О СОБСТВЕННО ТЕОРИИ ГРАФОВ И ЕЕ СОСТАВЕ

© А.А. Шилов

Shilov A.A. On the graph theory proper and its structure. The work underlines that existing textbooks on the graph theory cover mainly the quantitative definability of graphs and their content corresponds to the concept of the mathematical graph theory. The graph theory proper looks at the qualitative definability of graphs, i.e. their origin, existence and essence. The basic properties of graphs are a variety of their structure and an opportunity of usage for simulation of a system structure. In order to learn a variety of graphs it is necessary to order and systematize them. These tasks define the content of the graph theory proper. In the graph theory proper should be stated the following initial concepts: of graphs in general, their full enumeration, classification and systematization, their mathematical models, the system of terms, the link between the structure and function, a role and a place of the graph theory proper in scientific knowledge. The brief description of these concepts is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие о графе было создано математиками, и ими разрабатывается теория графов, как раздел чистой математики, излагающий преимущественно количественную определенность графов. Что касается качественной определенности графов, то она систематически не разрабатывалась [1].

С позиции философских категорий «качество» и «количество», качественная определенность графов есть то, что разграничивает их и делает понятие о графе устойчивым. Так граф становится данным, а не иным объектом, и отличается от других объектов. Понятие о качественной определенности связано с бытием графов и их сущностью. В силу этого возникает необходимость в систематической разработке качественной определенности графов. Теория, излагающая количественную определенность графов, больше соответствует понятию о математической теории графов. Что касается разработки качественной определенности, соответствующей по содержанию собственно теории графов, то по данной теме известны отдельные монографии [2, 3]. Однако этого недостаточно для получения общего представления о графах. Отставание в исследовании понятий о качественной определенности графов негативно отразилось на развитии теории графов в целом и на определении понятия о графе в частности.

Графы были получены из структурных схем исследуемых систем путем абстрагирования от их неструктурных свойств. Таким образом они служат моделями структуры рассматриваемых систем.

Графы в полной мере отражают строение исследуемых систем. Основным свойством графов является бесконечное разнообразие их структуры, соответствующее всем возможным вариантам строения систем. А основным назначением графов будет установление в исследуемых системах связи между структурными и функциональными свойствами с целью создания алгоритмов оптимального проектирования систем. Для этой цели необходимо хорошо ориентироваться в бесконечном разнообразии графов. Данную проблему и решает собственно теория графов, излагая следующие исходные понятия:

– общее понятие о графе;
– о полном перечислении графов;
– о классификации графов;
– о систематизации графов;
– о математических моделях графов;
– о связи структуры графов с их функциональными свойствами;
– о системе графовой терминологии;
– о роли и месте собственно теории графов в научном знании.

Такое содержание больше соответствует понятию о теории графов, как о системе обобщенного фундаментального знания.

В настоящей работе получили дальнейшее развитие исследования, проведенные, прежде всего, в области качественной определенности графов и опубликованные в статьях [4 – 6]. Знакомясь с ними, следует учитывать, что в процессе разработки этого материала некоторые понятия, термины и признаки, изложенные в предыдущих статьях, в последующих статьях изменялись или уточнялись.

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ГРАФЕ

Потребность введения понятия о графах возникла при решении задач, связанных со строением исследуемых систем. Если такая задача носит частный характер, то к описанию ее условий обычно прилагается структурная схема. Это делается потому, что текстовое описание строения системы получается, как правило, длинным и запутанным, а схематическое изображение ее строения воспринимается исследователем сразу и целиком. Структурная схема состоит из схематического изображения строения системы и из конкретных наименований составляющих ее элементов и отношений между ними. Когда такая задача решается в общем виде, то конкретные наименования элементов и их отношений исключаются из структурной схемы, а остается лишь схема, выражающая количество элементов и наличие отношений между ними. Такая схема и соответствует понятию о графе.

При этом предполагается, что в рассматриваемой системе имеет место наиболее распространенный вид отношений – отношения между парами элементов.

называемые бинарными (двухместными). Схема, изображающая бинарные отношения, называется бинарным графом. Если в схеме есть отношения одновременно между тремя элементами, то такая схема называется тернарным (трехместным) графом и т. д. Все эти схемы имеют общее название – «модели структур» (рис. 1).

В настоящей работе будут рассматриваться унарные (одноместные) и бинарные графы. Их строение соответствует строению подавляющего большинства систем, представляющих собой объекты природы и теоретического знания.

Два понятия, определяющие строение системы – «элемент» и «отношение» на схеме графа, представляются двумя видами символов – точкой и отрезком линии, которые в теории графов называются соответственно вершиной и ребром. Если на схеме графа элементу системы соответствует вершина, а отношению – ребро, то такой граф называется вершинным, а если на схеме элементу системы соответствует ребро, а отношению – вершина, то такой граф здесь называется реберным. В данной работе будут рассматриваться наиболее распространенные вершинные графы, хотя, например, в теории механизмов применяются реберные графы [4]. Таким образом, существующая теория графов – это теория бинарных вершинных графов, а теория реберных графов еще не разрабатывалась.

Бинарные вершинные графы, обладающие только структурными свойствами, называются ненагруженными или простыми. Графы, которые дополнительно наделены неструктурными свойствами, такими как ориентированность, взвешенность, помеченность, раскрашенность и т. д., называются нагруженными. Это фактически специализированные графы, приближающиеся по объему информации к структурным схемам. Структурные свойства графов удобно рассматривать в чистом виде на примере ненагруженных графов, поэтому в настоящей работе речь пойдет о бинарных вершинных ненагруженных графах, которые далее будут называться просто «графы».

Граф несет информацию только о строении системы, отвлекаясь от конкретной природы элементов и их отношений. Поэтому один и тот же граф может служить структурной основой для построения различных структурных схем путем присвоения его вершинам и ребрам конкретных наименований.

Граф является своеобразным высказыванием, у которого с лингвистической точки зрения вершины являются субъектами (подлежащими), а ребра – предикатами (сказуемыми). Субъекты могут существовать без предикатов, а предикаты без субъектов существовать не могут. Например, в известной задаче Эйлера о кенигсбергских мостах участки суши могут существовать без мостов, но не наоборот. Так выявляется подчиненность понятий об элементе и отношении и, соответственно, о вершине и ребре. Вершины соответствуют элементам системы, а ребра выражают собой свойство вершин иметь отношения.

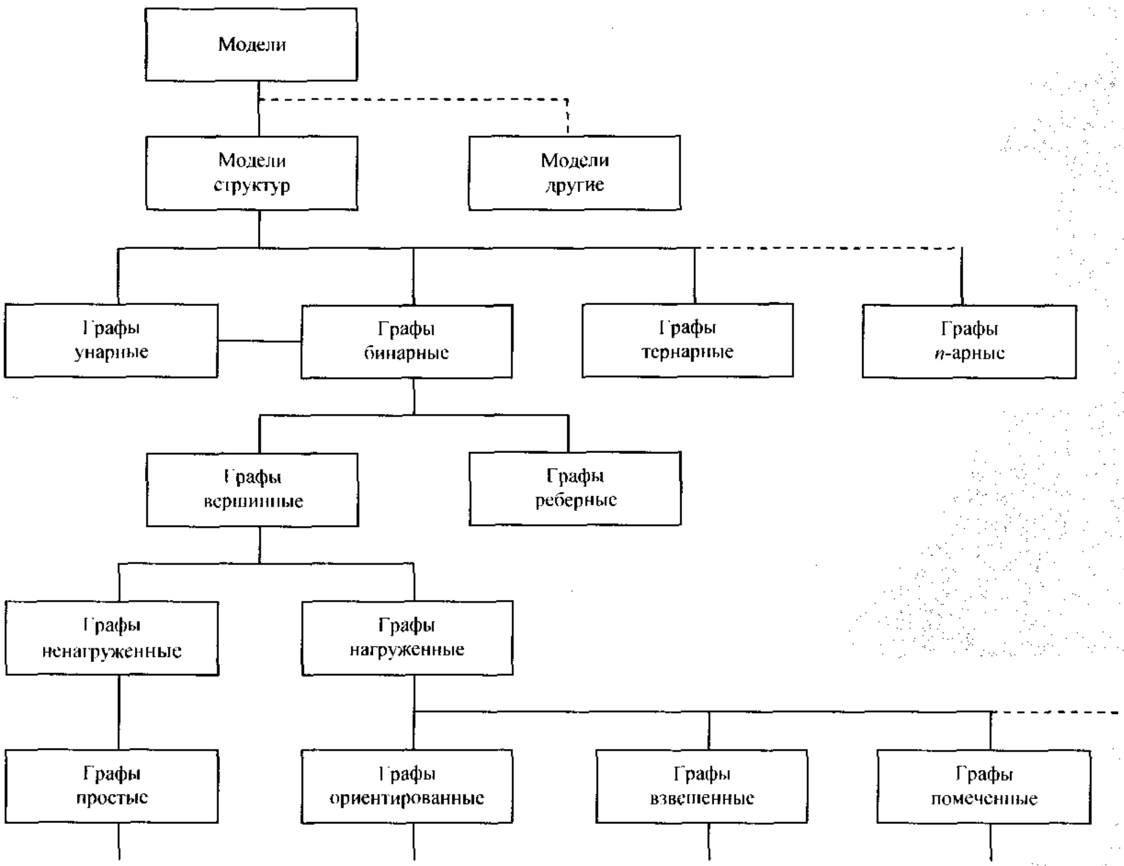


Рис. 1. Исходная классификация графов

В настоящей работе граф представляется объектом, производным от понятий о системе и о ее структурной схеме. Он строится с использованием понятия о валентности (степени) вершин, служащей предпосылкой для установления отношений между ними. Так, например, в экономическое отношение не могут вступить объекты, заранее не обладающие соответствующими ресурсами. Под валентностью вершины понимается число отношений (связей), которые данная вершина может установить с другими вершинами и (или) сама с собой. На схеме валентная вершина изображается в виде точки, из которой исходят отрезки линий, называемые полуребрами. Число полуребер определяет на схеме валентность вершины. Свободные концы двух полуребер, соединяясь, образуют цельное ребро, как символ наличия отношения у этой пары вершин. Полуребро соответствует единице валентности вершины.

Понятие о полуребре не ново. Известно математическое выражение, в котором удвоенное число ребер графа равно сумме степеней (валентностей) его вершин: $2q=\sum d_i$ [5]. Отсюда удвоенное число ребер равно числу половинок ребер и валентности графа. Если указанную сумму валентностей вершин представить как разбиение числа, то валентность графа будет соответствовать величине этого разбиения.

Под разбиением понимается представление целого положительного числа в виде суммы целых положительных чисел. Эти числа называются частями разбиения, а их сумма – величиной разбиения. Принимая во внимание существование невалентных вершин, дополнительно вводится еще одна часть разбиения – ноль. Разбиение можно записать в краткой форме – без знаков сложения и без повторения одинаковых по величине частей разбиения. Их количество выражается числом, поставленным при соответствующей части разбиения вверху в виде индекса. Тогда все разбиения можно представить в виде общей формулы, состоящей из чисел натурального ряда, записанных в обратном порядке с соответствующими индексами: $P=N^{r_n}\dots 3^{r_3}\,2^{r_2}\,1^{r_1}\,0^{r_0}$. Здесь r_n – количество частей разбиения, одинаковых по величине.

Величина разбиения равна количеству полуребер, имеющихся у графа. Часть разбиения соответствует вершине графа. Величина части разбиения идентична валентности вершины. Величина индекса равна числу вершин одинаковой валентности. Само разбиение тождественно комплекту вершин, из которых синтезируются один или несколько изомерных графов. Изомерными называются графы различного строения, синтезированные из одного и того же комплекта вершин. Характер отношений между вершинами у каждого из этих графов математически определяется с помощью матрицы отношений, построенной на этом разбиении. В ней строки и столбцы обозначены валентными частями разбиения.

Граф, представленный в виде схемы, – это модель структуры, состоящая из вершин определенной валентности, между парами которых с помощью объединения полуребер установлены отношения. При этом вершины занимают на схеме произвольное положение, а ребра представляются безразмерными и могут быть любой формы, кроме формы с самопересечением.

Таким образом, граф несет информацию только о числе вершин и о бинарных отношениях между их парами или (и) об отношениях вершин самих с собой, что соответствует унарным отношениям.

В соответствии с понятием о валентных вершинах здесь образуется понятие и о валентных графах. Граф, синтезированный из валентных вершин, называется валентным. Вершина, имеющая нулевую валентность, именуется невалентной. Граф, состоящий только из невалентных вершин, назван невалентным. Граф, состоящий из невалентных и валентных вершин, определен как смешанный. Это первое и самое общее разделение всех графов на три типа.

Набор графов, полученный при полном их перечислении, охватывает все без исключения варианты строения структурных схем всех существующих и вновь создаваемых систем. Бесконечное разнообразие строения графов является одним из основных свойств, которое определяет состав теории графов. Так, ее главной задачей является упорядочение валентных графов, выявление их структурных и функциональных свойств, построение их математических моделей.

3. ПОЛНОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАФОВ

Для проведения эффективного исследования графы должны быть представлены во всем своем многообразии, т. е. должно быть осуществлено их полное перечисление. Поскольку графов бесконечно много, то приходится представлять их полное перечисление в заданном интервале числа вершин и величин валентности.

Задаемся числом вершин в пределах 1...12 и валентностью графа в пределах 2...12. Валентность выражается четными числами, т. к. она соответствует числу полуребер.

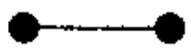
В настоящей работе полное перечисление валентных графов осуществляется путем полного перечисления комплектов с разным количеством вершин, имеющих различную валентность, а в этих комплектах – полного перечисления вариантов связей между вершинами. С этой целью каждой величине валентности графов приводится в соответствие величина разбиения. Для этой величины осуществляется полное перечисление разбиений, соответствующее перечислению вариантов из числа вершин и величины их валентностей. Для каждого такого варианта, представляющего собой комплект вершин, строятся матрицы, у которых строки и колонки обозначаются валентными частями разбиения. С помощью матриц осуществляется полный перебор вариантов связей между вершинами каждого комплекта.

Полное перечисление графов представлено в табл. 1, фрагмент которой приведен ниже. В нем цифра, стоящая на схеме возле ребра, указывает кратность отношений (ребер) между данной парой вершин. Так получается число валентных графов – 1389. Невалентных графов в заданных пределах числа вершин будет 12 (граф с одной невалентной вершиной, двумя, тремя и т. д.). Объединенные графы образуются из валентных графов путем поочередного прибавления к ним различного числа невалентных компонентов. Число таких графов равно 12 × 1389 = 16668. Всего простых графов – 1389 + 12 + 16668 = 18069.

Таблица 1

Полное перечисление разбиений и валентных графов (фрагмент)

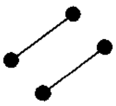
Величина разбиения	Разбиения	Разбиение	Комплект вершин графа	Количество изомерных графов		
				Односвязных	Многосвязных	Не- связных
m	№	P	C	S	M	I
$m = 2$	№1	$P=1^2$		S=1	M=0	I=0

S  1

$m = 2$	№2	P=2		S=0	M=1	I=0

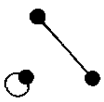
M  1

$m = 4$	№1	$P=1^4$		S=0	M=0	I=1

I  1

$m = 4$	№2	$P=21^2$		S=1	M=0	I=1

S  1

I  1

$m = 4$	№3	$P=2^2$		S=0	M=1	I=1

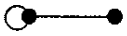
M 

1

I 1 

Продолжение таблицы 1

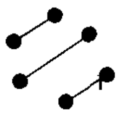
$m = 4$	№4	P=31		S=0	M=1	I=0

M  1

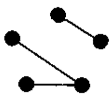
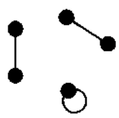
$m = 4$	№5	P=4		S=0	M=1	I=0

M  2 1

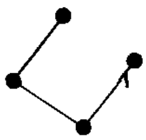
$m = 6$	№1	$P=1^6$		S=0	M=0	I=1

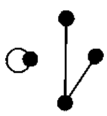
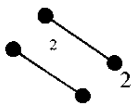
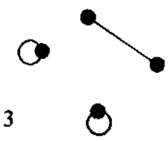
I 

$m = 6$	№2	$P=21^4$		S=0	M=0	I=2

I  1  2

$m = 6$	№3	$P=2^2_2 1$		S=1	M=0	I=3

S 

I  1  2  3

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

Бесконечное разнообразие строения графов затрудняет их освоение и исследование. Существенное облегчение в работе с графами даст их упорядочение в форме классификации. Предлагаемая классификация – это деление объема понятия о структурных свойствах графов путем установления признаков их сходства и различия. Классификация вносит определенность в понятие о конкретном графе.

Здесь рассматривается тот массив графов, который был получен при полном их перечислении. Вначале определяются обобщающие структурные признаки. Поскольку эти признаки обладают различными уровнями общности, то они располагаются последовательно в порядке ее уменьшения. Так, графы распределяются по группам в соответствии с их структурными свойствами. В результате большой массив графов делится последовательно на группы меньшего объема до тех пор, пока не останутся отдельные графы. На рис. 2 представлена классификация графов, которая из-за большого ее объема разделена на три части (см. рис. 2, *а*–*в*), что соответствует делению всего массива графов на невалентные, валентные и объединенные.

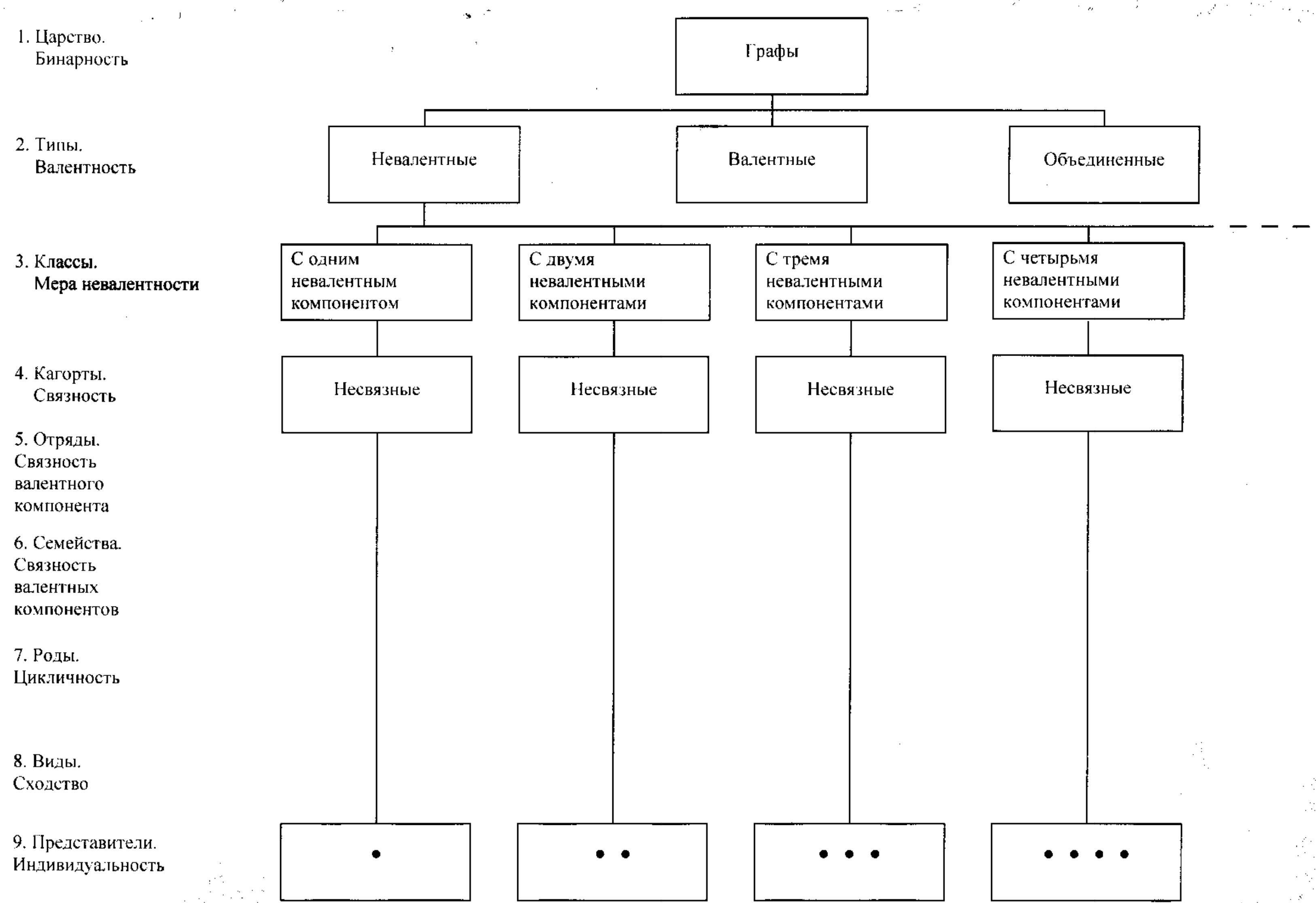

1. Царство.
Бинарность
2. Типы.
Валентность
3. Классы.
Мера невалентности
4. Кагорты.
Связность
5. Отряды.
Связность валентного компонента
6. Семейства.
Связность валентных компонентов
7. Роды.
Цикличность
8. Виды.
Сходство
9. Представители.
Индивидуальность
Графы
Невалентные
Валентные
Объединенные
С одним невалентным компонентом
С двумя невалентными компонентами
С тремя невалентными компонентами
С четырьмя невалентными компонентами
Несвязные
Несвязные
Несвязные
Несвязные

Рис. 2 а

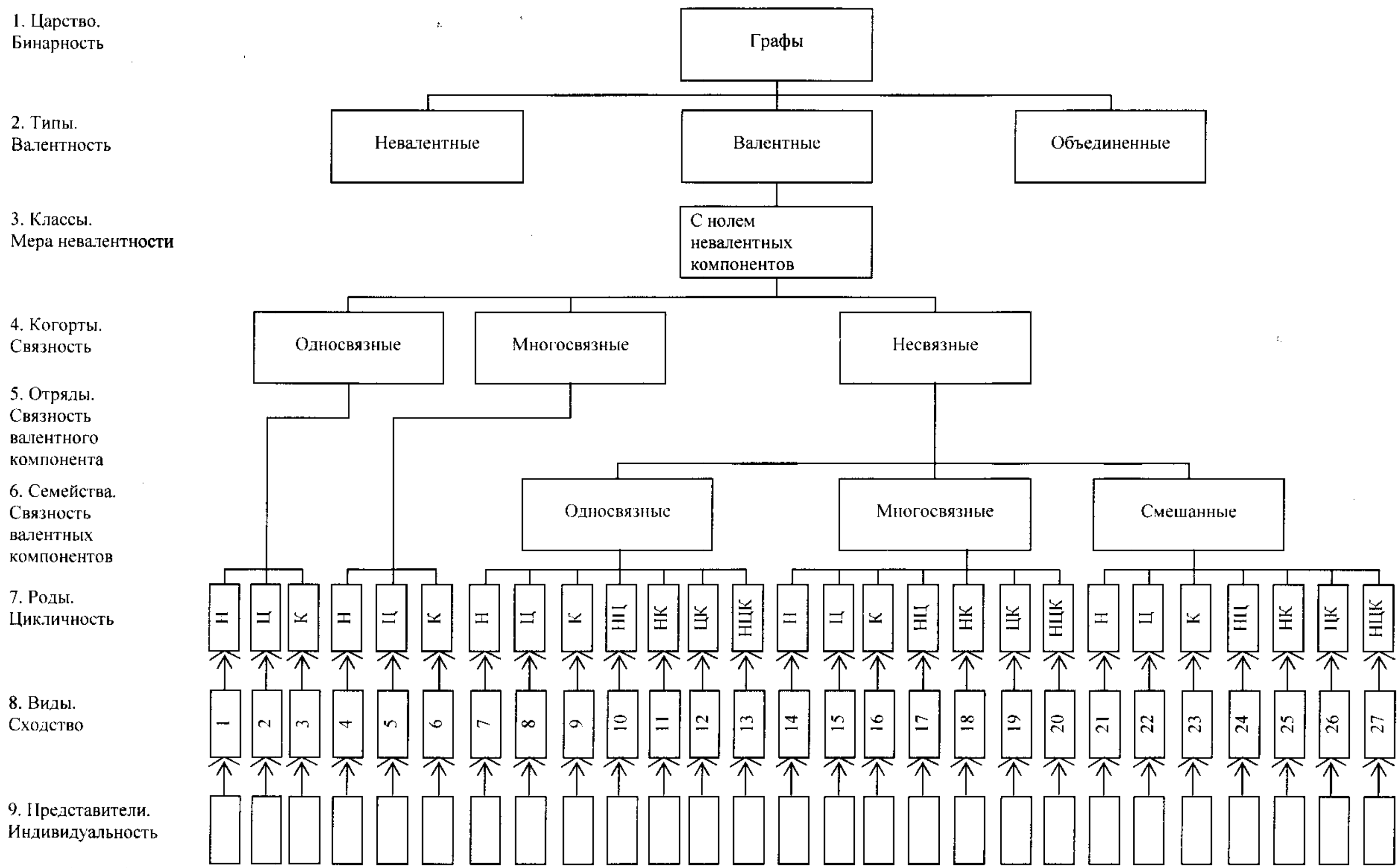

1. Царство.
Бинарность
2. Типы.
Валентность
3. Классы.
Мера невалентности
4. Когорты.
Связность
5. Отряды.
Связность
валентного
компонента
6. Семейства.
Связность
валентных
компонентов
7. Роды.
Цикличность
8. Виды.
Сходство
9. Представители.
Индивидуальность
Графы
Невалентные
Валентные
Объединенные
С нолем
невалентных
компонентов
Односвязные
Многосвязные
Несвязные
Односвязные
Многосвязные
Смешанные
Н
Ц
К
Н
Ц
К
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

Рис. 2 б

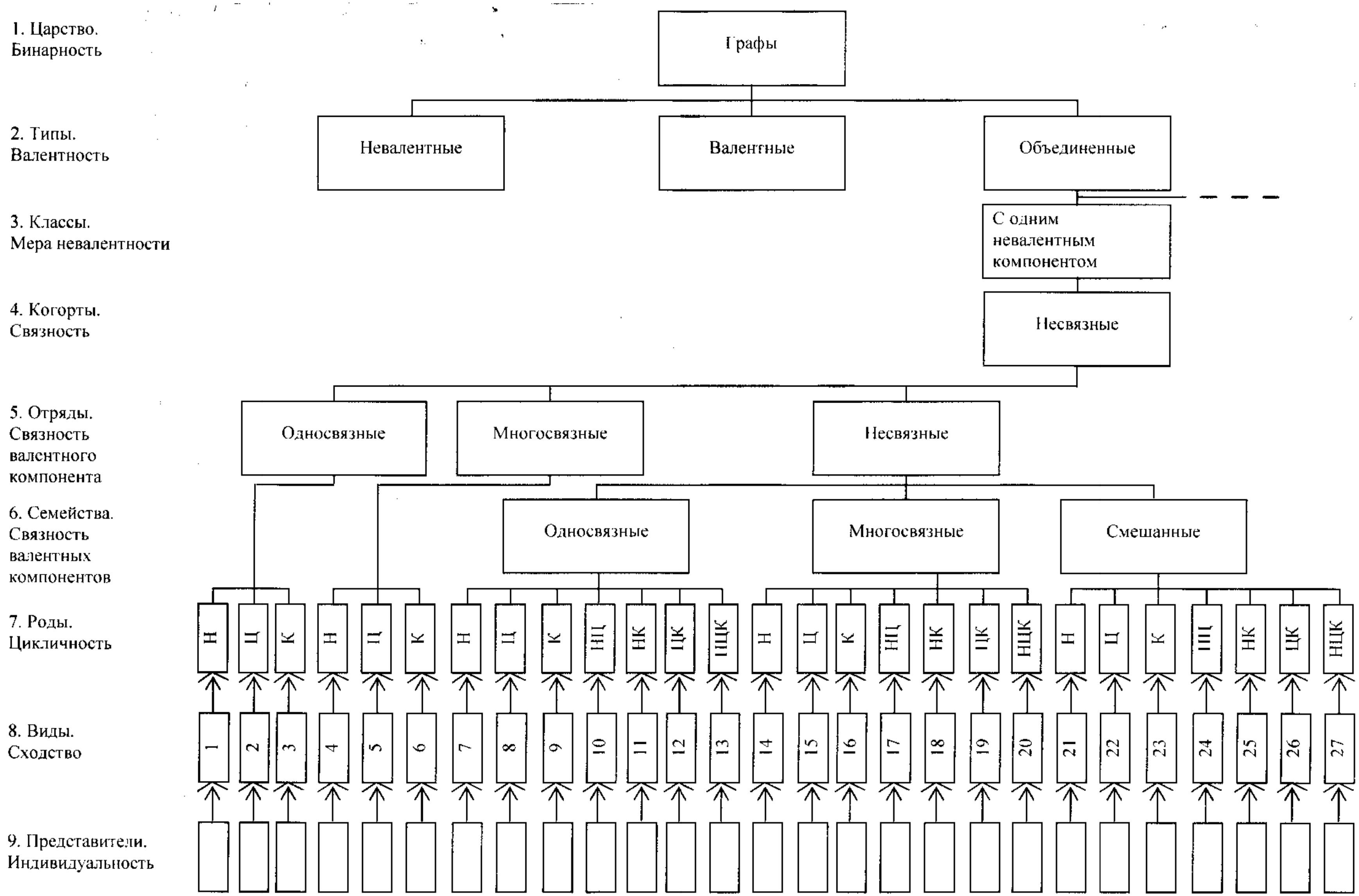

1. Царство.
Бинарность
2. Типы.
Валентность
3. Классы.
Мера невалентности
4. Когорты.
Связность
5. Отряды.
Связность валентного компонента
6. Семейства.
Связность валентных компонентов
7. Роды.
Цикличность
8. Виды.
Сходство
9. Представители.
Индивидуальность
Графы
Невалентные
Валентные
Объединенные
С одним невалентным компонентом
Несвязные
Односвязные
Многосвязные
Несвязные
Односвязные
Многосвязные
Смешанные
Н
Ц
К
Н
Ц
К
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
Н
Ц
К
НЦ
НК
ЦК
НЦК
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

Рис. 2 в

Первый уровень классификации называется «царство графов». Графы этого уровня (см. рис. 1) выделяются по признаку меры отношения между вершинами. Их обобщающим структурным признаком будет бинарность. Одновременно здесь рассматриваются и графы, имеющие отношение низшего порядка – унарные.

Второй уровень называется «типы графов». На этом уровне графы различаются по валентности вершин. Обобщающим признаком здесь будет валентность, и по этому признаку графы делятся на невалентные, валентные и объединенные.

Третий уровень называется «классы графов». На этом уровне графы различаются по числу невалентных вершин. Обобщающим признаком здесь будет мера невалентности, и по этому признаку графы делятся на графы с нолем невалентных компонентов, с одним невалентным компонентом, с двумя и т. д.

Четвертый уровень называется «когорты графов». На этом уровне графы различаются по мере связности вершин между собой. Обобщающим признаком здесь будет связность, и по этому признаку они делятся на несвязные, односвязные и многосвязные.

Пятый уровень называется «отряды графов». На этом уровне объединенные графы с одним валентным компонентом различаются по признаку связности вершин в этом компоненте. Обобщающим признаком здесь будет связность валентного компонента, и по этому признаку графы делятся на объединенные графы с многосвязным, односвязным и несвязным валентным компонентом. В последнем случае валентных компонентов будет не один, а несколько.

Шестой уровень называется «семейства графов». На этом уровне объединенные графы с несколькими валентными компонентами различаются по признаку связности этих компонентов на графы с многосвязными, односвязными и смешанными валентными компонентами.

Седьмой уровень называется «роды графов». На этом уровне валентные многосвязные и односвязные графы разделяются по конфигурации отношений между вершинами. Здесь обобщающим признаком будет цикличность. По этому признаку указанные графы делятся на нецикличные, цикличные и комбинированные, а валентные несвязные и объединенные графы разделяются на нецикличные, цикличные, комбинированные; нецикличные и цикличные, нецикличные и комбинированные, цикличные и комбинированные, нецикличные и цикличные и комбинированные.

Восьмой уровень называется «виды графов». На этом уровне графы каждого рода разделяются по признаку сходства отношений между вершинами на множество видов. Множественность видов объясняется тем, что графы, отнесенные к определенному роду, обладают множеством количественных и качественных структурных признаков низшего порядка и могут быть выделены по одному из них [4].

Девятый уровень называется «представители графов». На этом уровне графы разделяются по признаку индивидуальности отношений между вершинами на отдельные и единственные представители графов.

В данной классификации при движении вниз с уровня на уровень возрастает вовлеченность вершин во взаимные отношения. При этом снижается общность структурных признаков, и возрастает объем понятия о графе.

С помощью этой классификации можно построить точное название графа. Например, граф, имеющий форму треугольника, получит название «валентный, с нолем невалентных компонентов, односвязный, цикличный, одноцикловый, трехвершинный». Это позволяет выделить из бесконечного числа различных по строению графов один конкретный граф путем установления его качественной определенности.

Указанными здесь классификационными признаками обладают графы с любым большим числом вершин и любой величиной валентности. Однако в классификации не представлена количественная определенность графов, которая выражает закономерности связи между структурным свойством и отношением числа вершин к валентности графа. Это указывает на то, что классификация не является конечной операцией в процессе упорядочения графов.

5. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ГРАФОВ

Систематизация – это очередной шаг по упорядочению графов, которая для валентных графов осуществляется с помощью таблицы, названной «периодическая система валентных графов». Она устанавливает взаимосвязь между количественными свойствами разбиений, представленными в таблице полного перечисления графов, и качественными свойствами, представленными в классификации. Фрагмент периодической системы валентных графов показан в табл. 2. Принцип построения этой системы основан на свойстве разбиений чисел различной величины обладать сходным строением. Это, в свою очередь, связано со сходством строения графов, комплекты вершин которых соответствуют этим разбиениям.

В первой колонке табл. 2 перечисляются величины разбиений. Против них в строках перечисляются все варианты разбиения этой величины, которые располагаются в порядке последовательного возрастания величины частей разбиения. При этом число частей разбиения периодически изменяется в пределах от числа, равного величине разбиения до единицы. Таким образом, последовательно изменяется и отношение числа частей разбиения к величине разбиения, что соответствует у графов изменению отношения числа вершин к числу полуребер. В зависимости от изменения этого отношения изменяются и структурные свойства графов. Здесь видно, что по мере роста величины разбиения во всех нижеследующих строках образуются сходные разбиения. Например, у первого разбиения, находящегося в первой строке, во второй и нижележащих строках имеются сходные разбиения: 1^2, 1^4, 1^6, 1^8 и т. д., расположенные с левой стороны таблицы. Им соответствуют сходные по строению несвязные графы, состоящие из двухвершинных компонентов. У второго разбиения, находящегося в первой строке, в нижеследующих строках, справа за пределами данного фрагмента таблицы, имеются сходные разбиения: 2^1, 4^1, 6^1, 8^1 и т. д. Им соответствуют сходные по строению графы, напоминающие собой цветок с разным числом лепестков. В первом случае сходство разбиений наблюдается по частям разбиения, а во втором – по индексам. Оба множества разбиений образуют вилку, внутри которой располагаются остальные разбиения, имеющие сходство и по частям разбиения и по индексам.

Таблица 2

Периодическая система валентных графов (фрагмент)

Величина разбиения m (валентность графа)	Номер группы разбиений																	
	1	2						3										
	Номер подгруппы разбиений																	
	–	–						3^1					3^2				3^3	
	Номера колонок																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2						1^2 1	2^1 1											
4					1^4 1	21^2 1. 1	2^2 1. 1					$32^0 1$ 1						
6				1^6 1	21^4 2	$2^2 1^2$ 1. 3	2^3 1. 2				$32^0 1^3$ 1. 1	$32^1 1$ 2. 1				3^2 2		
8			1^8 1	21^6 2	$2^2 1^4$ 5	$2^3 1^2$ 1. 6	2^4 1. 4			$32^0 1^5$ 2	$32^1 1^3$ 1. 5	$32^2 1$ 1. 2. 4			$3^2 2^0 1^2$ 2. 3	$3^2 2^1$ 3. 2		
10		1^{10} 1	21^8 2	$2^2 1^6$ 5	$2^3 1^4$ 9	$2^4 1^2$ 1. 11	2^5 1. 6		$32^0 1^7$ 2	$32^1 1^5$ 7	$32^2 1^3$ 2. 14	$32^3 1$ 2. 2. 10		$3^2 2^0 1^4$ 1. 6	$3^2 2^1 1^2$ 1. 4. 12	$3^2 2^2$ 1. 5. 7		$3^3 2^0 1$ 3. 2
12	1^{12} 1	21^{10} 2	$2^2 1^8$ 5	$2^3 1^6$ 10	$2^4 1^4$ 17	$2^5 1^2$ 1. 18	2^6 1. 10	31^9 2	$32^1 1^7$ 7	$32^2 1^5$ 20	$32^3 1^3$ 3. 32	$32^4 1$ 3. 2. 21	$3^2 1^6$ 8	$3^2 2^1 1^4$ 2. 25	$3^2 2^2 1^2$ 4. 8. 39	$3^2 2^3$ 2. 7. 18	$3^3 1^3$ 1. 2. 10	$3^3 2^1 1$ 1. 9. 12

В каждой колонке, при движении вниз со строки на строку, строение графов принципиально не изменяется, а изменяется только длина их цепей и циклов по причине прибавления к графу двухвалентных вершин. В верхней заполненной клетке каждой колонки расположен базовый граф, определяющий строение всех графов данной колонки. При этом колонки с нециклическими, комбинированными и циклическими графами располагаются последовательно и периодически повторяются.

Разбиение, вписанное в клетку таблицы, представляет собой перечень вершин определенной валентности, из которых синтезирована группа изомерных графов. В клетке показан только один наиболее плотный граф, а все остальные перечислены в табл. 1, где они разделены на три когорты, которые определяют у периодической системы наличие трех слоев: односвязных, многосвязных и несвязных графов. В нижней части клетки указаны последовательно количества односвязных, многосвязных и несвязных графов, составляющих группу изомеров. Предполагается, что клетки с многосвязными и несвязными графами данного разбиения расположены под этой клеткой на разных уровнях. Клетки верхнего уровня расположены островками в середине таблицы и в нижней ее части. Клетки второго уровня частично расположены под заполненными клетками верхнего уровня, а частично видны справа и в верхней части таблицы. А клетки третьего уровня частично расположены под клетками первого и второго уровней, а частично видны слева. Многосвязные графы, не имеющие в числе своих изомеров односвязных графов, называются естественными. В противном случае многосвязные графы – искусственные. Несвязные графы, не имеющие в числе своих изомеров односвязных и многосвязных графов, называются естественными. В противном случае несвязные графы – искусственные. Так, клетки с естественными графами оказываются не закрытыми клетками вышестоящих уровней. Как выглядят таблицы второго и третьего уровней в отдельности, можно посмотреть в статье [4].

На основе периодической системы все односвязные графы можно упорядоченно расположить в виде точек в трехмерном пространстве, координатами которого служат: номер величины разбиения, номер самого разбиения и номер изомера. Первые две координаты совпадают с координатами периодической системы, а третья соответствует номеру изомера в таблице полного перечисления графов. Также располагаются в своих трехмерных пространствах многосвязные и несвязные графы.

В периодической системе, при бесконечном увеличении значения величины разбиения, сохраняются все ранее выделенные структурные свойства графов. Это позволяет в определенной мере прогнозировать их строение по структуре базового графа.

Таким образом, осуществлено упорядочение валентных графов, при котором каждому графу определено свое место в таблице в зависимости от его количественных и качественных показателей.

Для объединенных графов таблицы периодической системы строятся на основе таблицы периодической системы валентных графов путем прибавления ко всем ее графам поочередно одного, двух, трех и т. д. невалентных компонентов. Если эти таблицы расположить вдоль оси N, на которой последовательно отложено число невалентных компонентов (рис. 3), по оси V расположить величины валентности графов, а по оси P – перечисленные разбиения, то окажется, что в этой системе координат упорядоченно представлены все без исключения разновидности рассматриваемых графов. Здесь валентные графы представлены в первой таблице ($N = 0$), объединенные графы – во всех последующих таблицах, а невалентные графы – на оси N ($V = 0$, $P = 0$).

Из табл. 2 следует, что структурные свойства валентных графов зависят от величины отношения числа вершин графов к их валентности [4].

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРАФОВ

Выражение графа в форме схематического изображения и в математической форме создает две параллельные системы понятий и терминов. Взаимосвязь этих систем выглядит следующим образом.

Граф – матрица смежности, строки и колонки которой обозначены частями разбиения.

Валентность графа – величина разбиения.

Комплект вершин, составляющих граф, с указанием их валентности – разбиение числа.

Количество вершин одинаковой валентности – количество одинаковых по величине частей разбиения (верхний индекс при части разбиения).

Количество вершин в комплекте – количество частей разбиения (сумма верхних индексов при частях разбиения).

Вершина – часть разбиения.

Валентность вершины (число полуребер) – величина части разбиения.

Полуребро – единица в составе разбиения.

Далее приводятся математические модели графов, выделенных по классификационным признакам.

Множеству графов G_1, представляющему царство графов, в математике соответствует множество матриц смежности $M(R,R)$, строки и колонки которых обозначаются частями разбиения

$$P = N^{r_n} \dots 3^{r_3}\, 2^{r_2}\, 1^{r_1}\, 0^{r_0}$$

$$G_1 = M_{(R,R)};\ r_i \ge 0;\ i = n,\dots,0;\ R = \sum r_i;\ \sum r_i > 0,$$

где r_i – количество одинаковых по величине частей разбиения, соответствующих количеству вершин одинаковой валентности.

Множеству графов G_2, представляющему тип невалентных графов, соответствует ряд натуральных чисел

$$G_2 = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Множеству графов G_3, представляющему тип валентных графов, соответствует множество матриц

$$G_3 = M_{(R,R)};\ r_0 = 0;\ r_i \ge 0;\ \sum r_i > 0;\ i = n,\dots,1.$$

Множеству графов G_4, представляющему тип объединенных графов, соответствует множество матриц

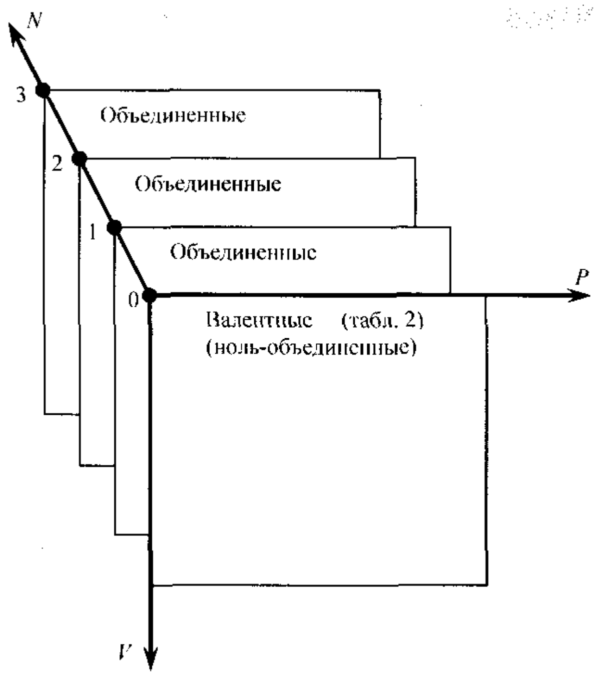


Рис. 3. Полная периодическая система графов

$$G_4 = M_{(R,R)};\ r_0 > 0;\ \ r_i \geq 0;\ \ \sum r_i > 0;\ \ i = n,...,1\cdot$$

Множеству графов G_5, представляющему тип валентных, когорту несвязных естественных графов, соответствует множество матриц

$$G_5 = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ m \geq \sum r_i > m/2+1;\ \ i = n,...,1\cdot$$

где m – величина разбиения, а $m/2+1$ – число частей разбиения, соответствующее числу вершин нецикличных графов.

Множеству графов G_6, представляющему когорту односвязных графов, соответствует множество матриц

$$G_6 = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ m/2+1 \geq \sum r_i \geq 1/2+\sqrt{1/4+m};\ \ i = n,...,1\cdot$$

где $1/2+\sqrt{1/4+m}$ – число частей разбиения, соответствующее числу вершин полного односвязного графа. Величина элементов матриц должна быть в пределах $1 \geq e_{ij} \geq 0$, число компонентов в графе – $c = 1$.

Множеству графов G_7, представляющему когорту многосвязных естественных графов, соответствует множество матриц

$$G_7 = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ 1/2+\sqrt{1/4+m} > \sum r_i \geq 1;\ \ i = n,...,1;\ \ c = 1\cdot$$

При этом хотя бы один элемент матрицы должен иметь величину $e_{ij} \geq 2$.

Множеству графов G_8, представляющему когорту односвязных, род нецикличных графов, соответствует множество матриц

$$G_8 = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ \sum r_i = m/2+1;\ \ i = n,...,1;\ \ c = 1\cdot$$

Множеству графов G_9, представляющему когорту односвязных род комбинированных графов, соответствует множество матриц

$$G_9 = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ r_1 > 0;\ \ m/2+1 > \sum r_i > 1/2+\sqrt{1/4+m};$$
$$i = n,...,1;\ \ 1 \geq e_{ij} \geq 0;\ \ c = 1.$$

Множеству графов G_{10}, представляющему когорту односвязных, род цикличных графов, соответствует множество матриц

$$G_{10} = M_{(R,R)};\ \ r_0 = 0;\ \ r_1 = 0;\ \ m/2+1 > \sum r_i \geq 1/2+\sqrt{1/4+m};$$
$$i = n,...,2;\ \ 1 \geq e_{ij} \geq 0;\ \ c = 1.$$

7. СТРУКТУРА И ФУНКЦИЯ ГРАФОВ

В данном разделе рассматриваются функциональные свойства графов, представляемых как самостоятельные абстрактные системы. Здесь эти свойства выявляют характер взаимоотношений между вершинами графов на разных уровнях общности их структурных свойств. Функциональные свойства определяются с помощью обобщающих признаков, установленных при классификации графов. Эти свойства способствуют выбору таких структур, которые соответствовали бы функциональным свойствам проектируемых систем.

Для царства графов обобщающим структурным признаком является бинарность, а функциональным свойством – наличие отношений между некоторыми или всеми парами вершин.

Для типов графов обобщающим структурным признаком служит валентность. Соответственно, вершины графа могут обладать структурным свойством или невалентности, или валентности, или для одной части вершин – свойством невалентности, а для другой – валентности. Здесь функциональным свойством графов будет наличие или отсутствие отношений между парами вершин. У невалентных графов вершины между собой отношений не имеют. У валентных графов все вершины имеют отношения или между собой или (и), в случае унарных отношений, сами с собой. У объединенных графов между одними вершинами существуют отношения, а между другими – отсутствуют.

Для классов графов обобщающим структурным признаком является мера невалентности. Здесь структурным свойством графов служит число невалентных компонентов. А функциональным свойством – число вершин, не имеющих отношений.

Для когорт графов обобщающим структурным признаком будет связность. Здесь валентные графы делятся по структурным признакам на несвязные, односвязные и многосвязные. Функциональным свойством несвязных графов является невозможность проложить маршрут между некоторыми парами несмежных вершин. Функциональным свойством односвязных графов служит наличие одного отношения между парами смежных вершин, и возможность проложить маршрут между всеми парами несмежных вершин. Функциональным свойством многосвязных графов является наличие кратных отношений между всеми или некоторыми парами смежных вершин, возможность проложить маршрут между всеми парами несмежных вершин и наличие или отсутствие у всех или некоторых вершин отношений самих с собой.

Для отрядов объединенных графов, имеющих один валентный компонент, обобщающим структурным признаком является связность этого компонента. Здесь по структурным признакам валентного компонента графы делятся на графы: с односвязным валентным компонентом; с многосвязным валентным компонентом; с несвязным валентным компонентом, т. е. с несколькими валентными компонентами. В первом случае функциональным свойством графов будет наличие одного отношения между всеми парами смежных вершин, и возможность проложить маршрут между всеми несмежными парами вершин. Во втором – наличие кратных отношений между всеми или некоторыми парами смежных вершин, возможность проложить маршрут между всеми парами несмежных вершин и наличие или отсутствие у всех или некоторых вершин отношений самих с собой. В третьем – наличие отношений между некоторыми парами вершин, невозможность проложить маршрут между некоторыми парами несмежных вершин. И для всех отрядов – невозможность установить отношения между всеми парами невалентных вершин и всеми парами невалентных и валентных вершин.

Для семейств объединенных графов обобщающим структурным признаком будет связность валентных компонентов. По этому признаку графы делятся на графы с односвязными, многосвязными и смешанными валентными компонентами. В первом случае функциональными свойствами графов будут – наличие у всех валентных компонентов одинарных отношений между парами смежных вершин и наличие маршрутов между всеми парами несмежных вершин. Во втором – наличие у всех валентных компонентов кратных отношений между всеми или некоторыми парами смежных вершин, возможность проложить маршрут между всеми парами несмежных вершин и наличие или отсутствие у всех или некоторых вершин отношений самих с собой. В третьем – наличие в графе таких валентных компонентов, одни из которых по функциональным свойствам соответствуют первому случаю, а другие – второму.

Для родов, относящихся к валентным и объединенным графам, обобщающим структурным признаком является цикличность. У однокомпонентных графов – это цикличность графа, а у многокомпонентных – цикличность валентных компонентов. По этому признаку односвязные и многосвязные валентные графы обладают структурными свойствами: или нецикличности, или цикличности, или комбинированности.

В первом случае функциональным свойством графов будет наличие между любой парой вершин одного единственного маршрута. Во втором случае – наличие между любой парой вершин двух и более маршрутов. В третьем случае – наличие между одними парами вершин одного единственного маршрута, между другими – двух и более маршрутов и между третьими – таких маршрутов, у которых функциональные свойства одних участков маршрутов соответствуют первому случаю, а других – второму.

Несвязные валентные графы и объединенные графы обладают следующими структурными свойствами: или нецикличностью, или цикличностью, или комбинированностью, или нецикличностью и цикличностью, или нецикличностью и комбинированностью, или цикличностью и комбинированностью, или нецикличностью и цикличностью и комбинированностью.

В первом случае функциональным свойством будет наличие у всех валентных компонентов между любой парой вершин каждого компонента одного единственного маршрута. Во втором случае – наличие у всех валентных компонентов между любой парой вершин каждого компонента двух и более маршрутов. В третьем случае – наличие у всех валентных компонентов графа между любой парой вершин каждого компонента для одних пар вершин – одного единственного маршрута, для других пар вершин – двух и более маршрутов, для третьих – такого маршрута, у которого функциональные свойства некоторых участков маршрута соответствуют первому случаю, а остальных – второму случаю. В четвертом случае – наличие таких валентных компонентов, одни из которых обладают функциональными свойствами графов, рассмотренных в первом случае, а других – во втором. В пятом случае – наличие таких валентных компонентов, одни из которых обладают функциональными свойствами графов, рассмотренных в первом случае, а другие – в третьем. В шестом случае – наличие таких валентных компонентов, одни из которых обладают функциональными свойствами графов, рассмотренных во втором случае, а другие – в третьем. В седьмом случае – наличие таких валентных компонентов, одни из которых обладают функциональными свойствами графов, рассмотренных в первом случае, другие – во втором, а остальные – в третьем.

8. ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Сегодня в теории графов наработано много научного материала, но систематизация графов, можно сказать, начинается с чистого листа. И было бы непростительным не воспользоваться таким обстоятельством и не упорядочить терминологию. Несмотря на кажущуюся бесцеремонность обращения с уже устоявшимися терминами, дальнейшая разработка терминологической системы вполне оправдана и вписывается в мероприятие по систематизации самих графов, являясь ее логическим продолжением.

Дело в том, что на начальной стадии развития теории графов ее термины создавались стихийно. Со временем оказалось, что некоторые из них не в полной мере соответствуют принятым в настоящее время понятиям, не согласуются с другими терминами и не соответствуют по уровню общности тому месту, которое они сейчас занимают. Это такие термины, как псевдограф, гиперграф, реберный граф, дерево и т. п. [6]. Псевдографами ранее назвали такие схемы структур, у которых имелись кратные ребра. И это потому, что графами тогда назывались односвязные схемы. Теперь графами считаются схемы с любой кратностью ребер. Гиперграфами назвали такие схемы структур, у которых мера отношений между элементами системы была более двух, т. е. трехместные, четырехместные и т. д. Здесь графами считаются схемы структур с одноместными и двухместными отношениями, а остальные считаются гиперграфами. Теперь графами называются схемы структур с любым числом отношений. Реберными графами в свое время назвали такие графы, которые были получены путем преобразования вершин в ребра, а ребер в вершины. Здесь основой для построения термина должен служить факт преобразования одних символов в другие, а не понятие о реберности, которое обладает большой общностью и теперь применяется по своему назначению. Термин «дерево» вызывает неверные ассоциации, связанные с его стволом, как с особенной его частью, в то время, как у обыкновенного нецикличного графа нет особо выделенных частей. Таким образом, в новой терминологической системе некоторые термины заменяются на более точные.

9. О РОЛИ И МЕСТЕ СОБСТВЕННО ТЕОРИИ ГРАФОВ В НАУЧНОМ ЗНАНИИ

Одной из форм созидательной деятельности человека является проектирование систем, обладающих необходимыми для него функциональными свойствами. Из примера проектирования технических систем следует, что их описание осуществляется в рамках категорий «структура», «функция» и «процесс» [9]. Под категорией «процесс» здесь понимаются физические (природные) процессы, протекающие в системе.

Поскольку графы являются моделями строения систем, то собственно теория графов представляет проектировщикам все возможные варианты структур с описанием их структурных, функциональных и математических свойств. Это позволяет выбрать оптимальный вариант структуры для проектируемой системы. Например, в теории механизмов при проектировании кинематических схем, составляющих основу проекта механизма, за неимением аналитического метода их проектирования, сегодня или находят близкий по функциональному назначению аналог, или применяют метод проб и ошибок, что не гарантирует оптимального решения задачи.

В связи с разработкой теории систем и ее составной части – теории графов, представляется возможным при проектировании кинематических схем механизмов заимствовать из этих теорий новые идеи, позволяющие создавать аналитический метод проектирования. Поскольку строение графа изменяется дискретно, то и проектирование структурных схем должно осуществляться на дискретной основе.

Имея в виду, что наиболее распространенные механизмы с замкнутыми кинематическими цепями имеют число звеньев от трех до шести, то и полное перечисление реберных цикличных графов осуществляется в пределах этого числа ребер. Таких графов будет 36. Эти графы представляют собой структуру оригинальных механизмов без дублирования кинематических цепей. Здесь ребро графа приводится в соответствие элементу механической системы, а его вершина – отношению между парой элементов. На их основе строятся структурные схемы, и осуществляется полное их перечисление путем присвоения их звеньям поочередно свойств стойки, входного, выходного и промежуточного, а также поочередного присвоения их кинематическим парам свойства высшей пары. Так осуществляется полное перечисление общих структурных схем. Для каждой из них определяется общая кинематическая характеристика механизма. Сравнивая с этим справочным материалом кинематическую характеристику проектируемого механизма, получаем аналитическим путем оптимальный вариант необходимой кинематической схемы.

Исходя из специфики математики оперировать абстрактными понятиями, теория графов выступает как теория структур, составленных определенным образом из точек и отрезков линий. После выяснения связи этой теории с практикой, ее можно определить как теорию математических моделей системных структур. Теперь подошло время расширить понятие о теории графов, как о теории самих системных структур.

Сейчас граф считается объектом математики, но понятие о структуре, моделью которой представляется граф, является междисциплинарным. Таким образом, собственно теория графов становится междисциплинарной теорией и соответствует понятию о теории системных структур. Включение теории системных структур в общую теорию систем вносит некоторую определенность в вопрос о строении данной теории.

Представленная здесь систематизация графов позволяет упорядочить тот материал, который был наработан в математической теории графов.

В математике граф представляется как пара множеств, элементы которых – вершины и ребра – являются с точки зрения логики высказывания субъектами (подлежащими). Это не согласуется с понятием о структуре системы, которую граф должен выражать. Структура системы состоит из элементов, являющихся субъектами, и их отношений, которые являются предикатами. Это указывает на различие понятий о графе в математической и системной теориях графов.

Состав и строение системной теории графов служит методологической основой для построения теорий других частных наук, которые отличаются большим разнообразием строения их объектов. Это подтверждается, например, сходством строения системной теории графов со строением учения о химических элементах. Так, между периодической системой валентных графов и периодической системой элементов Д.И. Менделеева наблюдается некоторое сходство. Периодическая система валентных графов начинается с графов, соответствующих по структуре атому водорода, и развивается вниз и вправо. Записанная в клетке формула электронного строения атома химического элемента есть не что иное, как разбиение, представленное в своеобразной форме и с учетом распределения электронов по орбитам. Сравнительно небольшое число химических элементов, насчитывающее около двух сотен, не создает самостоятельных проблем в их полном перечислении и классификации, хотя по предложенной здесь методологии такое перечисление можно осуществить, и такую классификационную таблицу можно построить. Для этого достаточно принять, что обобщающими классификационными признаками будут: атомарность, главное квантовое число, орбитальное квантовое число, магнитное квантовое число, спиновое квантовое число и индивидуальность. Данная методология может быть применена, например, в теории механизмов, в электронике, в учении о химических соединениях и т. д.

Интерес к графам сейчас наблюдается не только в математике. К графам обращаются в науках тогда, когда рассматривается структура их объектов. Соответственно, на многих кафедрах вузов студентам дается общее представление о графах. Поэтому существует необходимость в составлении учебного пособия, дающего общее представление о природе и сущности графов, об их структурных, функциональных и математических свойствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 335 с.
2. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Толковый словарь по теории графов. Новосибирск: Наука, 1999. 286 с.
3. *Brandstädt A., Le V.B., Spinrad J.P.* Graph classes: a survei. Philadelphia: Sociali for Industrial and Applied Mathematics, 1999. 304 s.
4. *Шилов А.А.* О систематизации графов на основе разбиений // Методы и средства работы с документами: сб. тр. ИСА РАН / под ред. В.Л. Арлазарова, Н.Е. Емельянова. М.: Эдиториал УРСС, 2000. С. 340-372.
5. *Шилов А.А.* О систематизации безреберных и объединенных графов на основе разбиений // Управление информационными потоками: сб. тр. ИСА РАН / под ред. В.Л. Арлазарова, Н.Е. Емельянова. М.: Эдиториал УРСС, 2002. С. 354-364.
6. 6. *Шилов А.А.* О классификации графов // Организационное управление и искусственный интеллект: сб. тр. ИСА РАН / под ред. С.В. Емельянова. М.: Эдиториал УРСС, 2003. С. 395-420.
7. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 250 с.
8. *Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.
9. *Иванов Б.И., Чешев В.В.* Становление и развитие технических наук. - Л.: Наука, 1977. 165 с.

Поступила в редакцию 23 ноября 2006 г.