

О РАЗВИТИИ КВАТЕРНИОННОЙ АЛГЕБРЫ

Кожух В.С.

*Кожух Вероника Сергеевна – младший научный сотрудник,
лаборатория моделирования самоорганизующихся систем,
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, г. Минск, Республика Беларусь*

Аннотация: в статье анализируется процесс возникновения, становления и развития кватернионной алгебры, выделяются наиболее значимые работы в кватернионном исчислении, выделяются тенденции в развитии и использовании этого математического аппарата.

Ключевые слова: кватернионы, кватернионная алгебра, гиперкомплексные числа.

На сегодняшний день существуют различные математические аппараты, применение которых упрощает подходы к описанию реального мира и закономерностей в нем. Один из таких аппаратов, кватернионная алгебра, удобна для описания изометрий трёх- и четырёхмерного евклидовых пространств, и поэтому получила широкое распространение в областях, связанных с представлением тела в пространстве. Кватернионы — это система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел.

Хочется отметить одну немаловажную, с точки зрения автора, особенность развития исследований в области кватернионной алгебры. На современном этапе развития науки алгебра гиперкомплексных чисел используется для достаточно узкого круга задач и не является приоритетным направлением исследований. На практике аппарат кватернионов успешно используется в различных областях, среди которых следует отметить наиболее популярные:

- ориентация беспилотных и аэрокосмических аппаратов в пространстве;
- построение трехмерных изображений в графических редакторах;
- взаимодействие объектов при трехмерном моделировании в мультимедийной и игровой индустрии;
- представление уравнений теоретической физики;
- построение систем управления манипулятором.

Исследования кватернионной алгебры в практических приложениях позволяет рассматривать не только непосредственно математический аппарат, но и неочевидные решения, основанные на кватернионном исчислении, которые могут повлечь за собой развитие всего направления кватернионной алгебры. Математиками определены основные операции над полем кватернионных чисел, но существует еще множество направлений, в которых рассматриваемый математический аппарат может существенно упростить вычисления: например, сопоставление операций перемножения кватернионов с поворотами тела в пространстве является наиболее значимым и известным случаем применения кватернионов на практике.

Сложность аналитического обзора применения кватернионной алгебры состояла в том, чтобы выделить не просто наиболее значимые работы, в которых использовался математический аппарат кватернионной алгебры, но в которых он получил некоторое развитие.

Как утверждают историки [1, 2], структуры аналогичные по смыслу кватернионам, встречаются в XVIII в. в работах Л. Эйлера и К.Ф. Гаусса, а Б.О. Родригес при изучении последовательности поворотов твердого тела в 1840 г. вывел закон практически эквивалентный правилу умножения кватернионов. Но непосредственно создателем кватернионного исчисления считают ирландского ученого В.Р. Гамильтона [3]. В 1835 году, в возрасте 30 лет, Гамильтон научился работать с комплексными числами как с парами действительных. Вдохновленный связью между комплексными числами и двумерной геометрией, он в течение многих лет пытался изобрести похожую алгебру, которая играла

бы аналогичную роль в трехмерной геометрии. 16 октября 1843 года, прогуливаясь с женой вдоль Королевского канала по дороге на заседание Королевской ирландской академии в Дублине, он совершил эпохальное открытие. Позже он вспоминал: «Можно сказать, я здесь и сейчас почувствовал, как электрическая цепь мысли замкнулась, а засверкавшие искры оказались фундаментальными соотношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

представленными именно в том виде, в каком я их с тех пор использовал». Остаток своей жизни В.Р. Гамильтон посвятил разработке, популяризации и приложениям алгебры кватернионов в механике и физике. Среди многочисленных работ Гамильтона этого периода следует выделить две наиболее значимые: "Lectures on Quaternions" (1853) и "Elements of Quaternions" (1866).

Среди первых алгебраических работ можно отметить А. Кэли, В.К. Клиффорда, Б. Пирса, К.С. Пирса, Г. Фробениуса, выполненные примерно с 1850 по 1900 г., в которых была установлена связь кватернионов с матрицами и определено место кватернионов в системе различных алгебр, т.е. доказаны положения, называемые соответственно теоремами Фробениуса и Гурвица [2, 4, 5].

В работах Клиффорда также получила дальнейшее развитие теория комплексных кватернионов (бикватернионов). Клиффорд впервые применил бикватернионы к описанию геометрии неевклидовых пространств постоянной кривизны и исследованию механики в этих пространствах. В работах Пуансо, Мебиуса и Шаля установлена эквивалентность произвольного перемещения тела винтовому перемещению и положено начало изучению кинематики и статики, а также сформулировано понятие винта, раскрытое в полной мере английским ученым Р. Боллом в его работе "Treatise on the theory of the screws" (1876). Клиффорд применил к формулировке теории винтов параболические (определенные над дуальными числами) и эллиптические (определенные над двойными числами) бикватернионы. Клиффорд ввел дуальные и двойные числа как некоторое обобщение обычных комплексных чисел. Он показал, что с помощью дуальных чисел можно дать описание винтов в обычном трехмерном евклидовом пространстве, а с помощью эллиптических бикватернионов — описание винтов в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны.

Поскольку рассматриваемый математический аппарат неотделим от описания реального мира, то нужно отметить П.Г.Тэта (1831—1901). Вероятно, под его влиянием Дж. К.Максвелл использовал кватернионы в своем «Трактате по электричеству и магнетизму» [7]. При этом выяснилось, что использование полных кватернионов, а не только их векторных частей, предоставляет естественную возможность записи уравнений Максвелла в виде, явно ковариантном относительно преобразований Лоренца. Такая запись уравнений Максвелла полностью эквивалентна их тензорной формулировке, что легко проверяется при выборе явного представления бикватернионов матрицами 4×4 . Использование полных четырехмерных кватернионов для формулировки уравнений электромагнитного поля имеет еще одну важную особенность. Уравнения Максвелла в кватернионной форме выглядят во многом аналогично соотношениям Коши—Римана в теории функций комплексного переменного и в этом смысле играют роль условий кватернионной аналитичности. Здесь же можно отметить кватернионный аналог специальной теории относительности, сформулированный в 1908 г. Г.Минковским А.В.Конвей (1875—1950) в 1911 г. [9].

В дальнейшем использование кватернионов стало носить все больше практический характер, в связи с чем кватернионный аппарат стал набирать популярность для узкого круга задач, значительно расширив его случаи его применения вне научной среды, но при этом доля исследований непосредственно математического аппарата гиперкомплексных чисел снизилась. Существует множество работ, причем как в зарубежных, так и в отечественных исследованиях, в которых в той или иной степени кватернионы применяются с использованием уже известных вариантов работы с ними. Рассматривая наиболее интересные работы по практическому применению кватернионной алгебры, можно

отметить, что большая часть из них ограничивается использованием кватернионов для обозначения поворотов и определения ориентации тела в пространстве, независимо от тематики применения: от трехмерной визуализации до аэрокосмической навигации.

Так, например, в работах [10 - 17] рассматривается применение кватернионной алгебры при навигации в пространстве, работы [19 - 22] рассматривают применение гиперкомплексных чисел в робототехнических системах, причем в работе [19], считающейся одной из самых значимых по оценке состояния исследований робототехники в настоящее время, описаны основные принципы алгоритмов, используемых роботами, в том числе и с применением гиперкомплексных чисел. Использование алгебры кватернионов в практическом смысле можно наблюдать и в ряде работ, посвящены графическому представлению информации средствами вычислительных машин. Естественно, что многие исследования о представлении отображения трехмерных объектов с помощью кватернионов являются внутренними разработками корпораций и не являются распространёнными научными результатами, тем не менее существуют общие подходы по применению кватернионов для решения задач визуализации трехмерных объектов [23 - 28].

В качестве общей тенденции исследований кватернионной алгебры на основе перечисленных работ можно обозначить выявление областей применения кватернионной алгебры для решения поставленных задач, а также определение ограничений в применении алгоритмов, использующих кватернионы в зависимости от практических вычислительных возможностей. К сожалению, большая часть работ не вносит значимый вклад по отношению к анализу непосредственно математического аппарата гиперкомплексных чисел и его практического применения, несмотря на то, что сами работы являются значимыми в той или иной области.

Говоря о русскоязычных ученых, которые внесли вклад в развитие и исследования кватернионной алгебры, стоит начать с А.П. Котельникова. Считается, что наиболее полно и последовательно винтовое исчисление развито в его работах в тесной связи с его же теорией векторов неевклидовых пространств. Используя получившие в то время широкое признание результаты А. Кэли и Ф. Клейна по проективной интерпретации неевклидовой геометрии, Котельников, естественно, переходит от рассмотрения векторов как упорядоченных пар точек к изучению пар плоскостей (роторов, по его терминологии) и пар прямых (винтов). Работы А.П. Котельникова не приобрели широкой известности. О современном состоянии исследований по теории винтов можно получить представление из монографии [29].

Ученые с постсоветского пространства в настоящее время уделяют алгебре кватернионов достаточно большое внимания в своих исследованиях. Как уже отмечалось, во многих работах по исследованию и разработке аэрокосмических спутников беспилотных летательных аппаратов используется алгебра кватернионов, поскольку она является оптимальной для работы с вращениями в пространстве, однако все они содержат исключительно практическое применение алгебры кватернионов, но лишь некоторые из них содержат исследования структур, описываемых кватернионами. Так, можно выделить обобщающие русскоязычные работы по применению кватернионов в робототехнике [30 - 31] и навигации [32 - 34].

Если рассматривать исследования кватернионной алгебры в настоящий момент времени, то одной из самых значимых современных работ в области исследования представления мира алгеброй кватернионов являются работы [35, 36] в области динамики материальной точки, регуляризации, астеродинамики. В рамках этих работ Челноковым построены новые кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной и осцилляторной формах, предложен кватернионный метод решения задач орбитального движения космических аппаратов. Особо хочется отметить кватернионные модели динамики твердого тела, использующие такие понятия как кватернионы (не векторы!) угловой скорости и углового ускорения с ненулевыми скалярными частями.

Особый интерес представляют работы [37, 38] в которых кватернионная алгебра применяется для распознавания изображений, где рассматриваются основные положения

контурного анализа, применимые к расположенным в трехмерном пространстве группам точек, описанных пучком векторных кватернионов. В этих же работах рассмотрены спектр и корреляционные функции кватернионных сигналов, сформулирована задача фильтрации таких сигналов, синтезированы кватернионные согласованные фильтры.

Среди белорусских ученых следует отметить Петровского Н.А., представителя научной школы «Системы реального времени», область интересов которого относится к проектированию проблемно-ориентированных средств вычислительной техники реального времени для решения задач цифровой обработки сигналов, в частности, для обработки речевых и аудио сигналов, а также компрессии изображений на основе многополосного вейвлет-преобразования, с использованием параунитарного банка фильтров на кватернионах [39 - 42]. Петровским предложен новый подход проектирования и реализации 4- и 8-канальных банков фильтров на основе теории гиперкомплексных чисел, в частности, кватернионов, которая ранее не применялась в области синтеза и анализа цифровых банков фильтров, где умножитель кватернионов представлен как альтернативный модуль построения банка фильтров.

Список литературы

1. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1969. 328 с.
2. *Бурбаки Н.* Очерк по истории математики. М., 1963, 292.
3. *Александрова Н.В.* // Историко-математические исследования. М. Вып. 26. С. 205–234.
4. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М., 1973. 143 с.
5. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1973. 399 с.
6. *Котельников А.П., Фок В.А.* Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.; Л., 1950. С. 7–47.
7. *Максвелл Дж.К.* Статьи и речи. М., 1968. 422 с.
8. *Александрова Н.В.* // Вopr. истории естествознания и техники, 1982. № 1. С. 85–89.
9. *Synge J.E.* // Communications of the Dublin Institute for advanced studies. Ser. A., 1972. Vol. 21. P. 1–67.
10. *Enge P.* WAAS Messaging System: Data Rate, Capacity, and Forward Error Correction // Navigation, Journal of The Institute of Navigation, Vol. 44. № 1, 1997.
11. Global Positioning System: Theory and Applications, Volume I, II. Edited by Parkinson B. W., Spilker J.J., American Institute of Aeronautics and Astronautics. Washington, 1996.
12. *Groves P.D.* Principles of GNSS, Inertial and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems, 2008.
13. *Kaplan E.D.* Understanding GPS: Principles and Applications, Artech House Publishers. Boston, 1996.
14. *Leick A.* GPS satellite surveying. Second edition. John Wiley & Sons, INC. USA, 1995.
15. *Leland E. Cunningham* On the computation of the spherical harmonic term needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. Celestial Mechanics, 1970.
16. *Misra P., Pratt M., Muchnik R., Burke B., Hall T.* GLONASS Performance: Measurement Data Quality and System Upkeep // Proceedings of the ION GPS- 96, 1996.
17. *Parkinson B., Axelrad P.* Autonomous GPS Integrity Monitoring Using the Pseudorange Residual, ION, Vol. 35. № 2. Summer, 1988.
18. *Фридендер Г.О.* Инерциальные системы навигации. // М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
19. *Russell S., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach. 3rd. Upper Saddle River. NJ. USA: Prentice Hall Press, 2009. 1152 p.
20. *Dudek G.* Computational principles of mobile robotics. / G. Dudek, M. Jenkin. CA. PressHall, 2010.
21. *Sieghart R., Nourbakhsh I.R. & Scaramuzza D.* Introduction to Autonomous Mobile Robots / R. Sieghart, I.R. Nourbakhsh, D.Scaramuzza.– Cambridge : MIT Press, 2011. 453 p.

22. Funda J., Taylor R.H., Paul R.P. On Homogeneous Transforms, Quaternions, and Computational Efficiency// IEEE Trans, on Robotics and Automation, 1990. V. 6. № 3. P. 382-388.
23. Dam E.B., Koch M., Lillholm M. Quaternions, Interpolation and Animation // Technical Report DIKU-TR-98/5: Department of Computer Science University of Copenhagen (July 1998), 1998. 34 p.
24. Shoemake K. Animating rotation with quaternion calculus // ACM SIGGRAPH 1987. Course Notes 10, Computer Animation: 3-D Motion, Specification and Control, 1987. P. 37-40.
25. Horn B.K.P. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions // Journal of the Optical Society of America A, 1987. № 4(4, April 1987). Pp. 629-642.
26. Walker M.W., Shao L., Volz R.A. Estimating 3-d location parameters using dual number quaternions // CVGIP: Image Understanding, 1991. № 54. Pp. 358-367.
27. Bleisch S. Evaluating the appropriateness of visually combining quantitative data representations with 3D desktop virtual environments using mixed methods: Ph. D. thesis / S Bleisch, 2011. P. 208.
28. Cozzi P. 3D Engine Design for Virtual Globes. A K Peters/ P. Cozzi, K. Ring. CRC Press, 2011. P. 520.
29. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление. М., 1965. 197 с.
30. Механика промышленных роботов: Учеб. пособие для втузов: В 3 кн. / Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И. Шевелева. М.: Высш. шк., 1988. 304 с.: ил.
31. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. М.: Мир, 1989. 376 с.
32. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 320 с.
33. Жбанов Ю.К., Климов Д.М., Урюпин М.А. Математическое моделирование инерциальных навигационных систем. // Техническая кибернетика. № 1, 1993.
34. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 1. Математические модели инерциальной навигации. // Изд-е 3-е. М. Изд-во МГУ, 2011.
35. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением // М.: Физматлит, 2011. 560 с.
36. Челноков Ю.Н. Кватернионные алгоритмы систем пространственной инерциальной навигации. // Изв. АН СССР. МТТ, 1983. № 6.
37. Кревецкий А.В., Фурман Я.А. Кватернионные сигналы для систем ориентации по изображениям звездного неба // Сборник материалов 5-й Международной конференции «Распознавание-2001». Курск. 2001.
38. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов/ Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий и др.; Под ред. Я.А. Фурмана. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 456 с.
39. Петровский Н.А. Процессор обработки изображения на многополосном ВЕЙВЛЕТ-преобразовании в алгебре кватернионов [Текст] / Н. А. Петровский // Доклады БГУИР: научный журнал, 2011. № 7. С. 76-82.
40. Оптимальное распределение бит в параунитарном субполосном кодере изображений на основе алгебры кватернионов / Н. А. Петровский // Доклады БГУИР: научный журнал, 2014. № 1. С. 72-77.
41. Петровский Н.А. CORDIC-техника для фиксированного угла вращения в операции умножения кватернионов [Текст] / Н.А. Петровский, А.В. Станкевич, А.А. Петровский // Информатика, 2015. № 4. - С 85-108.
42. Рыбенков Е.В. Синтез параунитарных банков фильтров в алгебре кватернионов для вычислительных структур с фиксированной запятой / Е.В. Рыбенков, Н.А. Петровский // Доклады БГУИР, 2016. № 8. С. 22-28.