

О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В данной статье получены необходимые и достаточные условия, при которых два известных метода регуляризации, разработанных в классической постановке для гильбертовых пространств, могут быть использованы для получения равномерных приближений к решениям уравнений первого рода.

1. Рассмотрим уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $C[a, b]$, A^{-1} существует, но неограничен, и семейство регуляризирующих операторов R_α :

а) $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$ соответствует методу Лаврентьева [1];

б) $R_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}A^*$ — соответствует методу регуляризации Тихонова нулевого порядка гладкости [2].

Как известно, эти методы в их классических постановках применяются для нахождения приближенных решений уравнения (1) в гильбертовых пространствах. При этом $\alpha > 0$, а в случае а) $A = A^* > 0$.

Область сходимости любого метода регуляризации определяется соотношением

$$\|R_\alpha Au - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (2)$$

Отметим, что некоторые условия сходимости (2) в равномерной метрике для указанных методов в иной, чем здесь, постановке приведены в [3–6].

В дальнейшем будем считать, что параметр α принимает не обязательно положительные значения, а любые, при которых существует оператор R_α , а в случае а) оператор A — произвольный линейный ограниченный.

Теорема 1. Если $u = \tilde{A}v$, где $v \in L_2[a, b]$, $\tilde{A} = A$ в случае а) и $\tilde{A} = A^*A$ в случае б), то для сходимости (2) в равномерной метрике необходимо и достаточно, чтобы

$$\|\alpha R_\alpha \tilde{A}v\|_{C[a, b]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Доказательство вытекает из представления

$$R_\alpha A = -\lambda R_\lambda (\tilde{A}^{-1}) \Big|_{\lambda=-1/\alpha},$$

где $R_\alpha(\tilde{A}^{-1})$ — резольвента оператора $\tilde{A}^{-1}$, λ — спектральный параметр, и формулы Гильберта для резольвенты, примененной к функции v .

Из теоремы 1 и теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает

Следствие. Для сходимости (2) в равномерной метрике на замыкании области значений оператора $\tilde{A}$ в равномерной метрике необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых значениях $|\alpha|$ выполнялась оценка

$$\|R_\alpha A\|_{C[a,b]} \leq K, \quad (4)$$

где константа K не зависит от α .

2. Пусть в уравнении (1) оператор A имеет вид

$$Au = \int_0^x A(x, t)u(t)dt, \quad (5)$$

где $A(x, t)$ удовлетворяет условиям: $A_x(x, t)$ ($A_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}A(x, t)$), A_{xt} существуют и непрерывны, $A(x, x) = 1$.

Регуляризация уравнения (1) с оператором (5) иным, чем в данной статье, методом и при более жестких предположениях о ядре $A(x, t)$ рассматривалась в [7].

Теорема 2. Если в уравнении (1) оператор A имеет вид (5), $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, $\alpha > 0$, то для любой непрерывной функции $u(x)$, удовлетворяющей условию $u(0) = 0$, имеет место сходимость (2) в равномерной метрике.

Схема доказательства:

1) строится интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y = R_\alpha(A^{-1})u$; 2) резольвента оператора A^{-1} оценивается через резольвенту $R_\lambda(L_0)$, где $L_0 : l_0 y = y'$, $y(0) = 0$; 3) доказываются оценки (3), (4); 4) находится замыкание области значений оператора A в равномерной метрике; 5) применяется теорема 1 и следствие из нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СОАН СССР. 1962. 92 с.
2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
3. Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
4. Худак Ю.И. О регуляризации решений уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 4. С. 766–769.
5. Саадабаев А. Оценка погрешности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: ИЛИМ, 1988. № 21. С. 5–15.

6. Хромова Г.В. О некоторых новых возможностях тихоновской регуляризации // Обратные и некорректно поставленные задачи. Тихонов и современная математика: Тез. докл. Междунар. конф. Москва, 19-25 июня 2006 г. М.: МАКС Пресс, 2006. С. 93–94.

7. Хромова Г.В. О регуляризации одного класса интегральных уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 10. С. 1810–1817.

УДК 519.95

П.М. Хрусталева, И.П. Мангушева

ОЦЕНКА ЧИСЛА СПЕКТРОВ АВТОМАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Число автоматов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ в классе (k, m, n) -автоматов, где $\delta : S \times X \rightarrow S$, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$, $|S| = k$, $|X| = m$, $|Y| = n$, равно $(nk)^{mk}$. В таком широком классе изучение поведения каждого представителя оказывается нецелесообразным. Для классификации автоматов в работе [1] предложено использовать упорядоченные наборы числовых характеристик, называемые *спектрами*.

В настоящей статье исследуются спектры различимости и спектры достижимости автоматных операторов, рассматриваемые в [1]. Найдены количественные характеристики числа всех спектров для операторов веса r .

Рассмотрим кратко основные результаты [1], на которые опирается статья. Оператор T представляется бесконечным полным m -ветвящимся деревом, ребра которого помечены символами выходного алфавита Y . Последовательности соседних ребер с началом в корне дерева определяют словарное отображение $T : X^* \rightarrow Y^*$, сохраняющее длину и начальные отрезки слов.

Для произвольного оператора T и любого входного слова $p \in X^*$ определяется остаточный оператор T_p оператора T , соответствующий входному слову p :

$$(\forall x \in X^*)(T_p(x) = T(px)).$$

Сам оператор T считается остаточным к пустому слову.

На множестве остаточных операторов определяется отношение k -эквивалентности ($\approx^k$):

$$T' \approx^k T'' \iff (\forall p \in X^*)(|p| = k \rightarrow T'(p) = T''(p)).$$

Содержательно k -эквивалентным операторам соответствуют полные m -ветвящиеся деревья с одинаковой разметкой ребер на первых k ярусах.

Число $E_T(k)$ классов k -эквивалентности выбирается в качестве элемента последовательности $E_T(0), E_T(1), E_T(2), \dots$, которая называется *спектром различимости оператора T* .