*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.4.2001*

**УДК 519.2**

# О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ [1]

*А.Н. Тихомиров*

Получены простые достаточные условия применимости центральной предельной теоремы к последовательности случайных величин и выписана оценка скорости сходимости без явных предположений о независимости и моментах выше первого порядка. В качестве применения основных результатов приведены более простые доказательства известных теорем для сумм и квадратичных форм от независимых и слабо зависимых случайных величин, а также получены условия применимости центральной предельной теоремы для обобщенных $U$-статистик и приведена оценка скорости сходимости в терминах сумм моментов образующих не выше четвертого порядка.

**Введение.** В 1970г., в докладе на V Берклеевском симпозиуме Ч. Стейн ([9]) предложил новый подход к изучению близости распределений к нормальному закону. Этот подход основан на применении дифференциальных неравенств к исследованию близости функций распределения к нормальному закону. Метод Стейна получил широкое распространение, и благодаря ему был достигнут, в частности, существенный прогресс в исследовании скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин.

В 1976г. Тихомиров А.Н. [7] вместо уравнения Ч. Стейна использовал для оценки близости к нормальному закону уравнение $f'(t) = -tf(t)$, $f(0) = 1$, описывающее характеристическую функцию нормального закона. Это позволило существенно упростить доказательство и снизить ограничения на моменты по сравнению с работой Ч. Стейна. В дальнейшем подход, изложенный в работах Тихомирова [6], [7], получил также широкое распространение. См., например, работы Булинского ([2]), Yoshihara ([10]), Сунклодаса ([5]) и других. Следует

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №99-01-00112

отметить, что почти все применения относились к исседованию скорости сходимости в центральной предельной теореме. Во многих задачах требуется установить лишь сходимость к нормальному закону. Одно из исключений представляет работа Н.К. Бакирова ([1]).

Подход, описанный в работе [6], позволяет сформулировать простые достаточные условия применимости центральной предельной теоремы без явных предположений о характере зависимости случайных величин и ограничений на моменты. Мы дадим также оценку близости к нормальному закону без использования явных предположений о зависимости и моментах случайных величин. Формулировке и доказательству этих результатов посвящен п. 1. В п.п. 2-6 мы рассматриваем различные применения основных теорем. В частности, мы приведем доказательство теоремы Линдеберга , доказательство центральной предельной теоремы для сумм стационарно связанных случайных величин. удовлетворяющих условию сильного перемешивания (п.2), доказательство центральной предельной теоремы для квадратичных форм от независимых величин (п. 3), центральной предельной теоремы для обобщенных $U$-статистик второго порядка (п. 4), а также оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме для обобщенных $U$-статистик (п.5).

**1. Основные результаты.** Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ дана последовательность $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_n \subset \mathfrak{M}$ и случайных величин $G_n$, имеющих конечное математическое ожидание, $\mathbf{E}|G_n| < \infty$. Положим $W_n = \mathbf{E}(G_n|\mathcal{F}_n)$. Для любой последовательности $W_n^*$ случайных величин с конечным математическим ожиданием определим $\Delta_n = W_n - W_n^*$ и функции

$$\delta_n(t) = \mathbf{E}G_n\left(\frac{e^{it\Delta_n} - 1}{it}\right) - 1, \quad \varepsilon_n(t) = \varepsilon_{n1}(t) + \varepsilon_{n2}(t), \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n1}(t) &= \mathbf{E}G_n e^{itW_n^*}, \\ \varepsilon_{n2}(t) &= \mathbf{E}\Big|\mathbf{E}\big\{\,\big(G_n(e^{it\Delta_n} - 1) - \mathbf{E}G_n(e^{it\Delta_n} - 1)\,\big)\Big|\,\mathcal{F}_n)\,\big\}\,\Big|. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** *Пусть*

$$\varepsilon_n(t) \to 0 \quad \text{и} \quad \delta_n(t) \to 0 \tag{1.2}$$

*равномерно в любом конечном интервале. Тогда*

$$\mathbf{P}\{W_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

*где* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$

Ниже мы приведем оценку близости к нормальному закону в терминах функций $\delta_n(t)$ и $\varepsilon_n(t)$. Положим

$$\widetilde{\delta}_n(T) = \sup_{|t| \le T} |\delta_n(t)|.$$

**Теорема 2.** *Для любого $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, и любого $T > 0$ такого, что $\widetilde{\delta}_n(T) < \gamma$, имеет место неравенство*

$$\sup_x \Big| \mathbf{P}\{W_n < x\} - \Phi(x) \Big| \le \frac{C}{T} + \frac{\widetilde{\delta}(T)}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} \int\limits_0^T \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \int\limits_0^t |\varepsilon(u)| e^{\frac{u^2}{2}} du dt. \tag{1.3}$$

**Доказательство Теоремы 1.** Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины $W_n$, $f_n(t) = \mathbf{E}e^{itW_n}$. Поскольку $\mathbf{E}|W_n| \le \mathbf{E}|G_n| < \infty$, производную функции $f_n(t)$ можно записать в виде

$$f_n'(t) = i\mathbf{E}W_n e^{itW_n} = i\mathbf{E}G_n e^{itW_n}.$$

Продолжая это равенство, мы получим

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= i\mathbf{E}G_n e^{itW_n^*} + i\mathbf{E}G_n(1 - e^{-it\Delta_n})e^{itW_n} \\ &= i\mathbf{E}G_n e^{itW_n^*} + i\mathbf{E}G_n(1 - e^{-it\Delta_n})\mathbf{E}e^{itW_n} + i\mathbf{E}[G_n(1 - e^{-it\Delta_n}) \\ &\quad -\mathbf{E}G_n(1 - e^{-it\Delta_n})]e^{itW_n} \qquad (1.4) \\ &= i\mathbf{E}G_n e^{itW_n^*} + i\mathbf{E}G_n(1 - e^{-it\Delta_n})f_n(t) + \mathbf{E}[\mathbf{E}(G_n(1 - e^{-it\Delta_n}) \\ &\quad -\mathbf{E}G_n(1 - e^{-it\Delta_n}))|\mathcal{F}_n]e^{itW_n}. \end{aligned}$$

Всюду в дальнейшем символом $\theta(\cdot)$ с индексом или без будем обозначать функции аргументов, указанных в скобках, такие что $|\theta(\cdot)| \le 1$, а символом $C$ с индексом или без будем обозначать абсолютные константы, необязательно одни и те же. С учетом сказанного, используя обозначения, введенные ранее, перепишем равенство (1.4) в виде

$$f_n'(t) = -t(1 - \delta_n(-t))f_n(t) + \theta_n(t)\varepsilon_n(-t). \tag{1.5}$$

Учитывая, что $f_n(0) = 1$, перепишем равенство (1.5) в интегральной форме

$$\begin{aligned} f_n(t) &= exp\Big\{ -\frac{t^2}{2} + \int\limits_0^t u\delta_n(u)du \Big\} \\ &\quad \times \Big(1 + \int\limits_0^t \theta(u)\varepsilon_n(u)\exp\Big\{ u^2/2 - \int\limits_0^u u\delta_n(z)dz \Big\}du\Big). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Поскольку по условию $\delta_n(t)$ и $\varepsilon_n(t)$ равномерно в любом конечном интервале стремятся к 0, (1.6) влечет

$$f_n(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{1.7}$$

что и доказывает теорему 1.

**Доказательство теоремы 2.** Заметим, что для $|u| \le |t| \le T$ имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_u^t z\delta(z)dz \right| \le \frac{\gamma}{2}(t^2 - u^2). \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.6) и (1.8) следует, что в области $|t| \le T$ справедливо равенство

$$f_n(t) = \exp\Big\{ -\frac{t^2}{2} + \theta(t)\widetilde{\delta}_n(T)t^2 \Big\} + \theta(t) \int\limits_0^t |\varepsilon_n(u)| \exp\Big\{ -\frac{(t^2-u^2)(1-\gamma)}{2} \Big\} du \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) немедленно влечет оценку разности характеристических функций

$$\begin{aligned} \big| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \big| &\le \widetilde{\delta}_n(T)t^2 \exp\Big\{ -\frac{(1-\gamma)}{2}t^2 \Big\} \\ &+ \int\limits_0^{|t|} |\varepsilon_n(u)| \exp\Big\{ -\frac{(t^2-u^2)(1-\gamma)}{2} \Big\} du. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Ессеена (см. [4, гл. 5, с. 154]), мы получим, что

$$\Big| F_n(x) - \Phi(x) \Big| \le \frac{C_1}{T} + \frac{\widetilde{\delta}_n(T)}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} \int\limits_0^T \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \Big( \int\limits_0^t |\varepsilon(u)| e^{\frac{u^2}{2}} du \Big) dt$$

Теорема 2 доказана.

Поскольку многие приложения связаны с суммами случайных величин, переформулируем теорему 1 для случая схемы серий. Рассмотрим схему серий случайных величин $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$, $n = 1, 2 \ldots$. Будем предполагать, что $\mathbf{E}X_{nk} = 0$, $k = 1, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \qquad \text{и} \qquad B_n^2 = \mathbf{E}S_n^2.$$

Для произвольной последовательности $S_{nj}$ положим

$$\Delta_{nj} = (\,S_n - S_{nj}\,)B_n^{-1}.$$

Имеет место следующая

**Теорема 3.** *Пусть для любого $n \geq 1$ существует последовательность случайных величин $S_{nj}$, $j = 1,\ldots,k_n$,такая, что равномерно по $t$ в любом конечном интервале*

$$1)\qquad \frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}X_{nj}e^{itS_{nj}/B_n} \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty$$

$$2)\qquad \frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}X_{nj}\frac{e^{it\Delta_{nj}}-1}{it} \longrightarrow 1$$

$$3)\qquad \frac{1}{B_n}\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{k_n}\big(\,X_{nj}(e^{it\Delta_{nj}}-1) - \mathbf{E}X_{nj}(e^{it\Delta_{nj}}-1)\,\big)\Big| \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

*Тогда*

$$\mathbf{P}\{S_n/B_n < x\} \longrightarrow \Phi(x) \text{ при } n\to\infty.$$

Заметим, что в сформулированной теореме делаются лишь минимальные моментые предположения.

**Доказательство теоремы.** Пусть $I_n$ случайная величина, равномерно распределенная на множестве $\{1,\ldots,k_n\}$. Положим $G_n = B_n^{-1}k_nX_{nI_n}$. Тогда $B_n^{-1}S_n = \mathbf{E}\Big(\,G_n|\mathcal{F}_n\,\Big)$, где $\mathcal{F}_n$ $\sigma$-алгебра, порожденная случайными величинами $X_{n1},\ldots,X_{nk_n}$. Далее положим $W_n^* = B_n^{-1}S_{nI_n}$. Нетрудно видеть, что во введенных обозначениях имеет место равенство

$$\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{k_n}X_{nj}e^{itB_n^{-1}S_{nj}} = \mathbf{E}\Big\{\,G_ne^{itW_n^*}\Big|\,\mathcal{F}_n\,\Big\}.$$

Отсюда следует что условия 1), 2) и 3) теоремы 2 эквивалентнтны условиям теоремы 1. Теорема 3 доказана.

**2. Суммы независимых и слабо зависимых случайных величин.**

Сначала рассмотрим доказательство теоремы Линдеберга для независимых в каждой серии случайных величин. Пусть $X_{nj}$, $j = 1,\ldots,k_n$, $n = 1,2,\ldots$ образуют схему серий независимых в каждой серии случайных величин с нулевым средним, $\mathbf{E}X_{nj} = 0$, и конечной дисперсией. $\sigma_{nj}^2 = \mathbf{E}X_{nj}^2$. Пусть $S_n$ и $B_n^2$ означают как и выше сумму и дисперсию суммы случайных величин в $n$-ой серии, а символом $F_{nj}(x)$ обозначим функцию распределения случайной величины $X_{nj}$, $F_{nj}(x) = \mathbf{P}\Big\{ X_{nj} < x \Big\}$. Для любого $\tau > 0$ определим дробь Линдеберга

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\tau B_n} x^2 dF_{nj}(x). \tag{2.1}$$

**Теорема 4.** *Пусть для любого* $\tau > 0$ $L_n(\tau) \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\Big\{ B_n^{-1} S_n < x \Big\} \to \Phi(x).$$

**Доказательство теоремы.** Покажем, что в этом случае выполнены условия 1)–3) теоремы 3. Рассмотрим $S_{nj} = \sum_{k=1,k\neq j}^{k_n} X_{nk}$, $j = 1, \dots, k_n$. Условие 1) выполнено в силу независимости и центрированности случайных величин. Рассмотрим условия 2) и 3). Заметим, что $\Delta_{nj} = X_{nj} B_n^{-1}$. Условие 2) имеет вид

$$\frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{nj} \Big( \frac{e^{itX_{nj}B_n^{-1}} - 1}{it} \Big) \longrightarrow 1. \tag{2.2}$$

Заметим, что $B_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{nj}^2$, поэтому условие 2) эквивалентно тому, что

$$\frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{nj} ( \frac{e^{itX_{nj}B_n^{-1}} - 1 - itX_{nj}B_n^{-1}}{it} ) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Далее, используя неравенство $|e^{ix} - 1 - ix| \le \min\{2|x|, \frac{|x|^2}{2}\}$, мы получим

$$\begin{aligned} &\Big| \mathbf{E} X_{nj} ( \frac{e^{itX_{nj}/B_n} - 1 - itX_{nj}/B_n}{it} ) \Big| \\ &\le \frac{|t|}{2B_n^2} \int_{|x|\le\tau B_n} |x|^3 dF_{nj}(x) + \frac{2}{B_n} \int_{|x|>\tau B_n} x^2 dF_{nj}(x) . \\ &\le \frac{\tau |t|}{B_n} \mathbf{E}|X_{nj}|^2 + \frac{1}{B_n} \int_{|x_{nj}|>\tau B_n} X_{nj}^2 dF_{nj}(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Big| \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{nj} \Big( \frac{e^{itX_{nj}/B_n} - 1 - itX_{nj}/B_n}{it} \Big) \Big| \le \tau |t| + L_n(\tau). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует (2.3), а значит и условие 2) теоремы 3.

Рассмотрим условие 3):

$$\frac{1}{B_n}\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)-\mathbf{E}X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)\Big)\Big| \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{2.5}$$

Положим $\xi_{nj} = \big(X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)-\mathbf{E}X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)\big)$. Заметим, что $\xi_{nj}$ независимы и $\mathbf{E}|\xi_{nj}|^2<\infty$, $(\,|\xi_{nj}|\le 2(|X_{nj}|+\mathbf{E}|X_{nj}|\,)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}\Big|^2 = \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}|\xi_{nj}|^2. \tag{2.6}$$

Далее,

$$\mathbf{E}|\xi_{nj}|^2 \le 4\int\limits_{|x|>\tau B_n} x^2dF_{nj}(x) + \frac{C\tau|t|}{B_n}\mathbf{E}X_{nj}^2. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что

$$\frac{1}{B_n}\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)-\mathbf{E}X_{nj}(e^{itX_{nj}/B_n}-1)\Big)\Big| \le \Big(4L_n(\tau)+C\tau|t|\Big)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Очевидно, что (2.8) влечет (2.5), а следовательно и условие 3). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим приложения к суммам слабо зависимых случайных величин. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – стационарная в узком смысле последовательность случайных величин с нулевым средним, $\mathbf{E}X_i = 0$, удовлетворяющая условию сильного перемешивания с коэффициентом

$$\alpha(n) = \sup_{\substack{A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}\\ B\in\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}}} |\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Здесь и далее $\mathfrak{M}_a^b$ означает $\sigma$-алгебру, порожденную случайными величинами $X_j$, когда $j\in[a,b]$.

Докажем следующую известную теорему

**Теорема 5.** *Пусть для некоторого $\delta>0$ выполнены условия*

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\big[\,\alpha(k)\,\big]^{\frac{\delta}{2+\delta}}<\infty$$

$$(b)\quad \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta}<\infty,$$

$$(c)\quad \lim_{n\to\infty} B_n^2 n^{-1} = \sigma^2 > 0.$$

*Тогда к последовательности применима центральная предельная теорема, т.е.*

$$\mathbf{P}\Big\{ S_n B_n^{-1} < x \Big\} \longrightarrow \Phi(x).$$

См., например, Ибрагимов, Линник [3, гл.17].

**Доказательство теоремы.** Мы воспользуемся известным неравенством для оценки ковариации "далеких" случайных величин. Если $\xi$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{M}_a^b$, а $\eta$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{M}_{b+m}^c$, и $\mathbf{E}|\xi|^{2+\delta} < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^{2+\delta} \leq \infty$, то

$$\Big|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta\Big| \leq C[\alpha(m)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\Big(\mathbf{E}|\xi|^{2+\delta}\mathbf{E}|\eta|^{2+\delta}\Big)^{\frac{1}{2+\delta}}. \tag{2.9}$$

(См. [3, теорема 17.2.2]). Если в дополнение случайная величина $\xi$ ограничена, т.е. $|\xi| \leq C_0$, тогда

$$\Big|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta\Big| \leq CC_0[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\mathbf{E}|\eta|^{\frac{1}{2+\delta}}. \tag{2.10}$$

Пусть $0 < \gamma < 1$. Конкретным выбором $\gamma$ распорядимся позднее. Положим $S_{nj} = \sum\limits_{|k-j|>m} X_k$. Тогда $\Delta_{nj} = B_n^{-1}\sum\limits_{|k-j|\leq m} X_k$ Из неравенства (2.10) следует, что условие 1) теоремы 3 выполнено, если

$$\sqrt{n}[\alpha(m)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} \longrightarrow 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{2.11}$$

Не умаляя общности мы можем считать, что $\delta \leq 1$. Неравенство (2.10) влечет, что условие 2) теоремы 3 будет выполнено, если

$$B_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|j-k|>m}[\alpha(j-k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \longrightarrow 0, \text{ при } n \to \infty \tag{2.12}$$

и

$$B_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\frac{e^{it\Delta_{nj}B_n^{-1}} - 1 - it\Delta_{nj}B_n^{-1}}{it}\Big) \longrightarrow 0. \tag{2.13}$$

Поскольку $\alpha(n)$ монотонная последовательность, и выполнено условие ($a$), мы имеем $n[\alpha(n)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что условия (2.11) и (2.12) будут выполнены, если выбрать $\gamma = \frac{\delta}{2+2\delta}$. Используя известное неравенство $|e^{ix} - 1 - ix| \leq C|x|^{1+\delta}$, получим, что

$$\begin{aligned} B_n^{-1}\Big|\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\frac{e^{it\Delta_{nj}B_n^{-1}} - 1 - it\Delta_{nj}B_n^{-1}}{it}\Big)\Big| &\leq CB_n^{-(2+\delta)}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_j||\Delta_{nj}|^{1+\delta} \\ &\leq Cn^{-\delta/2}m^2\mathbf{E}|X|^{2+\delta}. \end{aligned}$$

В силу выбора $m$ имеет место соотношение $n^{-\delta/2}m^2 \longrightarrow 0$. Следовательно, условие 2) выполнено. Покажем, что в условиях теоремы выполнено условие 3) теоремы 3. Положим $\xi_j = X_j(e^{it\Delta_{nj}} - 1) - \mathbf{E}X_j(e^{it\Delta_{nj}} - 1)$. Заметим, что $|\xi_j| \le 2(|X_j| + \mathbf{E}|X_j|)$. Следовательно, $\mathbf{E}|\xi_j|^{2+\delta} \le C\mathbf{E}|X_j|^{2+\delta}$. Обозначим символом $\overline{a}$ комплексно сопряженное к числу $a$. Имеет место следующая цепочка неравенств.

$$\begin{aligned} B_n^{-1}\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big| &\le \Big(B_n^{-2}\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|>3m}\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k + B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|\le 3m}\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия ($c$) теоремы и неравенства (2.9) для всех достаточно больших $n$ справедливо неравенство

$$B_n^{-2}\Big|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|>3m}\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k\Big| \le Cn^{-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|>3m}[\alpha(|k-j|-2m)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}.$$

Последнее в свою очередь влечет, что

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k:|k-j|>3m}\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k\Big| \le C\sum_{k>m}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty. \qquad (2.14)$$

Кроме того, имеет место следующее неравенство

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|\le 3m}\Big|\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k\Big| \le B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|\le 3m}\mathbf{E}^{1/2}|\xi_j|^2\mathbf{E}^{1/2}|\xi_k|^2$$

Очевидно, что для любого $j = 1,\dots,n$ справедливы неравенства

$$\mathbf{E}|\xi_j|^2 \le CB_n^{-\delta}\mathbf{E}|X_j|^2|\Delta_{nj}|^\delta \le CB_n^{-\delta}m\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta}.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших $n$

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k:|k-j|\le 3m}|\mathbf{E}\xi_j\overline{\xi}_k| \le Cn^{-\delta/2}m^2\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} \qquad (2.15)$$

Как уже отмечалось выше, $n^{-\delta/2}m^2 \longrightarrow 0$. Соотношения (2.14) и (2.15) доказывают условие 3) теоремы 3, а следовательно и теорему в целом.

**3. Центральная предельная теорема для квадратичных форм.** Рассмотрим условия применимости ЦПТ для квадратичных форм. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ последовательность независимых случайных величин с нулевым средним, $\mathbf{E}X_k = 0$, и дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{E}X_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Будем предполагать, что последовательность $X_1^2, X_2^2, \ldots$ равномерно интегрируема, т.е.

$$\max_{j\geq 1} \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{I}_{\{X_j > M\}} \longrightarrow 0 \text{ при } M \to \infty. \tag{3.1}$$

Рассмотрим квадратичную форму вида

$$Q_n = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}^{(n)} X_j X_l,$$

где матрица коэффициентов $A^{(n)} = \left(a_{jl}^{(n)}\right)_{j,l=1}^{n}$ предполагается симметричной и диагональные элементы $a_{jj}^{(n)} = 0$. Относительно матрицы коэффициентов $A^{(n)}$ предположим также, что

$$\frac{\|A^{(n)}\|_s}{\|A^{(n)}\|_2} \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{3.2}$$

где под $\|A^{(n)}\|_s$ понимаем спектральную норму (в силу симметрии матрицы $A^{(n)}$ – это модуль максимального по абсолютной величине собственного числа), а под $\|A^{(n)}\|_2$ – норму Фробениуса. Заметим, что

$$\sigma_n^2 = \mathbf{E}Q_n^2 = 2\sigma^4 \|A^{(n)}\|_2^2. \tag{3.3}$$

Условие (3.2) эквивалентно условию

$$|\lambda_1^{(n)}|\sigma_n^{-1} \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{3.4}$$

где $\lambda_1^{(n)}$ максимальное по абсолютной величине собственное число матрицы $A^{(n)}$.

**Теорема 6.** *Пусть выполнены условия* (3.1), (3.2). *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{Q_n}{\sigma_n} < x \right\} \longrightarrow \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

**Доказательство теоремы.** Не умаляя общности будем считать, что $\|A^{(n)}\|_2 = 1$ и $\sigma^4 = 1/2$. Положим

$$\mathcal{M} = \max_{1\leq k,j\leq n} |a_{jk}^{(n)}|, \qquad \mathcal{L}_j = \sum_{l=1}^{n} |a_{lj}^{(n)}|^2, \qquad \mathcal{L} = \max_{1\leq j\leq n} \mathcal{L}_j.$$

Известно, что
$$\mathcal{M} \le \mathcal{L} \le \|A^{(n)}\|_s \tag{3.5}$$
Условия (3.2) и (3.5) в предположении, что $\|A^{(n)}\|_2 = 1$, влекут, что
$$\mathcal{M} \to 0, \qquad \mathcal{L} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$
Введем в рассмотрение величины
$$Y_j = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_j X_l + \sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l X_j = 2X_j \sum_{l=1}^{n} a_{lj}^{(n)} X_l. \tag{3.7}$$
Нетрудно видеть, что
$$Q_n = S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_n} Y_j.$$
В качестве $S_{nj}$ рассмотрим последовательность
$$S_{nj} = \sum_{l \ne j, k \ne j} a_{lk}^{(n)} X_l X_k, \ j = 1, \dots, n.$$
Очевидно, что $\Delta_{nj} = Y_j$.

Сначала рассмотрим случай, когда случайные величины $X_j$, $j = 1, 2, \dots$, ограничены, т.е.
$$|X_j| \le M. \tag{3.8}$$

Рассмотрим условия 1)–3) теоремы 3. Условие 1) выполнено, поскольку
$$\mathbf{E}\Big( Y_j \big| \mathcal{F}_n^j \Big) = 2\mathbf{E}\Big( \sum_{l=1}^{n} a_{jl}^{(n)} X_l \Big) \mathbf{E}\Big\{ X_j \big| \mathcal{F}_n^j \Big\} = 0.$$
Здесь и далее $\mathcal{F}_n^j = \sigma(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)$. Заметим, что при наших предположениях
$$1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} Y_j^2. \tag{3.9}$$
Используя равенство (3.9), мы перепишем условие 2) в виде
$$\frac{1}{2it} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} Y_j \Big( e^{itY_j} - 1 - itY_j \Big) \to 0.$$

В силу известного неравенства $|e^{ix}-1-ix|\le \frac{1}{2}|x|^2$ мы получим, что

$$\left|\frac{1}{2it}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}Y_j\Big(e^{itY_j}-1-itY_j\Big)\right|\le\frac{|t|}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|Y_j|^3 \tag{3.10}$$

Применяя неравенство Розенталя (см. [4], гл.3, стр.99), мы получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|Y_j|^3 &= \mathbf{E}|X_j|^3\mathbf{E}\Big|\sum_{l=1}^{n}a_{lj}^{(n)}X_l\Big|^3\le C\mathbf{E}|X_j|^3\Big(\sum_{l\ne j}|a_{jl}^{(n)}|^3\mathbf{E}|X_l|^3\\ &+ \Big(\sum_{l}(a_{jl}^{(n)})^2\mathbf{E}|X_l|^2\Big)^{3/2}\Big).\end{aligned}$$

В силу условия (3.2) и предположения о норме матрицы имеет место

$$\left(\sum_{j=1}^{k_n}\Big(\sum_{l\ne j}|a_{jl}^{(n)}|^3+\Big(\sum_{l}(a_{jl}^{(n)})^2\Big)^{3/2}\Big)\right)\le\mathcal{M}+\mathcal{L}\longrightarrow 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Неравенство (3.10) и последнее соотношение влекут условие 2). Рассмотрим теперь условие 3) теоремы 3. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\quad&\Big|\sum_{j=1}^{k_n}\Big(Y_j(e^{itY_j}-1)-\mathbf{E}Y_j(e^{itY_j}-1)\Big)\Big|\le t^2\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}|Y_j|^3\\ +\quad&\frac{t^2}{2}\mathbf{E}^{1/2}\Big|\sum_{j=1}^{n}(Y_j^2-\mathbf{E}Y_j^2)\Big|^2. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Как было показано выше, первая сумма в правой части (3.11) стремится к нулю. Второе слагаемое в правой части (3.11) представим в виде

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{n}(Y_j^2-\mathbf{E}Y_j^2)\right)^2=\sum_{j\ne k}(\mathbf{E}Y_j^2Y_k^2-\mathbf{E}Y_j^2\mathbf{E}Y_k^2)+\sum_{j=1}^{k_n}(\mathbf{E}Y_j^4-\mathbf{E}^2Y_j^2).$$

Последняя сумма стремится к 0 в силу условия (3.2) и неравенства Розенталя. Действительно,

$$\mathbf{E}|Y_j|^4\le C\mathbf{E}|X_j|^4\mathbf{E}\Big(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}^{(n)}X_l\Big)^4\le CM^8\Big(\sum_{l=1}^{n}|a_{jl}^{(n)}|^4+(\sum_{l=1}^{n}|a_{jl}^{(n)}|^2)^2\Big)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|Y_j|^4\le CM^8\Big(\mathcal{M}^2+\mathcal{L}^2\Big)\to 0.$$

Рассмотрим первую сумму. Заметим, что

$$\mathbf{E}Y_j^2Y_k^2 = \mathbf{E}X_j^2X_k^2\Big(\sum_{l=1}^n a_{jl}X_l\Big)^2\Big(\sum_{s=1}^n a_{ks}X_s\Big)^2$$

Продолжим это равенство следующим образом

$$\mathbf{E}Y_j^2Y_k^2 = \sum_{r=1}^9 S_{jk}^{(r)},$$

где

$$\begin{aligned}
S_{jk}^{(1)} &= \mathbf{E}X_j^2X_k^2\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big)^2\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big)^2\\
S_{jk}^{(2)} &= 2a_{jk}\mathbf{E}X_j^2X_k^3\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big)\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big)^2;\\
S_{jk}^{(3)} &= a_{jk}^2\mathbf{E}X_j^2X_k^4\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big)^2\\
S_{jk}^{(4)} &= 2a_{kj}\mathbf{E}X_j^3X_k^2\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big)^2\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big);\\
S_{jk}^{(5)} &= 4a_{kj}^2\mathbf{E}X_j^3X_k^3\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big)\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big);\\
S_{jk}^{(6)} &= 2a_{kj}^3\mathbf{E}X_j^3X_k^4\Big(\sum_{s\neq j} a_{ks}X_s\Big)\\
S_{jk}^{(7)} &= a_{kj}^2\mathbf{E}X_j^4X_k^2\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big)^2;\\
S_{jk}^{(8)} &= 2a_{kj}^3\mathbf{E}X_j^4X_k^3\Big(\sum_{l\neq k} a_{jl}X_l\Big);\\
S_{jk}^{(9)} &= a_{kj}^4\mathbf{E}X_j^4X_k^4.
\end{aligned}$$

Заметим, что $S_{jk}^{(6)} = S_{jk}^{(8)} = 0$.

$$\sum_{j,k=1}^n |S_{jk}^{(9)}| = \sum_{j,k} a_{jk}^4\mathbf{E}X_j^4\mathbf{E}X_k^4 \le M^8\mathcal{L}^2 \quad\longrightarrow\quad 0 \text{ при } n\to\infty.$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} |S_{jk}^{(7)}| \le C \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2 \mathcal{L}_j^2 \le C\mathcal{L}^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\sum_{j,k} |S_{jk}^{(5)}| \le C \sum_{j,k} a_{jk}^2 \mathcal{L}_j \mathcal{L}_s \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\sum_{j,k} |S_{jk}^{(4)}| \le C \sum_{j} \mathcal{L}_j^3 \le C\mathcal{L} \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\sum_{j,k} |S_{jk}^{(3)}| \le C\mathcal{L}^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\sum_{j,k} |S_{jk}^{(2)}| \le C\mathcal{L} \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Наконец, $S_{jk}^{(1)}$ представим в виде

$$\begin{aligned}
S_{jk}^{(1)} &= \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{E}X_k^2 \mathbf{E}\Big(\sum_{l\ne k} a_{jl}X_l\Big)^2 \Big(\sum_{s\ne j} a_{ks}X_s\Big)^2 \\
&= \sum_{l\ne k}\sum_{l_1\ne k}\sum_{s\ne j}\sum_{s_1\ne j} a_{jl}a_{jl_1}a_{ks}a_{ks_1}\mathbf{E}X_lX_{l_1}X_sX_{s_1} \\
&= \psi_{jk}^{(1)} + \psi_{jk}^{(2)} + \psi_{jk}^{(3)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_{jk}^{(1)} &= \sum_l a_{jl}^2 a_{kl}^2 \mathbf{E}X_l^4, \qquad \psi_{jk}^{(2)} = \sum_l \sum_{s\ne l} a_{jl}^2 a_{js}^2 \mathbf{E}X_l^2 \mathbf{E}X_s^2 \\
\psi_{jk}^{(3)} &= 2\sum_l \sum_s a_{jl}a_{kl}a_{js}a_{ks}\mathbf{E}X_l^2\mathbf{E}X_s^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}Y_j^2\mathbf{E}Y_k^2 = \mathbf{E}X_j^2\mathbf{E}X_k^2 \sum_l \sum_s a_{jl}^2 a_{js}^2 \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{E}X_s^2 = \psi_{jk}^{(2)}.$$

Следовательно,

$$\Big| \sum_{j,k} \mathbf{E}\big( Y_j^2Y_k^2 - \mathbf{E}Y_j^2\mathbf{E}Y_k^2 \big) \Big| \le \sum_{r=2}^{9} \sum_{j,k} |S_{jk}^{(r)}| + \sum_{jk} |\psi_{jk}^{(1)}| + \sum_{j,k} |\psi_{jk}^{(3)}|.$$

Далее,

$$\sum_{j,k} |\psi_{jk}^{(1)}| \le C\mathcal{L}^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

и, наконец,

$$\sum_{j,k} |\psi_{jk}^{(3)}| = \sum_l \sum_s (A_{l,s}^2)^2 = \|A^{(n)^2}\|_2^2.$$

В силу неравенства $\|(A^{(n)})^2\|^2 \le |\lambda_1^{(n)}|^2 \|A^{(n)}\|_2$, условия (17) и равенства $\|A^{(n)}\|_2 = 1$ имеем

$$\sum_{j,k} |\psi_{jk}^{(3)}| \to 0.$$

Таким образом, из теоремы 3 следует, что для последовательностей квадратичных форм от ограниченных случайных величин имеет место центральная предельная теорема.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть

$$X_j^M = X_j \mathbf{I}_{\{|X_j| \le M\}} - \mathbf{E} X_j \mathbf{I}_{\{|X_j| \le M\}};$$

$$\bar{X}_j^M = X_j \mathbf{I}_{\{|X_j| > M\}} - \mathbf{E} X_j \mathbf{I}_{\{|X_j| > M\}}.$$

Очевидно, что $|X_j^M| \le 2M$ и $X_j = X_j^M + \bar{X}_j^M$. Представим $Q_n$ в виде

$$Q_n = Q_n^M + \overline{Q}_n^M + 2\widetilde{Q}_n^M,$$

где

$$Q_n^M = \sum a_{jl} X_j^M X_l^M;$$

$$\overline{Q}_n^M = \sum a_{jl}^{(n)} \overline{X}_j^M \overline{X}_l^M;$$

$$\widetilde{Q}_n^M = \sum a_{jl} X_j^M \overline{X}_l^M.$$

Заметим, что если выполнено условие (3.10), то

$$\mathbf{E}(\overline{Q}_n^M)^2 = 2\sigma_n^{-2} \sum_{j,l} a_{jl}^2 \mathbf{E} \bar{X}_j^{M^2} \mathbf{E} \overline{X}_l^{M^2} \longrightarrow 0 \text{ при } M \to \infty$$

равномерно по $n \ge 1$.

Аналогично

$$\mathbf{E}(\widetilde{Q}_n^M)^2 = 2\sigma_n^{-2} \sum_{j,l} a_{jl}^2 \mathbf{E}(X_j^M)^2 \mathbf{E}(\bar{X}_l^M)^2 \longrightarrow 0 \text{ при } M \to \infty$$

равномерно по $n \ge 1$. Отсюда следует, что

$$\frac{\sigma_n^2(M)}{\sigma_n^2} \longrightarrow 1 \text{ при } M \to \infty$$

равномерно по $n \geq 1$. В силу леммы

$$\mathbf{P}\{Q_n(M)/\sigma_n(M) < x\} \longrightarrow \Phi(x) \text{ при } n \to \infty$$

для любого фиксированного $M$. Выбирая $M$ столь большим, чтобы

$$\left|\frac{\sigma_n^2(M)}{\sigma_n^2} - 1\right| < \varepsilon \text{ для всех } n \geq 1;$$

$$\mathbf{P}\{|\overline{Q}_n(M)/\sigma_n| > \varepsilon\} \leq \varepsilon/2 \text{ для всех } n \geq 1;$$

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{Q}_n(M)/\sigma_n| > \varepsilon\} \leq \varepsilon/2 \text{ для всех } n \geq 1.$$

мы получим, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$|\mathbf{P}\{Q_n/\sigma_n < x\} - \Phi(x)| < \varepsilon.$$

Т.е.

$$\mathbf{P}\{Q_n/\sigma_n < x\} \longrightarrow \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, теорема доказана полностью.

## 4. Центральная предельная теорема для обобщенных $U$–статистик.

Рассмотрим статистики вида

$$U_2 = \sum_{1 \leq l \neq j \leq k_n} g_{lj}(X_l, X_j).$$

Относительно функций $g_{lj}(X_l, X_j)$ будем предполагать, что

$$
\begin{array}{ll}
(a) & g_{lj}(X_l, X_j) = g_{jl}(X_j, X_l); \\
(b) & \mathbf{E}\big(g_{lj}(X_l, X_j)|X_j\big) = 0; \\
(c) & \sigma_{lj}^2 = \mathbf{E}g_{lj}^2(X_l, X_j) < \infty, \ \sigma_n^2 = 2\sum_{l,j} \sigma_{lj}^2; \\
(d) & \max_{1 \leq l,j} \sigma_{lj}^{-2}\mathbf{E}g_{lj}(X_l, X_j)\mathbf{I}_{\{|g_{lj}(X_l,X_j)|>M\}} \longrightarrow 0 \text{ при } M \to \infty; \\
(e) & \sigma_n^{-2}\sum_{l \neq j}\mathbf{E}\Big|\sum_k g_{lk}(X_l, X_k)g_{jk}(X_j, X_k)\Big|^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty; \\
(f) & \sigma_n^{-2}\max_j \sum_k \sigma_{jk}^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.
\end{array}
$$

Имеет место следующая теорема

**Теорема 7.** *Если выполнены условия* $(a)$ -$(f)$, *то*

$$\mathbf{P}\{U_2/\sigma_n < x\} \longrightarrow \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

**Доказательство теоремы.** Для применения теоремы 3 определим последовательность

$$S_{nj} = \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j} g_{kl}(X_k, X_l).$$

Положим

$$Y_j = 2 \sum_{k=1}^{k_n} g_{jk}(X_j, X_k).$$

Нетрудно видеть, что

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_n} Y_j, \qquad \Delta_{nj} = Y_j \sigma_n^{-1}.$$

Покажем, что выполнены условия 1)-3) теоремы 3. Проверим условие 1). Имеет место очевидное равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y_j e^{itS_{nj}\sigma_n^{-1}} &= 2 \sum_{l=1}^{k_n} \mathbf{E} g_{lj}(X_l, X_j) e^{itS_{nj}\sigma_n^{-1}} \\ &= 2 \sum_{l=1}^{k_n} \mathbf{E} e^{itS_{nj}\sigma_n^{-1}} \mathbf{E}\Big\{ g_{lj}(X_l, X_j) \Big| X_l \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство очевидным образом влечет условие 1). Рассмотрим теперь условия 2) и 3). Предположим сначала, что

$$\sigma_{lj}^{-1} |g_{lj}(X_l, X_j)| \leq M.$$

Как и в случае квадратичных форм, введем обозначения

$$\mathcal{L}_j = \sum_{l=1}^{k_n} \sigma_{lj}^2, \quad \mathcal{L} = \max_{1 \leq j \leq n} \mathcal{L}_j.$$

Применяя неравенство Розенталя к суммам условно независимых величин, получим

$$\sigma_n^{-3} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}|Y_{nj}|^3 \leq \sigma_n^{-3} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big[ \sum_{l \neq j} \mathbf{E}(|g_{lj}(X_l, X_j)|^3 | X_j)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \left(\sum_{l\neq j} \mathbf{E}(|g_{lj}(X_l, X_j)|^2|X_j)\right)^{3/2}\Bigg] \\
&\leq \quad M\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{l}\sigma_{lj}^3 \\
&+ \quad \sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left(\sum_{l\neq j}\mathbf{E}(|g_{lj}(X_l, X_j)|^2|X_j)\right)^{3/2}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в силу равенства $\sigma_n^2 = \sum\limits_{k,l}\sigma_{kl}^2$ и условия $(f)$, мы имеем соотношение

$$
\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{l}\sigma_{lj}^3 \leq \sigma_n^{-1}\max_j\left(\sum_l \sigma_{lj}^2\right)^{1/2} = \mathcal{L}\sigma_n^{-1} \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{-3} &\quad \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left(\sum_{l\neq j}\mathbf{E}\big(g_{lj}^2(X_l, X_j)|X_j\big)\right)^{3/2} \\
\leq &\quad \sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}^{3/4}\left(\sum_{l\neq j}\mathbf{E}\big(g_{lj}^2(X_l, X_j)|X_j\big)\right)^{2} \\
= &\quad \sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}^{3/4}\left[\sum_{l\neq j}\sum_{k\neq j}\mathbf{E}\big(g_{lj}^2(X_l, X_j)|X_j\big)\mathbf{E}\big(g_{kj}^2(X_k, X_j)|X_j\big)\right]^{3/4} \\
= &\quad \sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\left[\sum_{l\neq j}\sum_{k\neq j}\mathbf{E}g_{lj}^2(X_l, X_j)\mathbf{E}\big(g_{kj}^2(X_k, X_j)|X_j\big)\right]^{3/4} \\
\leq &\quad M^{3/2}\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\left[\sum_{l\neq j}\sum_{k\neq j}\sigma_{kj}^2\sigma_{lj}^2\right]^{3/4} \\
\leq &\quad M^{3/2}\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\mathcal{L}_j^3 \\
\leq &\quad M^{3/2}\sigma_n^{-1}\mathcal{L} \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}|Y_j|^3 \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty,
$$

и условие 2) выполнено. Совершенно аналогично показывается, что

$$\sigma_n^{-4} \sum_{j,k} \mathbf{E}|Y_{jk}|^4 \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.1}$$

Перейдем теперь к проверке условия 3). Рассмотрим

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{N}(Y_j^2 - \mathbf{E}Y_j^2)\right]^2 = \sum_{k\neq l}(\mathbf{E}Y_k^2Y_l^2 - \mathbf{E}Y_k^2\mathbf{E}Y_l^2) + \sum_{k=1}^{k_n}\Big(EY_k^4 - (\mathbf{E}Y_k^2)^2\Big).$$

В силу соотношения (1) вторая сумма в правой части последнего равенства стремится к нулю, и нам достаточно исследовать только первую сумму. Представим $Y_k$ и $Y_l$ в виде

$$\begin{aligned} Y_k &= Y_{kl} + 2g_{kj}(X_k, X_l), \quad Y_{kl} = 2\sum_{s\neq l} g_{ks}(X_k, X_s); \\ Y_l &= Y_{lk} + 2g_{kl}(X_k, X_l), \quad Y_{lk} = 2\sum_{r\neq k} g_{lr}(X_l, X_r). \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, мы получим равенство

$$\mathbf{E}Y_k^2Y_l^2 = \mathbf{E}Y_{kl}^2Y_{lk}^2 + U_{kl}^2,$$

где

$$U_{kl}^2 = \sum_{s=1}^{8} U_{kls}^2;$$

$$\begin{aligned} U_{kl,1}^2 &= 2\mathbf{E}g_{kl}(X_k, X_l)Y_{kl}Y_{lk}^2, \quad U_{kl,2}^2 = \mathbf{E}g_{kl}^2(X_k, X_l)Y_{lk}^2, \\ U_{kl,3}^2 &= 2\mathbf{E}Y_{kl}^2g_{kl}(X_k, X_l)Y_{lk}, \quad U_{kl,4}^2 = 4\mathbf{E}g_{kl}^2(X_k, X_l)Y_{kl}Y_{lk}, \\ U_{kl,5}^2 &= 2\mathbf{E}g_{kl}^3(X_k, X_l)Y_{lk}, \quad U_{kl,6}^2 = \mathbf{E}g_{kl}^2(X_k, X_l)Y_{kl}^2, \\ U_{kl,7}^2 &= 2\mathbf{E}g_{kl}^3(X_k, X_l)Y_{kl}, \quad U_{kl,8}^2 = \mathbf{E}g_{kl}^4(X_k, X_l). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$U_{kl,1}^2 \leq CM\sigma_{kl}\mathbf{E}^{1/2}Y_{kl}^2\mathbf{E}^{1/2}Y_{kl}^4 \leq \sigma_{kl}\mathcal{L}_k\mathcal{L}_l^2. \tag{4.2}$$

Далее,

$$U_{kl,2}^2 \leq M^2\sigma_{kl}^4. \tag{4.3}$$

Аналогично неравенству (4.1) получим, что

$$U_{kl,3}^2 \le CM\sigma_{kl}\mathcal{L}_k^2\mathcal{L}_l. \tag{4.4}$$

Для величины $U_{kl,4}^2$ получим неравенство

$$U_{kl,4}^2 \le CM^2\mathbf{E}^{1/2}Y_{kl}^2\mathbf{E}^{1/2}Y_{lk}^2 \le CM^2\sigma_{kl}^2\mathcal{L}_k\mathcal{L}_l. \tag{4.5}$$

Кроме того имеют место неравенства

$$U_{kl,5}^2 \le CM^3\sigma_{kl}^3\mathcal{L}_l, \quad U_{kl,7}^2 \le CM^3\sigma_{kl}^3\mathcal{L}_l \tag{4.6}$$

Очевидно, что

$$U_{kl,6}^2 \le M^2\sigma_{kl}^4, \qquad U_{kl,8}^2 \le M^2\sigma_{kl}^4. \tag{4.7}$$

Поскольку

$$\sigma_n^{-4}\sum_{k,l}\sigma_{kl}^4 \le \sigma_n^{-2}\mathcal{L}^2 \to 0,$$

неравенства (4.2)-(4.7) влекут, что

$$\sum_{r=1}^{8}\sum_{k,l}U_{kl,r}^2 \to 0.$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y_{kl}^2Y_{lk}^2 &= \sum_{\substack{j,j_1\\ j\neq l\\ j_1\neq l}}\sum_{\substack{q,q_1\\ q\neq l\\ q_1\neq l}}\mathbf{E}g_{kj}(X_k,X_j)g_{kj_1}(X_k,X_{j_1})g_{lq}(X_l,X_q)g_{lq_1}(X_l,X_{q_1})\\
&= \sum_{\substack{j,q\\ j\neq l\\ q\neq k}}\mathbf{E}g_{kj}^2(X_k,X_j)g_{lq}^2(X_l,X_q)\\
&+ 2\sum_{\substack{j,q\\ q\neq k\\ j\neq l}}\mathbf{E}g_{kj}(X_k,X_j)g_{kq}(X_k,X_q)g_{lj}(X_l,X_j)g_{lq}(X_l,X_q)\\
&= 2\mathbf{E}\left[\sum_j g_{kj}(X_k,X_j)g_{lj}(X_l,X_j)\right]^2 + \sum_{j,q}\sigma_{kj}^2\sigma_{lq}^2 - V_1,
\end{aligned}$$

где

$$V_1 = \sum_{j:\,j\neq l}\sigma_{kj}^2\sigma_{lk}^2 + \sum_{q:\,q\neq k}\sigma_{kl}^2\sigma_{lq}^2.$$

Поскольку

$$\mathbf{E}Y_{kl}^2\mathbf{E}Y_{lk}^2 = \sum_j \sum_q \sigma_{kj}^2 \sigma_{lq}^2,$$

то в силу условия (f) и полученных выше соотношений

$$\sigma_n^4 \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{k_n} (Y_j^2 - \mathbf{E}Y_j^2)\right]^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема доказана для случая $|g_{jk}(X_j, X_k)| \leq M\sigma_{jk}$. Общий случай доказывается совершенно аналогично доказательству для квадратичных форм. Введем в рассмотрение функции

$$g_{jk}^{(M)}(x,y) = \begin{cases} g_{jk}(x,y), \text{ если } |g_{jk}| \leq M\sigma_{jk} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Далее, положим

$$\widehat{g}_{jk}^{(M)}(x,y) = g_{jk}(x,y) - g_{jk}^{(M)}(x,y).$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) &= g_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) - \mathbf{E}\Big( g_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) \,\Big|\, X_k \Big) \\ &- \mathbf{E}\Big( g_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) \,\Big|\, X_j \Big) + \mathbf{E}g_{jk}^{(M)}(X_j, X_k). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\Big( \widetilde{g}_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) \,\Big|\, X_j \Big) = \mathbf{E}\Big( \widetilde{g}_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) \,\Big|\, X_k \Big) = 0.$$

Положим $\widetilde{U} = \sum_{j,k=1}^{k_n} \widetilde{g}_{jk}^{(M)}(X_j, X_k)$ и $(\sigma_n^{(M)})^2 = \mathbf{E}\widetilde{U}^2$. В силу доказанного для любого $M > 0$ имеет место

$$\sigma_n^{(M)} \to \sigma_n, \quad \text{при } M \to \infty,$$

равномерно по $n \geq 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \widehat{U}^{(M)} &= \sum_{j,k=1}^{k_n} \widehat{g}_{kj}^{(M)}(X_k, X_j) \to 0, \\ \overline{U}^{(M)} &= \sum_{j,k=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big( g_{jk}^{(M)}(X_j, X_k) \Big|\, X_j \Big) \to 0, \end{aligned}$$

равномерно по $n \geq 1$ при $M \to \infty$. Поскольку

$$U = \widetilde{U}^{(M)} + \widehat{U}^{(M)} - \overline{U}^{(M)},$$

выбирая $M$ столь большим, что $\sigma_n^{(M)}$ отличается от $\sigma_n$ на сколь угодно малую величину, $\widehat{U}^{(M)}$ и $\overline{U}^{(M)}$ сколь угодно малы и переходя к пределу по $n$, мы получим, что

$$\mathbf{P}\Big\{\, \sigma_n^{-1} U < x \,\Big\} \to \Phi(x).$$

Теорема доказана полностью.

**Замечание 1.** Различные условия применимости центральной предельной теоремы для обобщенных $U$-статистик были получены в работе Йонга ([8]).

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что в случае квадратичных форм, $g_{jk}(X_j, X_k) = a_{jk} X_j X_k$ условие $(e)$ эквивалентно условию (3.2).

**5. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для $U$-статистик.** Введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
\delta_n(t) &= 1/2\sigma_n^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E} Y_j \frac{e^{itY_j\sigma_n^{-1}} - 1}{it} - 1, \\
\varepsilon_n(t) &= \sigma_n^{-1} \mathbf{E} \Big| \sum_{j=1}^{k_n} Y_j (e^{Y_j \sigma_n^{-1}} - 1) - \mathbf{E} Y_j (e^{itY_j\sigma_n^{-1}} - 1) \Big|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_n^{(1)} &= \sigma_n^{-3} \sum_{j,k=1}^{k_n} \mathbf{E}|g_{kj}(X_k, X_j)|^3, \qquad \Gamma_n^{(2)} = \sigma_n^{-4} \sum_{j,k=1}^{k_n} \mathbf{E}|g_{kj}(X_k, X_j)|^4, \\
\Gamma_n^{(3)} &= \sigma_n^{-4} \sum_{j,k=1}^{k_n} \mathbf{E}| \sum_{l=1}^{k_n} g_{kl}(X_k, X_l) g_{j,l}(X_j, X_l)|^2, \\
\Gamma_n^{(4)} &= \sigma_n^{-4} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big( \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}\{\, g_{jk}^2(X_j, X_k) \,|X_j \,\} \Big)^2.
\end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.** *Найдется постоянная $C > 0$, такая что*

$$\sup_x |\mathbf{P}\Big\{\, \sigma_n^{-1} U_2 < x \,\Big\} - \Phi(x)| \leq C\Big( \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(3)} + \Gamma_n^{(4)} \Big)^{1/2}.$$

**Доказательство теоремы.** В пункте 4 было показано, что

$$|\delta(t)| \leq C|t|\sigma_n^{-3} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|Y_k|^3 \leq C|t|\Gamma_n^{(1)}. \tag{5.1}$$

Далее,

$$|\varepsilon_n(t)| \leq |t|^2\sigma_n^{-3} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}|Y_j|^3 + |t|\sigma_n^{-2}\mathbf{E}\Big| \sum_{j=1}^{k_n}(Y_j^2 - \mathbf{E}Y_j^2) \Big|. \tag{5.2}$$

Будем теперь оценивать величину

$$D_n^2 = \sigma_n^{-4}\mathbf{E}\Big| \sum_{j=1}^{k_n}(Y_j^2 - \mathbf{E}Y_j^2) \Big|^2. \tag{5.3}$$

Очевидно, что

$$D_n^2 \leq D_{n1}^2 + D_{n2}^2, \tag{5.4}$$

где

$$D_{n1}^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}Y_j^4, \qquad D_{n2}^2 = \sum_{j \neq l}(\mathbf{E}Y_j^2 Y_l^2 - \mathbf{E}Y_j^2\mathbf{E}Y_l^2).$$

Применяя неравенство Розенталя, мы получим

$$\begin{aligned} D_{n1}^2 \;&\leq\; C\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big( \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}\big(\, |g_{jk}(X_j, X_k)|^4 \big|\, X_j\,\big) \\ &+\; \Big( \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}\big(\, |g_{jk}(X_j, X_k)|^2 \big|\, X_j\,\big) \Big)^2 \Big) \end{aligned}$$

Продолжая это неравенство, мы получим, что

$$\begin{aligned} D_{n1}^2 \;&\leq\; C\Big( \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big( \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}\big(\, |g_{jk}(X_j, X_k)|^2 \big|\, X_j\,\big) \Big)^2 \\ &+\; \sum_{j=1}^{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|g_{jk}(X_j, X_k)|^4 \leq C\Big(\Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(4)}\Big). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Для оценки $D_{n2}^2$ воспользуемся представлением, описанным в предыдущем пункте:

$$D_{n2}^2 = \sum_{k \neq l}\big(\, \mathbf{E}Y_{kl}^2 Y_{lk}^2 - \mathbf{E}Y_k^2\mathbf{E}Y_l^2\big) + \sum_{k \neq l} U_{kl}^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{k,l=1}^{k_n} U_{kl,1}^2$$

$$= \sum_{k,l=1}^{k_n} \sum_{p\neq l, q\neq k, r\neq k} \mathbf{E} g_{kl}((X_k, X_l) g_{k,p}(X_k, X_p) g_{lp}(X_l, X_q) g_{l,r}(X_l, X_r)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{k_n} \sum_{p\neq l} \mathbf{E} g_{kl}(X_k, X_l) g_{k,p}(X_k, X_p) g_{l,p}^2(X_l, X_p).$$

Используя неравенство $|ab| \leq 1/2(a^2+b^2)$ получим, что

$$\sum_{k,l=1}^{k_n} U_{kl,1}^2 \leq 2 \sum_{k,l=1}^{k_n} \sum_{p\neq l} \mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) g_{l,p}^2(X_l, X_p)$$

$$\leq 2 \sum_{l=1}^{k_n} \mathbf{E}\Big( \sum_{p=1}^{k_n} \mathbf{E}\{ g_{lp}^2(X_l, X_p) \big| X_l \} \Big)^2 = C\Gamma_n^{(4)}. \quad (5.6)$$

Аналогично получим, что

$$\sum_{k,l=1}^{k_n} U_{kl,3}^2 \leq C\Gamma_n^{(4)}. \quad (5.7)$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$\sum_{k,l=1}^{k_n} \mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) Y_k^2 = \sum_{k,l} \sum_{r} \mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) g_{kr}^2(X_k, X_r) \leq C\Gamma_n^{(4)}. \quad (5.8)$$

Неравенство (5.8) влечет, что

$$\sum_{k,l} (U_{kl,2}^2 + U_{kl,6}^2) \leq C\Gamma_n^{(4)}.$$

Поскольку

$$|\mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) Y_{kl} Y_{lk}| \leq \mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) Y_k^2 + \mathbf{E} g_{kl}^2(X_k, X_l) Y_l^2 + \mathbf{E} g_{kl}^4(X_k, X_l). \quad (5.9)$$

Кроме того,

$$\mathbf{E} g_{kl}^3(X_k, X_l) Y_{kl} = \mathbf{E} g_{kl}^3 Y_{lk} = 0. \quad (5.10)$$

Неравенства (5.6) - (5.10) влекут, что

$$\sum_{r=1}^{8}\sum_{k,l} U_{kl,r}^2 \le C(\Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(4)}).$$

Перейдем теперь к оценке величины

$$\widetilde{D}_{n2}^2 = \sum_{k\neq l}( \mathbf{E}Y_{kl}^2Y_{lk}^2 - \mathbf{E}Y_k^2\mathbf{E}Y_l^2).$$

В предыдущем пункте было показано, что

$$D_{n2}^2 \le 2\sum_{k,l}\Big[\sum_j g_{kj}(X_k,X_j)g_{lj}(X_l,X_j)\Big]^2 = 2\Gamma_n^{(3)}. \qquad (5.11)$$

Соотношения (5.1)-(5.4) и неравенства (5.5) и (5.11) влекут, что

$$|\varepsilon(t)| \le C\Big( |t|^2\Gamma_n^{(1)} + |t|\big( \Gamma_n^{(3)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{4)} \big)^{1/2}\Big).$$

Не умаляя общности будем считать, что $\Gamma_n^{(1)} \le 1$. В противном случае результат верен, поскольку $\sup_x|\mathbf{P}\{\sigma_n^{-1}U_2 < x\} - \Phi(x)| \le 1$. Выберем $T = \left(\Gamma_n^{(1)}\right)^{1/2}$ и применим теорему 2. Тогда мы получим, что

$$\sup_x|\mathbf{P}\Big\{ \sigma_n^{-1}U_2 < x \Big\} - \Phi(x)| \le C_1\Big( \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(3)} + \Gamma_n^{(4)} \Big)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

## Литература

1. **Бакиров Н.К.** Центральная предельная теорема для слабо зависимых величин// *Мат. заметки. 1987. Том 41, N 1. Стр.104-109*

2. **Булинский А.В.** Скорость сходимости в центральной поредельной теореме для полей ассоциированных случайных величин// *Теория вероятн. и применен. 1995. Т.40. Вып.1. Стр. 165-174*

3. **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** Независимые и стационарно связанные величины. // *М.: Наука, 1965. 524с.*

4. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. // *М.: Наука, 1987. 318 с.*

5. **Сунклодас Й.** Аппроксимация распределений сумм слабо зависимых величин нормальным распределением// *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1995. Т. 81. С.140-183*

6. **Тихомиров А.Н.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин// *Теория вероятн. и примен. 1980. Том 25, вып.4. Стр.800-818*

7. **Тихомиров А.Н.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин// *Вестник ЛГУ. Сер. Математ., механ., астроном. 1976. т.2. С.158-159*

8. **P. de Jong** A central limit theorems for generalized quadratic forms // *Probability theory, related fields. 1987. V. 75. P. 261-277*

9. **Stein Ch.** A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables// *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. 1970. V. 2. P. 583-602*

10. **Yoshihara K.-i.** The Berry-Esseen theorems for $U$-statistics generated by absolutely regular processes// *Yokohama mathemat. J. 1984. V. 32. P. 89-111*

**Summary**

**Tikhomirov A.N.** On the Central Limit Theorem

We give simple conditions, sufficient for the Central Limit Theorems for sequences of random variables to be valid, and also obtain a bound for the rate of convergence. These conditions do not include any explicit assumptions about independency or moments (only finiteness of means is required). As an application of the main results, we give simpler proofs of some known results for the sums and quadratic forms of independent and weakly dependent random variables. Also, we obtain sufficient conditions for the Central Limit Theorems for generalized $U$-statistics, and give a bound for the rate of convergence in terms of sums of moments of generating functions.

*Сыктывкарский университет*

*Поступила 01.10.2000*