta_4} x_5^{\delta_5} \vee x_2^{\delta_2} x_4^{\delta_4} x_5^{\delta_5} \vee x_1^{\delta_1} x_3^{\delta_3} x_4^{\delta_4} \vee x_1^{\delta_1} x_3^{\delta_3} x_5^{\delta_5} \vee x_1^{\delta_1} x_4^{\delta_4} x_5^{\delta_5}$, где $\delta_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Теорема 2. Пусть полный базис B содержит функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, а функциональные элементы с вероятностью ϵ подвержены инверсным неисправностям на входах. Допустим, что произвольную булеву функцию $f(\tilde{x})$ можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq p$. Тогда функцию $f(\tilde{x})$ можно реализовать такой схемой $\phi(S)$ над B , что

$$P(\phi(S)) \leq a\epsilon^{k+1} + (2k+1)ap^2, \quad (1)$$

где $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x})$ – произвольная булева функция, а S – схема, реализующая ее с ненадежностью $P(S) \leq p$ в базисе B , содержащем функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Пусть элемент E_h реализует функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ и $P(E_h) \leq p$. Так как множество функций $H_{2k+1} \subset M_{2k+1}$, то для функций $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ утверждение теоремы 1 справедливо.

Найдем вероятности ошибок на выходе функционального элемента E_h на характеристических наборах: $v^1 = v^2 = C_{2k+1}^{k+1} \epsilon^{k+1} (1-\epsilon)^k + C_{2k+1}^{k+2} \epsilon^{k+2} (1-\epsilon)^{k-1} + \dots + C_{2k+1}^{2k} \epsilon^{2k} (1-\epsilon) + C_{2k+1}^{2k+1} \epsilon^{2k+1} \leq C_{2k+1}^{k+1} \epsilon^{k+1}$.

Используя теорему 1, по схеме S построим такую схему $\phi(S)$, ненадежность которой: $P(\phi(S)) \leq a\epsilon^{k+1} + cp^2$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$, $c \leq (2k+1)a$.

Схема $\phi(S)$ является искомой схемой $\phi(S)$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. При $k = 1$ неравенство (1) принимает вид

$$P(\phi(S)) \leq 3\epsilon^2 + 9p^2. \quad (2)$$

Следствие 2. При $k = 2$ неравенство (1) принимает вид

$$P(\phi(S)) \leq 10\epsilon^3 + 50p^2. \quad (3)$$

Следствие 3. При $k = 3$ неравенство (1) принимает вид

$$P(\phi(S)) \leq 35\epsilon^4 + 245p^2. \quad (4)$$

Следствие 4. При $k = 4$ неравенство (1) принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leq 126\epsilon^5 + 1134p^2. \quad (5)$$

Пусть B^1 – произвольный конечный полный базис, содержащий хотя бы одну из функций множества H_3 , а m – наибольшее число входов элементов базиса B^1 ($m \geq 3$). Тогда в базисе B^1 справедлива теорема 3.

Теорема 3. При $\epsilon \leq 1/(432m^2)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в полном конечном базисе B^1 можно реализовать такой схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 3\epsilon^2 + \epsilon^3$.

Для доказательства теоремы 3 используем леммы 1 и 2.

Лемма 1 [2]. Если B – конечный полный базис, тогда функцию штрих Шеффера $x|y$ можно реализовать над B схемой, в которой не более шести функциональных элементов.

Лемма 2 [4]. Если схема S^* в произвольном базисе B реализует функцию штрих Шеффера $x|y$ с ненадежностью $P(S^*) \leq \mu$, то при $\mu \leq 1/50$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B можно реализовать схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 4\mu$.

Доказательство теоремы 3. В базисе B^1 , содержащем хотя бы одну из функций множества H_3 , можно построить схему S^* , реализующую функцию штрих Шеффера $x|y$ и состоящую из не более шести функциональных элементов (лемма 1), т.е. $P(S^*) \leq 6m\epsilon$, тогда $\mu \leq 6m\epsilon$, где m – наибольшее число входов элементов базиса B^1 ($m \geq 3$).

Следовательно, используя лемму 2, получим: при $\epsilon \leq 1/(300m)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B^1 можно реализовать схемой $\tilde{S}$, ненадежность которой $P(\tilde{S}) \leq 24m\epsilon$.

Используя следствие 1 из теоремы 2, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leq 3\epsilon^2 + 9(24m\epsilon)^2 \leq 13\epsilon$ при $\epsilon \leq \min\{1/(300m); 1/(24 \cdot 9 \cdot 2m^2)\} = 1/(432m^2)$ (по формуле (2)). Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 3\epsilon^2 + 9(13\epsilon)^2 = 1524\epsilon^2 \leq \epsilon$ при $\epsilon \leq 1/(432m^2)$. На четвертом шаге итерации построим схему $\varphi^3(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 3\epsilon^2 + 9(\epsilon)^2 = 12\epsilon^2$ при $\epsilon \leq 1/(432m^2)$. По схеме $\varphi^3(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^4(\tilde{S})$, реализующую $f(\tilde{x})$ с ненадежностью $P(\varphi^4(\tilde{S})) \leq 3\epsilon^2 + 9(12\epsilon^2)^2 = 3\epsilon^2 + 1296\epsilon^4 \leq 3\epsilon^2 + \epsilon^3$ при $\epsilon \leq 1/(432m^2)$. Схема $\varphi^4(\tilde{S})$ искомая, т.е. $S = \varphi^4(\tilde{S})$.

Теорема 3 доказана.

В базисе B^2 – произвольном конечном полном базисе, содержащем хотя бы одну из функций множества H_5 , можно аналогично доказать теорему 4.

Пусть m – наибольшее число входов элементов базиса B^2 ($m \geq 3$).

Теорема 4. При $\epsilon \leq 1/(2400m^2)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в полном конечном базисе B^2 можно реализовать такой схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 10\epsilon^3 + \epsilon^4$.

Доказательство. В базисе B^2 , содержащем хотя бы одну из функций множества H_5 , можно построить схему S^* , реализующую функцию штрих Шеффера $x|y$ и состоящую из не более шести функциональных элементов (лемма 1), т.е. $P(S^*) \leq 6m\epsilon$, тогда $\mu \leq 6m\epsilon$, где m – наибольшее число входов элементов базиса B^2 ($m \geq 3$).

Следовательно, используя лемму 2, получим: при $\epsilon \leq 1/(300m)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B^2 можно реализовать схемой $\tilde{S}$, ненадежность которой $P(\tilde{S}) \leq 24m\epsilon$.

Используя следствие 2 из теоремы 2, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leq 10\epsilon^3 + 50(24m\epsilon)^2 \leq 13\epsilon$ при $\epsilon \leq \min\{1/(300m); 1/(24 \cdot 50 \cdot 2m^2)\} = 1/(2400m^2)$ (по формуле (3)). Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 10\epsilon^3 + 50(13\epsilon)^2 = 8451\epsilon^2 \leq \epsilon$ при $\epsilon \leq 1/(2400m^2)$. На четвертом шаге итерации построим схему $\varphi^3(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 10\epsilon^3 + 50(\epsilon)^2 = 51\epsilon^2$ при $\epsilon \leq 1/(2400m^2)$. По схеме $\varphi^3(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^4(\tilde{S})$, реализующую $f(\tilde{x})$ с ненадежностью $P(\varphi^4(\tilde{S})) \leq 10\epsilon^3 + 50(51\epsilon^2)^2 \leq 17\epsilon^3$ при $\epsilon \leq 1/(2400m^2)$. Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi^4(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^5(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^5(\tilde{S})) \leq 10\epsilon^3 + 50(17\epsilon^3)^2 \leq 10\epsilon^3 + \epsilon^4$ при $\epsilon \leq 1/(2400m^2)$. Схема $\varphi^5(\tilde{S})$ искомая, т.е. $S = \varphi^5(\tilde{S})$.

Теорема 4 доказана.

В базисе B^3 – произвольном конечном полном базисе, содержащем хотя бы одну из функций множества H_7 , можно доказать теорему 5.

Пусть m – наибольшее число входов элементов базиса B^3 ($m \geq 3$).

Теорема 5. При $\epsilon \leq 1/(11760m^2)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в полном конечном базисе B^3 можно реализовать такой схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 35\epsilon^4 + \epsilon^5$.

Доказательство. В базисе B^3 , содержащем хотя бы одну из функций множества H_7 , можно построить схему S^* , реализующую функцию штрих Шеффера $x|y$ и состоящую из не более шести функциональных элементов (лемма 1), т.е. $P(S^*) \leq 6m\epsilon$, тогда $\mu \leq 6m\epsilon$, где m – наибольшее число входов элементов базиса B^3 ($m \geq 3$).

Следовательно, используя лемму 2, получим: при $\epsilon \leq 1/(300m)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B^3 можно реализовать схемой $\tilde{S}$, ненадежность которой $P(\tilde{S}) \leq 24m\epsilon$.

Используя следствие 3 из теоремы 2, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leq 35\epsilon^4 + 245(24m\epsilon)^2 \leq 13\epsilon$ при $\epsilon \leq \min\{1/(300m); 1/(24 \cdot 245 \cdot 2m^2)\} = 1/(11760m^2)$ (по формуле (4)). Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 35\epsilon^4 + 245(13\epsilon)^2 \leq \epsilon$ при $\epsilon \leq 1/(11760m^2)$. На четвертом шаге итерации построим схему $\varphi^3(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 35\epsilon^4 + 245(\epsilon)^2 \leq 246\epsilon^2$ при $\epsilon \leq 1/(11760m^2)$. По схеме $\varphi^3(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^4(\tilde{S})$, реализующую $f(\tilde{x})$ с ненадежностью $P(\varphi^4(\tilde{S})) \leq 35\epsilon^4 + 245(246\epsilon^2)^2 = 60305\epsilon^4 \leq \epsilon^3$ при $\epsilon \leq 1/(11760m^2)$. Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi^4(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^5(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^5(\tilde{S})) \leq 35\epsilon^4 + 245(\epsilon^3)^2 \leq 35\epsilon^4 + \epsilon^5$ при $\epsilon \leq 1/(11760m^2)$. Схема $\varphi^5(\tilde{S})$ искомая, т.е. $S = \varphi^5(\tilde{S})$.

Теорема 5 доказана.

В базисе B^4 – произвольном конечном полном базисе, содержащем хотя бы одну из функций множества H_9 , можно доказать теорему 6.

Пусть m – наибольшее число входов элементов базиса B^4 ($m \geq 3$).

Теорема 6. При $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в полном конечном базисе B^4 можно реализовать такой схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 126\varepsilon^5 + \varepsilon^6$.

Доказательство. В базисе B^4 , содержащем хотя бы одну из функций множества H_9 , можно построить схему S^* , реализующую функцию штрих Шеффера $x|y$ и состоящую из не более шести функциональных элементов (лемма 1), т.е. $P(S^*) \leq 6m\varepsilon$, тогда $\mu \leq 6m\varepsilon$, где m – наибольшее число входов элементов базиса B^3 ($m \geq 3$).

Следовательно, используя лемму 2, получим: при $\varepsilon \leq 1/(300m)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B^4 можно реализовать схемой $\tilde{S}$, ненадежность которой $P(\tilde{S}) \leq 24m\varepsilon$.

Используя следствие 4 из теоремы 2, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134(24m\varepsilon)^2 \leq 13\varepsilon$ при $\varepsilon \leq \min\{1/(300m); 1/(24 \cdot 1134 \cdot 2m^2)\} = 1/(54432m^2)$ (по формуле (5)). Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134(13\varepsilon)^2 \leq \varepsilon$ при $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$. На четвертом шаге итерации построим схему $\varphi^3(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134\varepsilon^2 \leq 1135\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$. По схеме $\varphi^3(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^4(\tilde{S})$, реализующую $f(\tilde{x})$ с ненадежностью $P(\varphi^4(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134(1135\varepsilon^2)^2 \leq 2983\varepsilon^3$ при $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$. Применяя теорему 2 еще раз, по схеме $\varphi^4(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^5(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi^5(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134(2983\varepsilon^3)^2 \leq 20724\varepsilon^5 \leq \varepsilon^4$ при $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$. На следующем шаге итерации построим схему $\varphi^6(\tilde{S})$, ненадежность которой $P(\varphi^6(\tilde{S})) \leq 126\varepsilon^5 + 1134\varepsilon^4 \leq 126\varepsilon^5 + \varepsilon^6$ при $\varepsilon \leq 1/(54432m^2)$. Схема $\varphi^6(\tilde{S})$ искомая, т.е. $S = \varphi^6(\tilde{S})$.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть m – наибольшее число входов элементов в полном конечном базисе B , содержащем хотя бы одну функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ множества H_{2k+1} ($m \geq 3$), тогда любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе B при

$\varepsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$ можно реализовать схемой S , ненадежность которой

$$P(S) \leq a\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^{k+2}, \text{ где } a = C_{2k+1}^{k+1}, k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Проведем индукцией по числу k .

При $k = 1$ утверждение верно (см. теорему 3).

При $k = 2$ утверждение верно (см. теорему 4).

При $k = 3$ утверждение верно (см. теорему 5).

При $k = 4$ утверждение верно (см. теорему 6).

Допустим, что при $k \geq 5$ утверждение теоремы 7 верно, т.е. в базисе $\tilde{B}$, содержащем функцию $h(x_1, \dots, x_{2k-1})$, найдется такая схема $\tilde{S}$, реализующая функцию $f(\tilde{x})$, ненадежность которой: $P(\tilde{S}) \leq a\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} \leq (a+1)\varepsilon^k$

при $\varepsilon \leq \frac{1}{48m^2(2k-1)C_{2k-1}^k}$.

Докажем справедливость теоремы для $(k+1)$, т.е. в базисе B , содержащем функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$. Так как базис B содержит функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$, то можно считать, что он содержит и функцию $h(x_1, \dots, x_{2k-1})$, т.к. функцию $h(x_1, \dots, x_{2k-1})$ можно получить из $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ отождествлением переменных (например, x_{2k+1} с x_{2k-1} , x_{2k} с x_{2k-2}). Поэтому в базисе B можно построить схему $\tilde{S}$, реализующую функцию $f(\tilde{x})$, с ненадежностью $P(\tilde{S}) \leq a\epsilon^k + \epsilon^{k+1} \leq (a+1)\epsilon^k$ при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$ (из предыдущего

пункта доказательства). Тогда, используя теорему 2, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, для которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leq a\epsilon^{k+1} + (2k+1)a(a+1)^2\epsilon^{2k} \leq a\epsilon^{k+1} + \frac{1}{48^3} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{m^6(2k+1)^2} \epsilon^{2k-3} \leq a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{2k-3} \leq a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$. Схема $\varphi(\tilde{S})$ является искомой схемой S , т.е. $S = \varphi(\tilde{S})$.

Таким образом, при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$ в базисе B можно построить схему S , реализующую произвольную булеву функцию $f(\tilde{x})$, для которой $P(S) \leq a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$, т.е. теорема 7 верна.

Теорема 7 доказана.

Таким образом, показано, что при инверсных неисправностях на входах элементов наличие хотя бы одной функции $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$ в полном конечном базисе B позволяет реализовать все булевы функции схемами с ненадежностью не более $a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m –

наибольшее число входов элементов в полном конечном базисе B .

Пусть B' – это множество всех булевых функций, зависящих не более чем от двух переменных. Тогда множество попарно неконгруэнтных булевых функций, зависящих (возможно, фиктивно) от двух переменных x_1, x_2 , есть $M(x_1, x_2) = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \uparrow x_2, x_1 \rightarrow x_2, x_1 \nrightarrow x_2, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2, \bar{x}_1, 0, 1\}$. При перечислении функций использованы следующие обозначения: $x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, $x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$, $x_1 \sim x_2 = x_1 \& x_2 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$, $x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \nrightarrow x_2 = x_1 \& \bar{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 = x_1 \& \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \& x_2$.

Пусть базис $\tilde{B} = M(x_1, x_2) \cup \{h(x_1, \dots, x_{2k+1})\}$, где $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$.

Тогда в базисе $\tilde{B}$ справедливы теоремы 8 и 9.

Теорема 8. Пусть в базисе $\tilde{B}$ $\epsilon \leq \frac{1}{48a(2k+1)^3}$ (где $a = C_{2k+1}^{k+1}$), а $f(\tilde{x})$ –

произвольная функция. Тогда функцию f в базисе $\tilde{B}$ можно реализовать схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$.

Доказательство. В базисе $\tilde{B}$, содержащем функции, зависящие не более чем от двух переменных, и функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, наибольшее

число входов $m = 2k + 1$ имеет функциональный элемент, реализующий функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$. Справедливость теоремы 8 непосредственно следует из теоремы 7, т.к. базис $\tilde{B}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.

Теорема 8 доказана.

Пусть $\hat{K}(n)$ – множество, содержащее функции x_i ($i = \overline{1, n}$) и константы 0, 1, которые в базисе $\tilde{B}$ можно реализовать абсолютно надежно, т.к. элементы, реализующие константы 0 и 1 при инверсных неисправностях на входах считаем абсолютно надежными. Очевидно, число функций во множестве $\hat{K}(n)$ равно $(n + 2)$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Теорема 9. Пусть $\varepsilon \leq \frac{1}{2(2k+1)}$, $f(\tilde{x})$ – булева функция, $f \notin \hat{K}(n)$, S –

любая схема в базисе $\tilde{B}$, реализующая $f(\tilde{x})$. Тогда $P(S) \geq a\varepsilon^{k+1} - ak\varepsilon^{k+2}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Для доказательства теоремы 9 воспользуемся леммой 3.

Лемма 3 [5]. Пусть $f(\tilde{x})$ – произвольная булева функция, отличная от константы, S – любая схема ее реализующая. Пусть подсхема B схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию $f'(\tilde{x})$ с ненадежностью $P(B) \leq 1/2$. Обозначим p^1 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 0$. Аналогично, p^0 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 1$.

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям:

$$P_1(S, \tilde{a}) \geq p^1, \text{ если } f(\tilde{a}) = 0;$$

$$P_0(S, \tilde{a}) \geq p^0, \text{ если } f(\tilde{a}) = 1.$$

Замечание 1 [5]. Из леммы 3 следует, что $P(S) \geq \max\{p^0, p^1\}$.

Доказательство теоремы 9. Пусть $f(\tilde{x})$ – булева функция, удовлетворяющая условиям теоремы, а S – произвольная схема, ее реализующая в базисе $\tilde{B}$. Поскольку $f \notin \hat{K}(n)$, схема S содержит хотя бы один ненадежный элемент. Обозначим E_1 – ненадежный элемент, содержащий выход схемы S . Возможны случаи:

1. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \& x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_1(00) = \varepsilon^2$, $P_0(11) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(01) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(10) = \varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^0 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^1 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

2. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \vee x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_1(00) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(11) = \varepsilon^2$, $P_0(01) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(10) = \varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

3. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \rightarrow x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_0(00) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(11) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(01) = \varepsilon^2$, $P_1(10) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

4. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \nrightarrow x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_1(00) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(11) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(01) = \varepsilon^2$, $P_0(10) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^0 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^1 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

5. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \sim x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_0(00) = P_0(11) = P_1(01) = P_1(10) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

6. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \oplus x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_1(00) = P_1(11) = P_0(01) = P_0(10) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

7. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 | x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_0(00) = \varepsilon^2$, $P_1(11) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, $P_0(01) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(10) = \varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = \varepsilon - \varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq \varepsilon - \varepsilon^2$.

8. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \downarrow x_2$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих входных наборов равны: $P_0(00) = \varepsilon^2$, $P_1(11) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, $P_1(01) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_1(10) = \varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = \varepsilon - \varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq \varepsilon - \varepsilon^2$.

9. Элемент E_1 реализует функцию $\bar{x}_1$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы соответствующих значений равны: $P_1(0) = P_0(1) = \varepsilon$. При $\varepsilon \leq 1/4$ применима лемма 3. Так как $p^1 = p^0 = \varepsilon$, то (см. замечание 1) $P(S) \geq \varepsilon$.

10. Элемент E_1 реализует функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$. Вероятности ошибок на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы характеристических наборов равны: $p^1 = p^0 = C_{2k+1}^{k+1} \varepsilon^{k+1} (1-\varepsilon)^k + C_{2k+1}^{k+2} \varepsilon^{k+2} (1-\varepsilon)^{k-1} + \dots + C_{2k+1}^{2k} \varepsilon^{2k} (1-\varepsilon) + C_{2k+1}^{2k+1} \varepsilon^{2k+1} \geq C_{2k+1}^{k+1} \varepsilon^{k+1} (1-\varepsilon)^k$ при $\varepsilon \leq \frac{1}{2(2k+1)}$.

Учтем, что:

$$(1-\varepsilon)^k = C_k^0 \varepsilon^0 - C_k^1 \varepsilon^1 + C_k^2 \varepsilon^2 - C_k^3 \varepsilon^3 + \dots + C_k^t \varepsilon^t - C_k^{t+1} \varepsilon^{t+1} + \dots + (-1)^k C_k^k \varepsilon^k.$$

$$\begin{aligned} \text{Воспользуемся условием: } C_k^t \varepsilon^t - C_k^{t+1} \varepsilon^{t+1} &= C_k^t \varepsilon^t \left(1 - \frac{C_k^{t+1} \varepsilon^{t+1}}{C_k^t \varepsilon^t} \right) = \\ &= C_k^t \varepsilon^t \left(1 - \frac{k!}{(t+1)!(k-t-1)!} \cdot \frac{t!(k-t)!}{k!} \cdot \frac{\varepsilon^t \cdot \varepsilon}{\varepsilon^t} \right) = C_k^t \varepsilon^t \left(1 - \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Так как $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2(2k+1)}$, то $0 < \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon \leq \frac{k-t}{t+1} \cdot \frac{1}{2(2k+1)}$, поэтому

$$0 < \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{t+1} \cdot \frac{k-t}{2(2k+1)} < \frac{1}{t+1} \cdot \frac{k}{2(2k+1)} < \frac{1}{t+1} \cdot \frac{k}{4k+2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Если $0 < \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon < \frac{1}{8}$, то $0 < 1 - \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon < 1$, поэтому:

$$C_k^t \varepsilon^t - C_k^{t+1} \varepsilon^{t+1} = C_k^t \varepsilon^t \left(1 - \frac{k-t}{t+1} \cdot \varepsilon \right) > 0.$$

Значит: $(1-\varepsilon)^k = C_k^0 \varepsilon^0 - C_k^1 \varepsilon^1 + C_k^2 \varepsilon^2 - C_k^3 \varepsilon^3 + \dots + C_k^t \varepsilon^t - C_k^{t+1} \varepsilon^{t+1} + \dots + (-1)^k C_k^k \varepsilon^k \geq C_k^0 \varepsilon^0 - C_k^1 \varepsilon^1 = 1 - k\varepsilon$.

Таким образом, $p^1 = p^0 = C_{2k+1}^{k+1} \varepsilon^{k+1} (1-\varepsilon)^k + C_{2k+1}^{k+2} \varepsilon^{k+2} (1-\varepsilon)^{k-1} + \dots + C_{2k+1}^{2k} \varepsilon^{2k} (1-\varepsilon) + C_{2k+1}^{2k+1} \varepsilon^{2k+1} \geq C_{2k+1}^{k+1} \varepsilon^{k+1} (1-\varepsilon)^k \geq C_{2k+1}^{k+1} \varepsilon^{k+1} (1 - k\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq \frac{1}{2(2k+1)}$.

При $\varepsilon \leq \frac{1}{2(2k+1)}$ применима лемма 3 (см. замечание 1), поэтому

$$P(S) \geq a \varepsilon^{k+1} (1 - k\varepsilon) = a \varepsilon^{k+1} - a k \varepsilon^{k+2}, \text{ где } a = C_{2k+1}^{k+1}.$$

Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 следует, что схемы, построенные при доказательстве теоремы 8, являются асимптотически оптимальными по надежности для почти всех функций (кроме x_i ($i = \overline{1, n}$) и констант 0, 1) в базисе $\tilde{B}$. Функции x_i ($i = \overline{1, n}$) и константы 0, 1 в базисе $\tilde{B}$ можно реализовать абсолютно надежно.

В работе [6] доказано, что если из базиса $\tilde{B}$ убрать функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, то в полученном базисе M справедливы теоремы 10 и 11.

Теорема 10 [6]. При $\varepsilon \in (0; 1/100]$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе M можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 2\varepsilon + 19\varepsilon^2$.

Теорема 11 [6]. Пусть $\varepsilon \in (0; 1/6]$, $f(\tilde{x})$ – булева функция, отличная от функций x_i , $\bar{x}_i$ ($i = \overline{1, n}$) и констант 0, 1, а S – схема, реализующая $f(\tilde{x})$ в базисе M . Тогда $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

Таким образом, из теорем 10 и 11 следует, что асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе M функционируют с ненадежностью 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сравнивая полученные в этой работе результаты (теоремы 8 и 9) с результатами работы [6] (теоремы 10 и 11), приходим к выводу, что наличие в рассматриваемом базисе функции $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$ позволяет реализовать почти все функции (кроме x_i ($i = \overline{1, n}$) и констант 0, 1) в этом базисе с большей надежностью.

Список литературы

1. **Нейман, фон Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент / Дж. фон Нейман // Автоматы. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – С. 68–139.
2. **Аксенов, С. И.** О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов / С. И. Аксенов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2005. – № 6 (21). – С. 42–55. – (Естественные науки).
3. **Алехина, М. А.** О функциях и схемах, корректирующих ошибки / М. А. Алехина // Синтез и сложность управляющих систем : материалы XVI Международной школы-семинара. – М. : Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2006. – С. 8–12.
4. **Алехина, М. А.** Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисе $\{\&, \vee, _ \}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина, В. В. Чугунова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2006. – Т. 13. – № 4. – С. 3–17. – (Сер. 1).
5. **Алехина, М. А.** Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. – 2002. – Т. 9. – № 3. – С. 3–28. – (Сер. 1).
6. **Чугунова, В. В.** О надежности схем в некоторых приводимых полных базисах / В. В. Чугунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 2. – С. 25–37.

Чугунова Варвара Валерьевна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра дискретной математики,
Пензенский государственный
университет

Chugunova Varvara Valeryevna

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of discrete mathematics,
Penza State University

E-mail: chugunov@sura.ru

УДК 519.718

Чугунова, В. В.

Об одном множестве функций / В. В. Чугунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 2–13.