Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 2. С. 169–180.

УДК 517.583

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СИНУСА

А. В. Красильников

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
press-csu@yandex.ru

Памяти Арлена Михайловича Ильина

Предлагается простой способ нахождения асимптотики эллиптического синуса $z = \operatorname{sn}(u;k)$ по степеням k^2-1. В литературных источниках выписаны только первые два члена разложения. Предлагаемый метод позволяет найти последующие члены разложения. Недостаток метода — большой объём вычислений. Основным результатом работы выступает утверждение, что асимптотическое разложение по степеням k^2-1 не является равномерным по u при $k \to 1$. Получена также оценка остаточного члена разложения.

Ключевые слова: *эллиптический синус, асимптотическое разложение, гиперболические функции.*

Введение

Задача нахождения асимптотики эллиптического интеграла при $k \to 1$ представляет интерес для исследователя по двум причинам. Во-первых, задача является совершенно классической с математической точки зрения, ведь эллиптические функции были введены более 200 лет назад и уже давно успели стать неотъемлемой частью современной математики. Во-вторых, полная асимптотическая формула в виде ряда с указанием его общего члена — до сих пор нерешённая задача. В справочниках по специальным функциям [1; 2] выписаны только два первых члена разложения, а в пакете прикладных вычислений Mathematica выписываются десять первых членов разложения. Тем не менее ни в одном из источников не указан метод их нахождения. Вопрос о построении последующих членов разложения и обосновании асимптотики остаётся открытым.

Решение этой задачи может быть полезно в связи с применениями в физических исследованиях модулированной эллиптической функции — главного члена асимптотики специального универсального решения Гуревича — Питаевского [3] уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, описывающего возникновение так называемых бездиссипативных ударных волн (БУВ). Главный член асимптотики этого универсального решения можно записать в виде $U_0 = A\,\operatorname{dn}^2\left(\frac{B}{Q}\varphi; k\right) + C$, где параметры A, B, Q подлежат определению (см. [4]). Здесь $\operatorname{dn}(u;k)$ — так называемая модулированная эллиптическая функция, или дельта-амплитуда, которая элементарно выражается через эллиптический синус. При этом k медленно меняется и зависит от автомодельной переменной $s = xt^{-3/2}$.

Напомним, что эллиптическим интегралом I рода в форме Якоби [5; 6] называется функция

$$u = u(z;k) = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad 0 < k < 1.$$

Здесь z — действительное число, лежащее на интервале $(-1,1)$, k — параметр, называемый модулем эллиптического интеграла. Эта функция по переменной z аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость. Таким образом, $u(z;k)$ аналитична в верхней полуплоскости $D = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ и на действительной оси (за исключением точек $z = 1, -1, 1/k, -1/k$, в которых $u(z;k)$ является непрерывной).

Полным эллиптическим интегралом I рода называется

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Дополнительным модулем называется параметр $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Известно, что $u(z;k)$ конформно отображает D на внутренность прямоугольника L с вершинами в точках на u-плоскости:

$$L = \{\mathbf{K}(k),\ \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'),\ -\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'),\ -\mathbf{K}(k)\}.$$

Таким образом, в прямоугольнике L определена однозначная функция $z = \operatorname{sn}(u;k)$, значения которой принадлежат полуплоскости D, обратная по отношению к функции $u(z;k)$. Требуется найти её асимптотику при $k \to 1$ и исследовать её на равномерность по $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$.

В заметке предлагается простой метод нахождения асимптотики эллиптического синуса $z = \operatorname{sn}(u;k)$ по степеням $k^2 - 1$. Для первых двух членов разложения остаточный член как функция переменной u на промежутке $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ может принимать сколь угодно большие значения при k близких к 1. Получена также оценка сверху для остаточного члена.

Задача об обосновании асимптотического разложения эллиптического синуса была поставлена автору А. М. Ильиным.

1. Метод нахождения членов асимптотического разложения

Опишем формально суть этого метода. Положим $\tau = k^2$. Разложим функцию $u(z;k)$ по формуле Тейлора по степеням $\tau - 1$:

$$u(z;k) = u(z;1) + (\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z;1)(\tau-1)^3 + \dots,$$

где через ∂_τ^m обозначена производная порядка m по переменной τ. Введём обозначения

$$u^{(0)} = u(z;1) = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}, \quad z = \tanh u^{(0)}.$$

На втором шаге разложим функцию $z = \tanh u^{(0)}$ в ряд Тейлора по степеням $u^{(0)} - u$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + \partial_u \tanh u\,(u^{(0)} - u) +$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_u^2 \tanh u\,(u^{(0)} - u)^2 + \frac{1}{6}\partial_u^3 \tanh u\,(u^{(0)} - u)^3 + \dots$$

Заменим $u^{(0)} - u$ разложением

$$-(u^{(0)} - u) = (\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z;1)(\tau-1)^3 + \dots$$

и соберём коэффициенты при одинаковых степенях $(\tau - 1)$. Получим

$$z = \tanh u + \sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{1}{m!}(\partial_u^m \tanh u)\left((\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z;1)(\tau-1)^2 + \dots\right)^m.$$

Собирая выражения при одинаковых степенях $(\tau - 1)$, получим

$$\begin{aligned} z =& \tanh u - (\partial_u \tanh u)(\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1) + \\ &+ \frac{1}{2}\big[-(\partial_u \tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z;1) + (\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z;1)\big](\tau-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

Переменную z в выражении справа заменим на $\tanh u^{(0)}$ и разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по степеням $u^{(0)} - u$. Это позволит выделить второй и следующие члены разложения в ряд Тейлора функции $z = \operatorname{sn}(u;k)$ по степеням $\tau - 1$. Таким образом, был выделен второй член разложения

$$-\frac{1}{4}\left(\tanh^2 u - \frac{u}{\cosh^2 u}\right)(k^2 - 1).$$

Далее процедура повторяется.

В приложении предложенным методом вычисляется третий член разложения.

2. Обоснование разложения эллиптического синуса

Чтобы не усложнять изложение деталями, ограничимся обоснованием первых двух членов асимптотического разложения эллиптического синуса $z = \operatorname{sn}(u;k)$. В следующей теореме доказывается, что полученное асимптотическое разложение не является равномерным по u на промежутке $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ при $k \to 1$.

Теорема 1. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned} z =& \operatorname{sn}(u;k) = u^{-1}(u,k) = \tanh u + \left(\frac{\tanh u}{4} - \frac{u}{4\cosh^2 u}\right)(1-k^2) + \\ &+ R_0(u,k)\cdot(1-k^2)^2, \quad u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k)). \end{aligned} \tag{1}$$

Для $R_0(u,k)$ верна оценка $|R_0(u,k)| \le C_{a,b}$, если $u \in [a,b] \subset (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$.

Оценка не является равномерной по u на промежутке $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ при $k \to 1$, т. е. при k, близких к 1, $R_0(u,k)$ может принимать сколь угодно большие значения.

Доказательство. Будем считать, что $z \in (0,1)$, близко к 1 и фиксировано. Рассмотрим

$$u = u(z;k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}}.$$

При $\tau \to 1$ имеем

$$u(z;k) \to \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = u(z;1) = u^{(0)},$$

в частности $z = \tanh u^{(0)}$. На первом шаге разложим функцию $u = u(z; k)$ по степеням $\tau - 1$:

$$u(z;k) = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}(\tau-1) + \frac{3}{8}\int_0^z \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1-t^2}(1-mt^2)^{5/2}}(\tau-1)^2. \quad (2)$$

Остаточный член в разложении обозначим через $R_1(u,k)$. При $\tau \to 1$ имеем

$$R_1(u,k) \to \frac{3}{8}\int_0^z \frac{t^4\,dt}{(1-t^2)^3} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\frac{z(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} + \frac{3}{16}\log\frac{1+z}{1-z}\right) = \beta(z)\frac{1}{(1-z)^2},$$

где

$$\beta(z) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\frac{z(5z^2-3)}{(1+z)^2} + \frac{3}{16}(1-z)^2\log\frac{1+z}{1-z}\right) \to \frac{3}{128} \text{ при } z \to 1.$$

Отметим также, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} &= \frac{1}{4}\frac{z}{1-z^2} - \frac{1}{8}\log\frac{1+z}{1-z} = \\ = \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{4}\frac{z}{1+z} - \frac{1}{8}(1-z)\log\frac{1+z}{1-z}\right) &= \alpha(z)\frac{1}{1-z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{1+z} - \frac{1}{8}(1-z)\log\frac{1+z}{1-z} \to \frac{1}{8} \text{ при } z \to 1.$$

Из (3) следует, что

$$\frac{u-u^{(0)}}{1-\tau} = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}(\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-\tau t^2})}$$

сходится, возрастая к

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)^2}} = \frac{\alpha(z)}{1-z}. \quad (4)$$

На втором шаге разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме по степеням $u^{(0)} - u$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + \frac{u^{(0)}-u}{\cosh^2 u} + R_2(u,k)(u^{(0)}-u)^2, \quad (5)$$

где

$$R_2(u,k) = -\frac{1}{(u^{(0)}-u)^2}\int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)}-\tau)\frac{\tanh\tau}{\cosh^2\tau}d\tau.$$

При $\tau \to 1$

$$\begin{aligned} R_2(u,k) \to -\frac{1}{2}\frac{\tanh(u^{(0)})}{\cosh^2(u^{(0)})} &= -\frac{1}{2}\tanh(u^{(0)})(1-\tanh^2(u^{(0)})) = \\ &= -\frac{z}{2}(1-z^2) = \gamma(z)(1-z), \end{aligned}$$

где $\gamma(z) = -z(1+z)/2 \to -1$ при $z \to 1$.

Подставляя (2) в (5), получим

$$\begin{aligned} z = \tanh u - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}(\tau-1)\frac{1}{\cosh^2 u} - \\ - \frac{1}{\cosh^2 u}R_1(u,k)(\tau-1)^2 + R_2(u,k)(u^{(0)}-u)^2 = \\ = \tanh u - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}(\tau-1)\frac{1}{\cosh^2 u} + R(u,k)(1-\tau)^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\frac{R(u,k)}{(\tau-1)^2} = -\frac{1}{\cosh^2 u}R_1(u,k) + R_2(u,k)\frac{(u^{(0)}-u)^2}{(1-\tau)^2}.$$

При $\tau \to 1$ имеем $\cosh^{-2} u = 1 - \tanh^2 u \to 1 - z^2$. Поэтому при фиксированном $z \in (0,1)$, устремляя $\tau \to 1$, с помощью (4) получим

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{R(u,k)}{(\tau-1)^2}(1-z) = -\beta(z)\frac{1}{1-z}(1-z^2) + \gamma(z)\alpha^2(z) = \gamma(z)\alpha^2(z) - \beta(z)(1+z).$$

Так как $\alpha(z) \to 1/8$, $\beta(z) \to 3/128$, $\gamma(z) \to -1$ при $z \to 1$, то

$$-\beta(z)(1+z) + \gamma(z)\alpha(z)^2 \to -\frac{1}{16} \neq 0, \quad z \to 1.$$

Таким образом, отношение $R(u,k)/(\tau-1)^2$ вблизи $z = 1$ сравнимо с

$$-\frac{1}{16}\frac{1}{(1-z)} \tag{7}$$

и является величиной неограниченной.

В разложении по степеням $u^{(0)} - u$ второго слагаемого в (6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh^2 u}(\tau-1)\left(-\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}\right) = \frac{1}{2}(\sinh u^{(0)}\cosh u^{(0)} - u^{(0)})(\tau-1)\frac{1}{\cosh^2 u} = \\ = \frac{1}{2}(\sinh u\cosh u - u)(\tau-1)\frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2 u}\frac{u^{(0)}-u}{\tau-1}(\tau-1)^2, \quad u < \xi < u^{(0)}, \end{aligned} \tag{8}$$

коэффициент при $\tau - 1$ является величиной ограниченной.

Подставим (8) в (6). К остаточному члену в (6) добавится слагаемое

$$\frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2 u}\frac{(u^{(0)}-u)}{(\tau-1)}(\tau-1)^2 = R_3(u,k)(\tau-1)^2.$$

При $\tau \to 1$ согласно (4)

$$\frac{R_3(u,k)}{(\tau-1)^2} \to -\alpha(z)\frac{1}{1-z}. \tag{9}$$

Так как $\alpha(z) \to \frac{1}{8}$ при $z \to 1$, то коэффициент при $(\tau-1)^2$ в разложении

$$z = \tanh u + \frac{1}{2}(\sinh u\cosh u - u)(\tau-1)\frac{1}{\cosh^2 u} + (R(u,k) + R_3(u,k))(\tau-1)^2, \tag{10}$$

равный $R_0(u,k)$, при $\tau \to 1$ вблизи $z = 1$ неограничен, что свидетельствует о неравномерности разложения эллиптического синуса по степеням $1 - k^2$ по переменной $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Согласно (4), (7) и (9) для $z \in [0, \delta]$, $\delta < 1$, остаточный член в разложении (10) ограничен. Так как отображение $z \to \mathrm{sn}\,(z;k)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает $[0,1]$ на $[0, \mathbf{K}(k)]$, то при $u \in [0, u_0]$, $u_0 < \mathbf{K}(k)$, остаточный член в (10) равномерно ограничен по u. Это доказывает первое утверждение теоремы.

$\square$

Небольшие изменения в доказательстве предыдущей теоремы позволяют получить оценку сверху остаточного члена.

Теорема 2. *Для множителя $R_0(u,k)$, входящего в остаточный член в разложении эллиптического синуса по степеням $1-\tau$ в (1), верна оценка*

$$|R_0(u,k)| \leqslant \frac{C}{\cosh^2 u\,(1-z)^2}, \quad u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k)),$$

где C не зависит от u.

Доказательство. Будем придерживаться обозначений доказательства теоремы 1. Пусть $0 < z < 1$ фиксировано. Рассмотрим

$$u = u(z;k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}}.$$

При $\tau \to 1$ имеем

$$u(z;k) \to \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = u(z;1) = u^{(0)},$$

в частности $z = \tanh u^{(0)}$.

На первом шаге разложим функцию $u = u(z;k)$ по степеням $\tau - 1$:

$$u(z;k) = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}(\tau-1) + \frac{3}{8}\int_0^z \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1-t^2}(1-mt^2)^{5/2}}(\tau-1)^2. \quad (11)$$

Остаточный член в разложении обозначим через $R_1(u,k)$. При $\tau \to 1$ имеем

$$R_1(u,k) \leqslant \frac{3}{8}\int_0^z \frac{t^4\,dt}{(1-t^2)^3} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\frac{z(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} + \frac{3}{16}\log\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\beta(z)}{(1-z)^2},$$

где $\beta(z) \to 3/128$ при $z \to 1$. Отметим также, что

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\frac{z}{1-z^2} - \frac{1}{8}\log\frac{1+z}{1-z} = \frac{\alpha(z)}{1-z},$$

где $\alpha(z) \to 1/8$ при $z \to 1$. Поэтому из (4) получаем

$$\frac{u - u^{(0)}}{1-\tau} \leqslant \frac{\alpha(z)}{1-z}.$$

На втором этапе разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме по степеням $u^{(0)} - u$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + \frac{u^{(0)} - u}{\cosh^2 u} + R_2(u,k)(u^{(0)} - u)^2, \quad (12)$$

где

$$R_2(u,k) = -\frac{1}{(u^{(0)}-u)^2}\int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)}-\tau)\frac{\tanh\tau}{\cosh^2\tau}d\tau.$$

Для остаточного члена верна оценка

$$|R_1(u,k)| \leqslant \frac{1}{(u^{(0)}-u)^2}\int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)}-\tau)\frac{\tanh\tau}{\cosh^2\tau}d\tau \leqslant \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Далее воспользуемся соотношением (4) и, подставляя (11) в (12), получим

$$\begin{aligned} z &= \tanh u + \left(-\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}\right)\frac{(\tau-1)}{\cosh^2 u} + R_1(u,k)\frac{(\tau-1)^2}{\cosh^2 u} + R_2(u,k)(u^{(0)}-u)^2 = \\ &= \tanh u + \left(-\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}\right)\frac{(\tau-1)}{\cosh^2 u} + R(u,k)(1-\tau)^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Согласно (4), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{|R(u,k)|}{(1-\tau)^2} \leqslant \frac{\beta(z)}{\cosh^2 u}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{(u^{(0)}-u)^2}{(1-\tau)^2}\frac{1}{\cosh^2 u} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\beta(z)}{\cosh^2 u}\frac{1}{(1-z)^2} + \alpha^2(z)\frac{1}{(1-z)^2}\frac{1}{\cosh^2 u} \leqslant \frac{\beta(z)+\alpha^2(z)}{\cosh^2 u(1-z)^2} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\cosh^2 u(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Оценим вклад в остаточный член второго слагаемого справа в (13). В разложении по степеням $u^{(0)}-u$ второго слагаемого в (11)

$$\begin{aligned} &\frac{(\tau-1)}{\cosh^2 u}\left(-\frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}\right) = \frac{1}{2}(\sinh u^{(0)}\cosh u^{(0)} - u^{(0)})\frac{(\tau-1)}{\cosh^2 u} = \\ &= \frac{1}{2}(\sinh u\cosh u - u)\frac{(\tau-1)}{\cosh^2 u} + \frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2 u}\,\frac{u^{(0)}-u}{\tau-1}(\tau-1)^2, \quad u<\xi<u^{(0)}, \end{aligned} \tag{14}$$

коэффициент при $\tau-1$ является величиной ограниченной. Подставим (14) в (13). К остаточному члену в (13) добавится слагаемое

$$R_3(u,k)(\tau-1)^2 = \frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2 u}\frac{(u^{(0)}-u)}{(\tau-1)}(\tau-1)^2 \leqslant \frac{\sinh^2 u^{(0)}}{\cosh^2 u}\frac{(u^{(0)}-u)}{(\tau-1)}(\tau-1)^2 =$$

$$= \frac{z^2}{1-z^2}\frac{1}{\cosh^2 u}\frac{\alpha(z)}{1-z}(\tau-1)^2 \leqslant \frac{1}{\cosh^2 u(1-z)^2}(\tau-1)^2.$$

Таким образом, множитель $R_0(u,k) = R(u,k) + R_3(u,k)$ в остаточном члене в разложении эллиптического синуса имеет оценку

$$|R_0(u,k)| \leqslant \frac{1}{\cosh^2 u(1-z)^2}.$$

Теорема доказана. □

Приложение

Как и в предыдущем разделе, будем считать, что $\tau = k^2$, и разложим функцию $u(z;k)$ по степеням $\tau - 1$. Переменную z заменим на $z = \tanh u^{(0)}$. Разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + \partial_u \tanh u(u^{(0)} - u) + \frac{1}{2}\partial_u^2 \tanh u(u^{(0)} - u)^2 + \\ + \frac{1}{6}\partial_u^3 \tanh u(u^{(0)} - u)^3 + \ldots$$

Заменим разность $u - u^{(0)}$ разложением функции $u = u(z;\tau)$ по степеням $\tau - 1$:

$$u - u^{(0)} = \partial_\tau u(z;1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}\partial_\tau^2 u(z;1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{6}\partial_\tau^3 u(z;1)(\tau - 1)^3 \ldots$$

Выполним подстановку

$$\begin{aligned} z = &\tanh u - (\partial \tanh u)[\partial_\tau u(z;1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}\partial_\tau^2 u(z;1)(\tau - 1)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\partial_\tau^3 u(z;1)(\tau - 1)^3 \ldots] + \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)[\partial_\tau u(z;1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}\partial_\tau^2 u(z;1)(\tau - 1)^2 + \ldots]^2 - \\ &- \frac{1}{6}(\partial_u^3 \tanh u)[\partial_\tau u(z;1)(\tau - 1) + \ldots]^3 \end{aligned}$$

и соберём коэффициенты при одинаковых степенях $\tau - 1$:

$$\begin{aligned} z = &\tanh u - [(\partial \tanh u)\partial_\tau u(z;1)](\tau - 1) + \\ &+ \frac{1}{2}[(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u(z;1))^2 - (\partial \tanh u)\partial_\tau^2 u(z;1)](\tau - 1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Рассмотрим коэффициент при $(\tau - 1)^2$, равный

$$\frac{1}{2}[-(\partial_u \tanh u)\partial_\tau^2 u(z;1) + (\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u(z;1))^2] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} \partial_\tau u(z;1) = &\left[\frac{1}{4}\frac{z}{(1 - z^2)} - \frac{1}{8}\log\frac{1 + z}{1 - z}\right]\Big|_{z = \tanh u^{(0)}} = \frac{1}{4}\frac{\tanh u^{(0)}}{1 - (\tanh u^0)^2} - \frac{1}{4}u^{(0)} = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\tanh u}{1 - (\tanh u)^2} - \frac{1}{4}u + \text{слагаемые при } (\tau - 1) = \\ &= \frac{1}{4}(\sinh u \cosh u - u) + \text{слагаемые при } (\tau - 1)\,, \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} (\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u(z;1))^2 = &\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\cosh^2 u}\Big(\frac{1}{4}\sinh u \cos u - u\Big)^2 + \cdots = \\ &= -2\frac{\sinh u}{\cosh^3 u}\Big(\frac{1}{4}(\sinh u \cosh u - u)\Big)^2 + \cdots = \\ &= -\frac{1}{8}\frac{\sinh u}{\cosh^3 u}\big(\sinh^2 u \cosh^2 u - 2u \sinh u \cosh u + u^2\big). \end{aligned}$$

Значит,

$$I_2 = -\frac{1}{8}\tanh u \sinh^2 u + \frac{1}{4} u \tanh^2 u - \frac{1}{8} u^2 \tanh u \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Далее

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 u(z;1) =& \frac{3}{4}\int_0^z \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}(1-\tau t^2)^{5/2}}\Big|_{\tau=1} = \frac{3}{4}\int_0^z \frac{t^4}{(1-t^2)^3}\\ =& \frac{3}{32}\frac{z(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} + \frac{9}{64}\log\frac{1+z}{1-z}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 u(z;1) =& \frac{3}{32}\frac{\tanh u^{(0)}(5\tanh^2 u^{(0)} - 3)}{(1-\tanh^2 u^{(0)})^2} + \frac{9}{32} u^{(0)} =\\ =& \frac{3}{32}\tanh u (5\tanh^2 u - 3)\cosh^4 u + \frac{9}{32} u + \text{ слагаемые при } (\tau - 1).\end{aligned}$$

В результате

$$I_1 = -\frac{3}{32}\sinh u \cosh u (5\tanh^2 u - 3) - \frac{9}{32}\frac{u}{\cosh^2 u}.$$

Найдём $I_1 + I_2$:

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 =& -\frac{3}{32}\sinh u \cosh u (5\tanh^2 u - 3) - \frac{9}{32}\frac{u}{\cosh^2 u} -\\ & -\frac{1}{8}\tanh u \sinh^2 u + \frac{1}{4} u \tanh^2 u - \frac{1}{8} u^2 \tanh u \frac{1}{\cosh^2 u}.\end{aligned}$$

Соберём коэффициенты при одинаковых степенях u. Получим

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{8} u^2 \frac{\sinh u}{\cosh^3 u} - \frac{9}{32} u + \frac{17}{32} u \tanh^2 u - \frac{19}{32}\frac{\sinh^3 u}{\cosh u} + \frac{9}{32}\sinh u \cosh u.$$

Таким образом, коэффициент при $(\tau - 1)^2$ равен

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2) = -\frac{1}{16} u^2 \frac{\sinh u}{\cosh^3 u} - \frac{9}{64} u + \frac{17}{64} u \tanh^2 u - \frac{19}{64}\frac{\sinh^3 u}{\cosh u} + \frac{9}{64}\sinh u \cosh u.$$

Найдём добавочное слагаемое. С этой целью в выражении

$$J = -(\partial_u \tanh u)\partial_\tau u(z;1)$$

заменим z на $\tanh u^{(0)}$ и разложим его по степеням $u^{(0)} - u$. Имеем

$$\begin{aligned}\partial_\tau u(z;1) =& \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}}\Big|_{\tau=1} = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(1-\tau t^2)^{3/2}}\Big|_{\tau=1} =\\ =& \frac{1}{2}\int_0^z \frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\frac{z}{(1-z^2)} - \frac{1}{8}\log\frac{1+z}{1-z}.\end{aligned}$$

И далее

$$
\begin{aligned}
J = &-\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\left(\frac{\tanh u^{(0)}}{(1-(\tanh^2 u^{(0)})} - u^{(0)}\right) - \\
&-\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\left(\frac{\tanh u + (\partial_u \tanh u)(u^{(0)}-u)+\dots}{1-(\tanh u)^2 - \partial_u(\tanh^2 u)(u^{(0)}-u)+\dots} - u - (u^{(0)}-u) = \right.\\
= -&\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\left[\frac{\tanh u + (\partial_u \tanh u)(u^{(0)}-u)+\dots}{1-(\tanh u)^2}\times\right.\\
&\left.\times\left(1+\frac{\partial_u(\tanh^2 u)(u^{(0)}-u)}{1-(\tanh u)^2}+\dots\right) - u - (u^{(0)}-u)\right] = \\
&= -\frac{1}{4}\left(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}\right) - \\
&-\left[\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\frac{\partial_u \tanh u}{1-(\tanh u)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\tanh u \frac{\partial_u(\tanh u)^2}{(1-(\tanh u)^2)^2}\right)(u^{(0)}-u) - \right.\\
&\left.-\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}(u^{(0)}-u)+\dots\right] = -\frac{1}{4}\left(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}\right) - \\
&-\left[\frac{1}{4}\partial_u \tanh u + \frac{1}{4}\tanh u \frac{\partial_u(\tanh u)^2}{1-(\tanh u)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u}\right](u^{(0)}-u).
\end{aligned}
$$

Коэффициент при $u^{(0)}-u$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\partial_u \tanh u - \frac{1}{4}\tanh u \frac{\partial_u(\tanh u)^2}{1-(\tanh u)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u} = \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u} - \frac{1}{2}\tanh^2 u \frac{\partial_u \tanh u}{1-(\tanh u)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\cosh^2 u} = -\frac{1}{2}(\tanh u)^2.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
-(\partial_u \tanh u)\partial_\tau u(z;1) = -\frac{1}{4}\left(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}\right) + \frac{1}{2}(\tanh u)^2(u-u^{(0)}).
$$

Подставим разложение в правую часть последнего равенства

$$
u - u^{(0)} = \partial_\tau u(z;1)(\tau-1)+\dots
$$

и получим

$$
\begin{aligned}
-(\partial_u \tanh u)\partial_\tau u(z;1) &= -\frac{1}{4}(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}) + \\
&+\frac{1}{2}(\tanh u)^2\partial_\tau u(z;1)(\tau-1)+\dots = \\
= -\frac{1}{4}(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u}) &+ \frac{1}{8}(\tanh -u)^2\Big(\frac{\tanh u}{1-\tanh^2 u} - u\Big)(\tau-1)+\dots
\end{aligned}
$$

Поэтому дополнительное слагаемое имеет вид

$$
\frac{1}{8}\frac{\sinh^3 u}{\cosh u} - \frac{1}{8}u\tanh^2 u.
$$

Таким образом, коэффициент в разложении эллиптического синуса при $(k^2-1)^2$ равен

$$
-\frac{1}{16}u^2\frac{\sinh u}{\cosh^3 u} - \frac{9}{64}\frac{u}{\cosh^2 u} - \frac{11}{64}\frac{\sinh^3 u}{\cosh u} + \frac{9}{64}\sinh u\cosh u.
$$

Заключение

В данной работе исследовалось асимптотическое поведение эллиптического синуса при $k \to 1$. Были получены первые два члена разложения, а также доказана равномерность разложения на любом промежутке $u \in [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$ при $k \to 1$. Аналогичная формула приведена в справочнике [1] и статье [2] (без указания метода вычисления). Здесь же доказано, что на промежутке $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ разложение не является равномерным. Кроме того, получена оценка остаточного члена.

Автор выражает свою искреннюю признательность проф. А. А. Соловьёву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. **Abramowitz, M.** Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — Washington : Nat. Bureau of Standards, 1972. — 1046 p.
2. **Арефьева, И. Я.** Скатывание в модели Хиггса и эллиптические функции / И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Е. В. Писковский // Теорет. и мат. физика. — 2012. — Т. 172, № 1. — С. 138–154.
3. **Гуревич, А. В.** Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны / А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1973. — Т. 65, № 2. — С. 590–604.
4. **Garifullin, R.** Phase shift in the Whitham zone for the Gurevich — Pitaevskii special solution of the Korteweg — de Vries equation / R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov // Physics Letters A. — 2010. — Vol. 374, iss. 13. — P. 1420–1424.
5. **Ахиезер, Н. И.** Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1970. — 304 с.
6. **Маркушевич, А. И.** Теория аналитических функций. Т. 1 / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1967. — 486 с.

Поступила в редакцию 19.05.2017
После переработки 27.06.2017

Сведения об авторе

Красильников Александр Владимирович, аспирант, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: press-csu@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 2. P. 169–180.

ON ASYMPTOTICS OF ELLIPTIC SINE

A.V. Krasilnikov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
press-csu@yandex.ru

The article offers a simple way of the finding of the elliptic sine $z = \operatorname{sn}(u; k)$ asymptotics by powers of $k^2 - 1$. In the literary sources only the first two members decomposition discharged. The proposed method allows to find the subsequent terms of the expansion. The disadvantage is the large amount of calculations. The main result is that the asymptotic expansion is not uniform by u when $k \to 1$. The assessment of the remainder term of the decomposition is received also.

Keywords: *elliptic sine, asymptotic expansion, hyperbolic functions.*

References

1. **Abramowitz M., Stegun I.A.** *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington, National Bureau of Standards, 1972. 1046 p.
2. **Arefieva I.Ya., Volovich I.V., Piskovskiy E.V.** Rolling in the Higgs model and elliptic functions. *Theoretical and mathematical physics*, 2012, vol. 172, no. 1, pp. 1001–1016.
3. **Gurevich A.V., Pitaevskii L.P.** Nonstationary structure of a collisionless shock wave. *Soviet physics — JETP*, 1974, vol. 38, no. 2, pp. 291–297.
4. **Garifullin R., Suleimanov B., Tarkhanov N.** Phase shift in the Whitham zone for the Gurevich — Pitaevskii special solution of the Korteweg — de Vries equation. *Physics Letters A*, 2010, vol. 374, no. 13, pp. 1420–1424.
5. **Akhiezer N.I.** *Elements of the Theory of Elliptic Functions*. American Mathematical Society, 1990. 237 p.
6. **Markushevich A.I.** *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [Theory of analytic functions]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1967. 486 p. (In Russ.).

Accepted article received 19.05.2017
Corrections received 27.06.2017