

УДК 372.016:51+37.0

Дулатова Зайнеп Асаналиевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Иркутский государственный университет, dulatova@yandex.ru, Иркутск

Лапшина Елена Сергеевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Иркутский государственный университет, esl7828@gmail.com, Иркутск

О РАЗВИТИИ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. Развитие логического мышления учащихся определяется как важная задача обучения математике. Логические универсальные учебные действия характеризуются как одни из основных познавательных действий в стандартах второго поколения. Однако уровень логического мышления обучающихся остается достаточно низким. В статье приводятся возможные причины низкого уровня развития логического мышления школьников на основе анализа психологических теорий развития мышления и процесса обучения математике в школе. Авторы предлагают различные пути к решению проблемы. Один из основных и наиболее реальных путей в современной ситуации – это самостоятельное обогащение учителем учебного материала, языка учебника посредством преобразования учебных заданий, изменения их логической структуры.

Ключевые слова: логическое мышление, школьное математическое образование.

Глубокая взаимосвязь математики и логики определяются как историей возникновения и развития, так и сложившимися в настоящее время предметами изучения этих наук [6; 8]. Эта взаимосвязь отражается и на процессах целенаправленного обучения математике и логике как самостоятельным дисциплинам, и на развитии математического мышления в процессе изучения логики и, наоборот, развитии логического мышления при обучении математике. С одной стороны, для освоения математических теорий необходим определенный уровень сформированности логического мышления. С другой стороны, строгая определенность и непротиворечивость изучаемых математических теорий делают математику эффективным инструментом для освоения логических конструкций. В связи с этим развитие логического мышления обучающихся декларируется как одна из основных задач математического образования [10].

Мы проводим занятия по математическим дисциплинам и формальной логике в вузе и школе. Понимание существования проблемы, рассматриваемой в нашей работе, возникло в первую очередь благодаря это-

му педагогическому опыту [4]. По нашим наблюдениям, у большей части школьников и студентов уровень владения логическими операциями достаточно низок. И те, и другие совершают в рассуждениях ошибки логического характера, затрудняются в формулировании определений, в классификации понятий, в определении структуры и истинностного значения суждений и т. д. При этом ошибки совершаются не только при оперировании абстрактными или мало знакомыми понятиями, но и при проведении логических операций с привычными и понятными объектами. Естественно, возникает вопрос: «Почему школьное математическое образование не выполняет одну из своих базовых задач?»

В своем фундаментальном труде «Речь и мышление ребенка» [9] Жан Пиаже описывает исследования степени сформированности логики ребенка в возрасте от 4 до 11–12 лет. В основу фактического материала исследований легли обширные статистические данные, включающие результаты прохождения детьми логических тестов и скрупулезно зафиксированные детские разговоры между собой в свободной обстановке. Анализ на-

блюдений привел Ж. Пиаже к выделению центральной особенности детского мышления – эгоцентризма. Эгоцентризм мышления ребенка выражается в том, что он является как бы центром координат в его восприятии внешнего мира. Эгоцентризм – это не эгоизм, это неотделение мира от себя, как от субъекта. Эгоцентризм мысли, по мнению Ж. Пиаже, обуславливает такие особенности детского мышления, как синкретизм, непонимание логических отношений и операций, трудности в осознании мыслительной деятельности. Эгоцентризм мышления уменьшается при взрослении. К 11–12 годам у ребенка закладывается фундамент для овладения формально-логическими операциями.

Исследования Ж. Пиаже стали классикой мировой психологии. Отдельные положения его теории были оспорены и переосмыслены, в том числе и им самим [2; 5; 9; 11; 12]. Тем не менее приведенные им примеры детской логики и их анализ вызовут несомненный интерес у специалистов из сферы математического образования, настолько живо они перекликаются с опытом работы с детьми абсолютно разных возрастных групп.

Не претендуя на теоретическую строгость, руководствуясь лишь опытом, можно сказать, что у части детей, действительно, к 11–12 годам происходит скачок в способности к освоению формальных и абстрактных конструкций, а часть остается на качественно прежнем уровне.

Приведем несколько примеров. Ж. Пиаже пишет, что дети до 8 лет не умеют давать определения. Либо они дают определение посредством непосредственного показа: «Стол ... это стол», либо дают функциональное описание. «Что такое вилка?» – «Это, чтобы кушать»; «Что такое мама?» – «Это, чтобы готовить обед» [9]. Как знакомо учителям и преподавателям математики, что ученик не только испытывает затруднения с поиском родового понятия в тексте определения, но и не видит необходимости в грамотной формулировке. Определения геометрических понятий даются с помощью визуальных знаков, определения начинаются со слов: «Это (что?), когда...» и т. д. Здесь нужно упомянуть следующее. Л. С. Выготский сделал резонное замечание, что в экспериментах Ж. Пиаже перед детьми часто ставились вопросы, недоступные их опыту

[2]. К примеру, им задавался вопрос: «Почему Луна не падает на Землю?» Разумеется, дети, пока не готовы мыслить логично в этой сфере, давали путанные ответы. Естественно и в нашем случае предположить, что в математике мы получаем неясные определения попросту непонятных и неблизких детям понятий. Однако повторимся, что опыт преподавания формальной логики студентам показывает, что затруднения касаются не только математических и научных понятий.

Ребенок в возрасте до 7–8 лет не имеет потребности объяснения и логического обоснования своих мыслей, т. к. они приняты им за стопроцентную истину. Ж. Пиаже приводит многочисленные примеры примитивного спора между детьми, состоящего из полярных утверждений без какой-либо логической аргументации. Причину этого он видит так же в эгоцентризме и малой социализации мысли [9]. В младшем возрасте дети пока еще имеют привычку к тому, что родители стараются понять их даже самые неясные желания. У них нет насущной потребности в сообщении своего рассуждения. Трудности в изложении своих мыслей – нередкая черта как обучающегося, так и выпускника школы.

Ж. Пиаже видит источник преодоления эгоцентризма мышления в социализации. Впоследствии, анализируя свои опыты, он признавал, что уровень эгоцентризма детей в Доме малюток Института Ж.-Ж. Руссо (Женева), где дети просто играют друг с другом без особого внешнего вмешательства, оказывался выше, чем в советских и немецких детских садах, в которых организовано тесное социальное групповое общение детей [9]. Игра или другая совместная деятельность с другими детьми требует от ребенка умения объяснять свои мысли и желания, что способствует преодолению эгоцентризма мысли, развитию речи и мышления. Для детей дошкольного возраста основной вид социализации – это игра. Для детей старше 7 лет ведущим видом социализации является учебная деятельность. Большая часть жизни ребенка проходит в школе, хотя в настоящее время в борьбу за первенство со школой вступила виртуальная жизнь в компьютерных играх и социальных сетях. Но если посмотреть переписку на форумах, мы увидим, что общение в интернете требует от ребенка

минимального количества умственных усилий. Таким образом, деятельность, которая может вызвать развитие мышления ребенка, в основном все же проходит в школе.

Тем не менее, как отмечалось выше, многие учащиеся школы не имеют качественного продвижения в освоении логики. Можем ли мы выдвинуть гипотезу, что низкий (в среднем) уровень развития логического мышления школьника объясняется тем, что логические обоснования, доказательства, рассуждения во многом остаются невостребованными в обучении? И именно это оставляет логические способности школьника в пассивном состоянии?

Такая постановка вопроса, естественно, приводит нас к изучению школьных учебных пособий как основы для организации развития мышления обучающихся. И в первую очередь нас интересовали учебники по математике. Мы рассмотрели ряд школьных учебников по математике для 5–11-х классов, акцентируя внимание на представлении теоретического и задачного материала, направленного на освоение школьниками основ логической культуры. В каком-то смысле решение любой математической задачи, выполнение анализа текста по русскому языку, истории или по другому предмету способствует развитию логического мышления обучающегося. При этом многое зависит от учителя, от расставленных акцентов в диалоге с учениками. Нас интересовали задачи, сама логическая структура которых требует понимания основных логических понятий и операций, т. е. задачи, непосредственно направленные на освоение основ логики. Нами были выделены следующие типы таких математических задач¹.

Тип 1. Задачи на определение истинности простых (с одним субъектом и одним предикатом) общих и частных суждений.

Тип 2. Задачи на определение истинности сложных суждений, т. е. суждений, содержащих более одного субъекта или предиката.

Тип 3. Задачи, формулировка которых содержит неограниченные или ограниченные кванторы существования и всеобщности: «Существует какой-либо объект конкретного вида (из конкретного множества)» или

«Все объекты некоторого множества обладают определенным свойством».

Тип 4. Задачи, направленные на обучение обобщенным методам доказательства утверждений, таким как, например, метод доказательства от противного, метод полной индукции (полного перебора случаев).

При анализе особое внимание уделялось учебникам для 5-го класса, т. к. мышление ребенка этого возраста должно быть готово к освоению логических понятий и операций. В результате мы пришли к следующим выводам.

Задач типа 1 очень мало в учебниках для 5-го класса. Как правило, они представляют собой редкие упражнения, в которых требуется определить, верны ли указанные суждения (как правило, простые суждения, с одним субъектом и одним предикатом). При этом в ряде учебников используется ошибочная терминология. Истинные суждения называются «правильными» [7, с. 7]. Это неверно, правильной может быть синтаксическая конструкция. При такой интерпретации суждение «3 меньше 2» правильно, но ложно.

Задачи типов 2 и 3 практически отсутствуют. Исключение составляют учебники по математике для 5-го класса авторов Г. В. Дорофеева и Л. Г. Петерсон [3]. К примеру, задачи по теме «Дроби» в других учебниках носят исключительно вычислительный характер: «Выполните действия ...», «Решите уравнения ...», «Найдите значение выражения ...». В учебнике Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон, напротив, регулярно встречаются задания такого вида [3, с. 33].

Найди общие утверждения и утверждения о существовании. Докажи или опровергни их.

1. Существует правильная дробь со знаменателем 2.

2. Любая правильная дробь меньше любой неправильной.

3. Дробь сократима тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель кратны 5.

При выполнении такого задания обучающийся, с одной стороны, учится пониманию и использованию кванторных слов и логических связей, а с другой стороны, систематизирует теоретические сведения по теме изучения, более глубоко анализирует ее содержание, учится пользоваться новой ма-

¹ Отметим, что к задачам мы относим также и теоремы из теоретической части учебника.

тематической терминологией. Подчеркнем, что содержание заданий доступно школьникам.

Что касается задач типа 4, они опять же либо не представлены совсем, либо в очень ограниченном количестве. Методика обучения обобщенным методам доказательства утверждений при обучении математике еще недостаточно проработана в российской педагогической школе. Учителя математики, вслед за учебниками математики, часто путают названия «метод подбора» (он же метод проб и ошибок, по-видимому) и «метод перебора». Метод проб и ошибок заключается в поиске ответа, или метода решения, основанного на интуитивных, не обязательно четко выраженных соображениях. Метод проб и ошибок может дать некое решение, но не гарантию отсутствия других решений. Метод перебора (метод полного перебора, метод полной индукции) предполагает перебор всех возможных случаев. Таким образом, не вполне ясна формулировка: «Решите уравнение методом проб и ошибок: 1) $x^3 + 12x = 63$; ...» [3, с. 111]. Метод проб и ошибок позволяет найти корень $x = 3$. Но доказать единственность этого корня (то есть действительно *решить уравнение*), пятиклассник может лишь опираясь на интуитивные соображения о возрастании и убывании функции. Нам представляется очень важным для формирования логической и математической культуры школьника даже в учебниках начальной школы использовать понятную для детей, но точную с логической и математической точки зрения терминологию. В рассмотренном задании более уместной считаем следующую формулировку: «Методом проб и ошибок найди хотя бы один из корней уравнения». Метод доказательства от противного применяется только в доказательстве геометрических теорем. Таким образом, школьники сталкиваются с ним только в 7-м классе в начале изучения геометрии.

В учебниках для старших классов количество задач рассматриваемых типов незначительно увеличивается. В профильных учебниках для 10–11-х классов задачи типа 1–4 встречаются намного чаще. Это объясняется тем, что в содержание учебников для классов с углубленным изучением математики в последнее время стали вводить элементы

теории чисел. В связи с недостатком адаптированных для средней школы дидактических материалов по этой теме в подборки заданий на делимость часто включаются задачи по теории чисел из школьных математических олимпиад. Это, безусловно, способствовало обогащению логических типов задач учебников по математике, но не решило обозначенной проблемы. Задачи интересующего нас вида по-прежнему встречаются нерегулярно, хаотично.

Итак, в общем охарактеризовать направленность содержания школьных учебников по математике на развитие логического мышления обучающихся можно следующим образом. Задачи специального вида, обучающие пониманию основных логических терминов, операций и законов, входят в основном в учебные пособия профильного уровня для старших классов. Для решения этих задач необходим хороший уровень математической подготовки. В то же время в наиболее используемых учебниках для 5–6-х классов задачи такого вида практически отсутствуют. Тем самым, во-первых, нарушается один из основных принципов дидактики. Обучение новой сложной логической теории происходит на новом сложном математическом материале. Во-вторых, математическое образование пяти- и семиклассников, находящихся в возрасте, когда ребенок готов к продвижению на новый качественный уровень в развитии логического мышления, не предоставляет для этого специальных возможностей.

В педагогической литературе намечены два пути к обучению школьников основам логики. Первый путь – обучение в рамках дополнительного образования (специализированного курса по выбору). В этом случае при ряде преимуществ изучение логики гарантируется только для заинтересованного меньшинства. Второй путь – рассмотрение логических конструкций на уроках математики – представляется нам более продуктивным и согласованным с целями школьного образования. Однако наш анализ показал, что содержание учебников по математике далеко не полностью соответствует задаче обучения логике. Как уже говорилось, одна из проблем – нехватка задач с разнообразной логической структурой. Опишем легкий реализуемый подход к построению необходимых заданий, сводящийся, фактически,

к переформулированию вопросов к стандартным заданиям из учебников. Это преобразование заданий учитель может осуществлять самостоятельно.

Для примера рассмотрим задания на решение уравнений и неравенств, являющиеся наиболее популярными в школьном курсе математики. Как правило, они имеют следующую формулировку: «Решите уравнение (неравенство)». При этом такие задания легко можно преобразовать в задания, требующие не только выполнения преобразования символьных выражений по определенным правилам, но и на построение, преобразование и оценку истинности простых и сложных суждений. Приведем примеры заданий, имеющих следующие формы:

- 1) задания на оценку истинностного значения простого общего суждения;
- 2) задания на оценку истинностного значения суждения существования;
- 3) задания на оценку истинностного значения сложного суждения, содержащего операции импликации (операция «если... то...») или эквиваленции (операция «...тогда и только тогда, когда...»), выраженные

различными словами и словосочетаниями;

- 4) задания на построение и оценку истинности обратного, противоположного и противоположно-обратного утверждений.

Пример 1. Верно ли, что каждое решение уравнения $f(x) = 0$ является решением неравенства $f(x) \leq 0$? Верно ли обратное утверждение?

Пример 2. Докажите, что если число ... является решением уравнения ..., то оно является и решением уравнения...

Пример 3. Верно ли, что для того, чтобы число ... являлось решением уравнения ... достаточно, чтобы оно было равно...?

Здесь вместо многоточий можно подставлять любые конкретные объекты указанного в задании типа. Это позволяет использовать такой подход к обучению в любом классе, по любому учебнику, любой теме. Задачи на оперирование логическими конструкциями помогут обучающемуся, с одной стороны, более глубоко и системному освоению математики, а с другой стороны, будут способствовать развитию его логического мышления.

Библиографический список

1. Виленкин Н. Я., Дуничев К. И., Столяр А. А. Современные основы школьного курса математики: пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с.
2. Выготский Л. С. Мышление и речь. – М.: Лабиринт, 2008. – 352 с.
3. Дорофеев Г. В., Петерсон Л. Г. Математика. 5 класс. Часть 2. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Ювента, 2011. – 240 с.
4. Дулатова З. А., Лапина Е. С. Развитие культуры трансляции способов познавательной деятельности у студентов педагогических вузов в процессе изучения методов индуктивных рассуждений // Сибирский педагогический журнал. – 2008. – № 10. – С. 41–55.
5. Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии: учеб. пособие для студентов психол. специальностей и направлений / под ред. Л. Ф. Обухова, Г. В. Бурменской. – М.: Гардарики, 2001. – 622 с.
6. Математическая энциклопедия: в 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985. – 2951 с.
7. Муравин Г. К., Муравина О. В. Математика. 5 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.
8. Новая философская энциклопедия: в 4 т. / Ин-т философии РАН; Нац. обществ.-науч. фонд; председатель научно-ред. совета В. С. Степин. – 2-е изд., испр. и допол. – М.: Мысль, 2010. – Т. II. – 634 с.
9. Пиаже Ж. Речь и мышление ребенка. – М.: Римис, 2008. – 416 с.
10. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.edu.ru/db/portal/obschee/> (дата обращения: 02.03.2016).
11. Byrnes J. P. Piaget's Cognitive-Developmental Theory // Encyclopedia of Infant and Early Childhood Development. – 2008. – P. 543–552.
12. Langer Jonas, Melanie Killen. Piaget, Evolution and Development. – Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates, 1998. – 317 p.

Поступила в редакцию 18.01.2016

ABOUT THE DEVELOPMENT OF LOGICAL THINKING OF STUDENTS MEANS OF MATHEMATICS

Abstract. The development of logical thinking of students is defined as the important task of teaching mathematics. Logic universal educational actions are characterized as one of the basic cognitive actions in the standards of the second generation. However, the level of logical thinking of students remains fairly narrow. The authors point out the possible causes of the low level of development of logical thinking of students on the basis of the analysis of psychological theories of thinking and math learning process at school. One of the basic and most practical ways in the current situation – is enriching of the educational material, language tutorial (produced by the teacher) by converting the learning tasks and change in their logical structure.

Keywords: logical thinking, mathematical education school.

References

1. Vilenkin, N. Ya., Dunichev, K. I., Stolyar, A. A., 1980. *Sovremennye osnovy shkol'nogo kursa matematiki* [Modern bases of school mathematics]. Moscow: Prosveshchenie, 240 p. (in Russ.).
2. Vygotskij, L. S., 2008. *Myshlenie i rech'* [Thinking and speaking]. Moscow: Labirint, 352 p. (in Russ.).
3. Dorofeev, G. V., Peterson, L. G., 2011. *Matematika. 5 klass.* [Mathematics. Grade 5]. Moscow: Yuventa, 240 p.
4. Dulatova, Z. A., Lapshina, E. S., 2008. *Razvitiye kul'tury transljicii sposobov poznavatel'noj dejatel'nosti u studentov pedagogicheskikh vuzov v processe izuchenija metodov induktivnykh rassuzhdenij* [The development of translation culture of cognitive activity methods for students of teacher training universities in the process of study of the methods of inductive reasonings]. *Sibirskij pedagogicheskij zhurnal* [Siberian Pedagogical Journal], 10, pp. 41–45 (in Russ., abstr. in Eng.).
5. Obukhov, L. F., Burmenskaya, G. V., eds., 2001. *Zhan Piazhe: teorija, jeksperimenty, diskussii: ucheb. posobie dlja studentov psihol. special'nostej i napravlenij* [Jean Piaget: theory, experiments, discussions]. Moscow: Gardariki, 622 p. (in Russ.).
6. Vinogradov, I. M., ed., 1977–1985. *Matematicheskaja enciklopedija: v 5 t.* [Encyclopaedia of Mathematics: 5 t.]. Moscow: Sovetskaja e'nciklopedija, 2951 p. (in Russ.).
7. Muravin, G. K., Muravina, O. V., 2013. *Matematika. 5 kl.* [Mathematics. 5 grade]. Moscow: Drofa, 318 p. (in Russ.).
8. *Novaja filosofskaja jenciklopedija: v 4 t.* [New Encyclopedia of Philosophy: 4 t.]. Moscow: Mysl', 2010, T. II, 634 p. (in Russ.).
9. Piaje, J., 2008. *Rech' i myshlenie rebenka* [Speech and thinking of the child]. Moscow: Rimis, 416 p. (in Russ.).
10. *Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart srednego (polnogo) obshhego obrazovaniya* [Federal state educational standard of secondary (full) general education] [online]. Available at: <http://www.edu.ru/db/portal/obschee/> (Accessed 02 March 2016) (in Russ.).
11. Byrnes, J. P., 2008. *Piaget's Cognitive-Developmental Theory.* *Encyclopedia of Infant and Early Childhood Development*, pp. 543–552.
12. Langer, Jonas, Melanie, Killen, 1998. *Piaget, Evolution and Development.* Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates, 317 p.

Submitted 18.01.2016