

ОБ ОБОБЩЕНИИ МНОГООБРАЗИЯ
ЭВЕРИТА*)

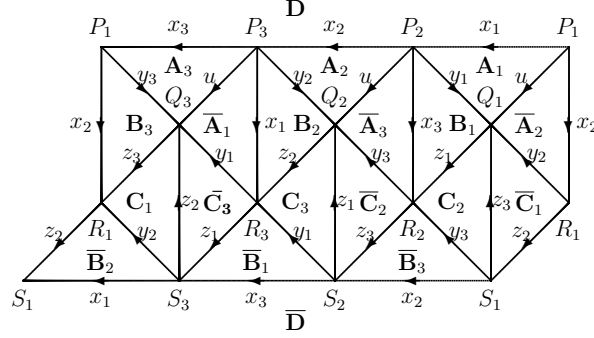
Т. А. Козловская

Работа посвящена построению новых примеров замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий и исследованию их свойств.

Возможность построения трехмерных многообразий из платоновых тел исследовалась многими авторами. Итог этих исследований подведен в [1], где дан полный список сферических: $M_1, \dots, M_8$, евклидовых: $M_9, \dots, M_{14}$, и гиперболических: $M_{15}, \dots, M_{28}$, многообразий, каждое из которых получается попарным отождествлением граней подходящего правильного многогранника из соответствующей геометрии. Например, из правильного гиперболического додекаэдра с двугранными углами $2\pi/5$ можно построить восемь различных многообразий, одно из которых, M_{15} , является многообразием Вебера — Зейферта [2]. Из правильного гиперболического икосаэдра с двугранными углами $2\pi/3$ можно построить шесть различных многообразий. Нас будет интересовать одно из этих многообразий, обладающее симметрией третьего порядка, которое обозначено в [1] через M_{25} . В данной работе по соображениям, естественность которых будет видна ниже, мы будем обозначать это многообразие через $M(3)$ и называть *многообразием Эверита*.

Пусть $P(3)$ — правильный гиперболический $2\pi/3$ -икосаэдр с обозначениями граней и вершин, как на рис. 1 (предполагается, что правая

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-0255) и интеграционного гранта СО РАН и УрО РАН.

Рис. 1. Отождествление граней многогранника $P(3)$.

и левая стороны, обозначенные $P_1 R_1 S_1$, должны быть отождествлены).

Рассмотрим попарное отождествление $\varphi(3)$ граней $P(3)$, которое, очевидно, может быть реализовано изометриями гиперболического пространства:

$$\begin{cases} a_i : A_i \rightarrow \bar{A}_i & [P_i P_{i+1} Q_i \rightarrow P_{i+2} R_{i+2} Q_{i+2}], \\ b_i : B_i \rightarrow \bar{B}_i & [Q_i R_{i+1} P_{i+1} \rightarrow R_{i+2} S_{i+2} S_{i+1}], \\ c_i : C_i \rightarrow \bar{C}_i & [Q_{i-1} R_i S_{i-1} \rightarrow S_i Q_i R_i], \\ d : D \rightarrow \bar{D} & [P_1 P_2 P_3 \rightarrow S_3 S_1 S_2], \end{cases} \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3$ и все индексы берутся по модулю 3. Фактор-пространство $M(3) = P(3)/\varphi(3)$ является псевдомногообразием. Поскольку его эйлерова характеристика равна нулю ($\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 10, \sigma_3 = 1$, где σ_i — число i -мерных клеток в $M(3)$), по теореме Зейферта — Трельфалля, $M(3)$ — замкнутое 3-многообразие. Заметим, что все вершины $P(3)$ лежат в одном классе эквивалентности относительно $\varphi(3)$.

Как отмечено в [3], конструкция $M(3)$ может быть обобщена для произвольного $n \geq 2$, что приведет к бесконечной серии многообразий $M^C(n)$. К сожалению, в работе [3] отсутствует явная конструкция многообразий $M^C(n)$. Авторы пишут только о том, что такие многообразия строятся «аналогично» $M(3)$ и выписывают фундаментальные

группы:

$$\pi_1(M^C(n)) = \langle x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; u \mid x_1 x_2 \dots x_n = 1, \\ x_i y_i = u, y_i z_i = x_{i-1}, z_{i-1} z_i = y_{i-1}, i = 1, \dots, n \rangle. \quad (2)$$

Строя многообразия $M(n)$ по правилу (1) как обобщение $M(3)$, нетрудно видеть, что при нечетном n представление (2) дает $\pi_1(M(n))$, однако при четных n ситуация несколько иная. Рассмотрим симплиционный комплекс $P(2)$, приведенный на рис. 2, где предполагается, что правая и левая стороны должны быть отождествлены.

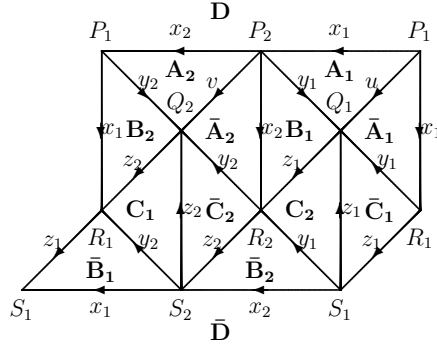


Рис. 2. Отождествление граней многогранника $P(2)$.

Тогда $M(2) = P(2)/\varphi(2)$, где попарное отождествление граней $\varphi(2)$ задается правилами (1). Поскольку эйлерова характеристика псевдомногообразия $M(2)$ равна нулю ($\sigma_0 = 2, \sigma_1 = 8, \sigma_2 = 7, \sigma_3 = 1$), по теореме Зейферта — Трельфалля $M(2)$ — замкнутое 3-многообразие. Отметим, что все вершины $P(2)$ распадаются на два класса эквивалентных относительно $\varphi(2)$. Особенности получения представления фундаментальной группы трехмерного многообразия в случае более чем одной 0-клетки подробно описаны в [4, с. 276–279], чем мы и пользуемся ниже.

Покажем, что многообразие $M(2)$ отлично от $M^C(2)$. Поскольку вся имеющаяся в [3] точная информация о $M^C(2)$ это его фундаментальная группа, сравним ее с фундаментальной группой $\pi_1(M(2))$.

Утверждение 1. Группа $\pi_1(M^C(2))$ является циклической группой порядка 6, а $\pi_1(M(2))$ является циклической группой порядка 3.

Доказательство. Согласно (2) $\pi_1(M^C(2))$ имеет представление

$$\langle u, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \mid x_1 x_2 = 1, \quad x_1 y_1 = u, \quad x_2 y_2 = u, \\ y_1 z_1 = x_2, \quad y_2 z_2 = x_1, \quad z_1 z_2 = y_1, \quad z_2 z_1 = y_2 \rangle.$$

Переходя к порождающим z_1 и z_2 , получим, что она может быть представлена в виде $\langle z_1, z_2 \mid z_2 z_1 z_2 z_1 z_2 = z_1 z_2 z_1 z_2 z_1, z_2 z_1 z_2 z_1 z_2 z_1 = 1 \rangle$, откуда $z_2 = z_1$ и $\pi_1(M^C(2)) \cong \langle z_1 \mid z_1^6 = 1 \rangle$.

По построению $M(2)$, $\pi_1(M(2))$ имеет представление

$$\langle u, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \mid x_1 x_2 = 1, \quad x_1 y_1 = u, \quad x_2 y_2 = 1, \\ y_1 z_1 = x_2, \quad y_2 z_2 = x_1, \quad z_1 z_2 = y_1, \quad z_2 z_1 = y_2 \rangle.$$

Переходя к порождающим z_1 и z_2 , получим что она представляется также в виде $\langle z_1, z_2 \mid z_1 z_2 z_1 z_2 z_1 = 1, z_2 z_1 z_2 z_1 z_2 z_1 = 1 \rangle$, откуда $z_2 = 1$ и $\pi_1(M(2)) \cong \langle z_1 \mid z_1^3 = 1 \rangle$.

Многообразия $M^C(4)$ и $M(4)$ (рис 3) также различны. В самом деле, вычисляя с помощью компьютерной программы GAP [5] абелевы инварианты фундаментальных групп этих многообразий, для первой группы получаем $[3, 3, 3, 4]$, в то время как для второй — $[2, 3, 3, 3]$.

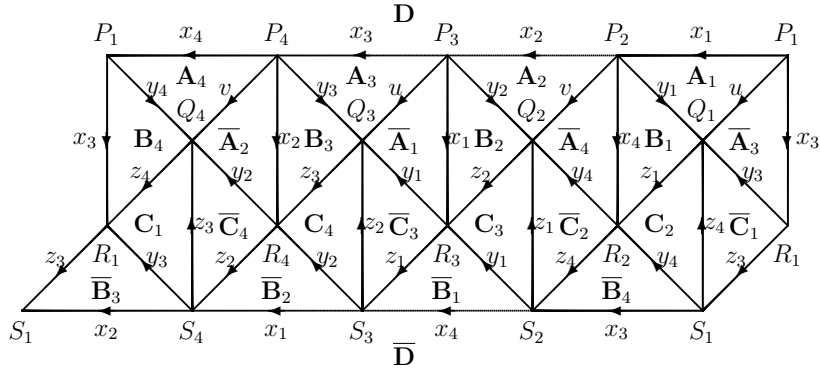


Рис. 3. Отождествление граней многогранника $P(4)$.

Утверждение 2. Если $n = 2k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \pi_1(M(n)) = \langle x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; u \mid & x_1 x_2 \dots x_n = 1, \\ y_i z_i = x_{i-1}, z_{i-1} z_i = y_{i-1}, i = 1, \dots, n, & \\ x_{2j-1} y_{2j-1} = u, x_{2j} y_{2j} = 1, j = 1, \dots, k \rangle. & \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из описания $M(n)$ через отождествления (1).

Теорема 1. Многообразие $M(2)$ является линзовым пространством $L(3, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено выше, все вершины комплекса $P(2)$ разбиваются на два класса эквивалентных относительно $\varphi(2)$. Согласно [4] для получения представления фундаментальной группы $\pi_1(M(2))$ необходимо положить, что путь, соединяющий эти вершины является тривиальным. Положим, что тривиальным является путь, соответствующий ребрам с меткой z_2 . Стыгивание этого пути соответствует стягиванию трех ребер на $P(2)$, что приведет к симплициальному комплексу на рис. 4, фундаментальному для $M(2)$.

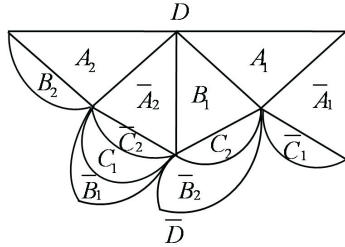


Рис. 4. Стягивание ребер на $P(2)$ с метками z_2 .

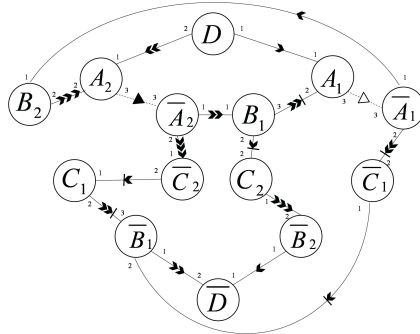


Рис. 5. Диаграмма Хегора многообразия $M(2)$.

Соответствующая этому симплициальному комплексу диаграмма Хегора многообразия $M(2)$ приведена на рис. 5.

С помощью последовательности преобразований Зингера эта диаграмма Хегора приводится к виду указанному на рис. 6, что, как хорошо известно, является диаграммой Хегора линзового пространства $L(3, 1)$.

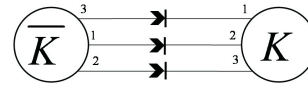


Рис. 6. Диаграмма Хегора линзового пространства $L(3, 1)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Everitt B.* 3-Manifolds from Platonic solids // *Topology Appl.* 2004. V. 138. P. 253–263.
2. *Seifert H., Weber C.* Die beiden Dodekaedräume // *Math. Z.* 1933. Bd 37. S. 237–253.
3. *Cavicchioli A., Spaggiari F., Telloni A. I.* Topology of compact space forms from Platonic solids. II // *Topology Appl.* 2010. V. 157. P. 921–931.
4. *Зейферт Г., Трельфаль В.* Топология. Ижевск, 2001.
5. *GAP — Groups, Algorithms, Programming.* A System for Computational Discrete Algebra. At: <http://www.gap-system.org>.