УДК 512.643.8 Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006, вып. 2

Г. М. Хитров

О РАЗНООБРАЗИИ ГРАФА И ПРИМЕНЕНИИ ЭТОГО ПОНЯТИЯ К ПРОБЛЕМЕ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

В настоящей статье обобщаются некоторые понятия, введенные ранее в работах [1, 2], и показывается, что при установлении изоморфизма графов число формальных переборов всегда может быть уменьшено относительно числа полного перебора. Данная работа основывается на том, что граф задается своей матрицей смежности. При этом рассматриваются только те свойства графов, которые не зависят от нумерации вершин графа.

Как известно, матрица смежности графа зависит от нумерации вершин и при изменении их нумерации переходит в перестановочно подобную (**P**-подобную) матрицу к исходной. Другими словами, если в исходной нумерации вершин граф Г задается матрицей смежности A и если изменение нумерации вершин задается матрицей перестановки P, то тот же граф Г в новой нумерации вершин задается матрицей $B = PAP'$ (штрих вверху обозначения матрицы здесь и далее означает транспонирование).

Свойства матриц смежности, которые не меняются при перестановочном преобразовании (преобразовании **P**-подобия), будем, как это и принято, относить к свойствам графа (см., например, понятие спектра графа). Рассмотрим некоторые свойства матриц, описываемых следующими определениями.

Определение 1 [2, с. 737]. Будем называть две матрицы одинаковыми по составу, если одна получается из другой переменой местами строк.

Определение 2. Уточним определение 1. Будем говорить, что матрица F размерности $[n \times m]$ имеет одинаковый состав с матрицей T той же размерности, если существует такая матрица перестановки P размерности $[n \times n]$, что и $PF = T$.

Ясно, что если F имеет одинаковый состав с матрицей T, то и T имеет одинаковый состав с матрицей F, так как из $PF = T$ следует, что $P'T = F$. Поэтому будем иногда говорить просто, что матрицы F и T одинаковы по составу, подразумевая, что от одной матрицы можно перейти к другой с помощью умножения одной из них слева на некоторую матрицу перестановки.

Определение 3 [1, с. 9]. Разнообразием матрицы будем называть число различных строк матрицы. Строки матрицы называются различными (разными), если они отличаются хотя бы одним элементом, стоящим на одинаковых местах в строках.

Если в матрице имеются одинаковые строки, то соберем их в группы. Тогда разнообразие матрицы в указанном выше смысле есть не что иное, как число различных групп одинаковых строк матрицы. Если мы хотим учитывать не только его, но и число одинаковых строк в каждой группе, то будем вынуждены либо ввести еще одно определение, либо расширить предыдущее. Поскольку, говоря о конечной матрице, мы всегда подразумеваем, что у нее задано общее число строк, то, говоря о разнообразии матрицы в указанном выше смысле, всегда считаем, что оно связано с заданным числом строк. Потому расширим данное выше понятие разнообразия матрицы.

Определение 4. Разнообразием матрицы F будем называть число различных строк в матрице F с учетом их кратности. Так, если в матрице F размерности

$[n \times m]$ имеется k групп одинаковых строк с числом строк в группе $n_1, n_2, .., n_k$ соответственно, где числа $n_1, n_2, .., n_k$ связаны условием $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, то набор чисел $\rho(F) = (k, n_1, .., n_k; \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n)$ определяет разнообразие матрицы F. Часто разнообразие будем отождествлять с первым числом в таком наборе, т. е. писать $\rho(F) = k$, полагая, что это не приведет к недоразумениям.

Если две матрицы одинаковы по составу, то они имеют не только одинаковое разнообразие, но и состоят из одних и тех же элементов. Потому, когда говорим о двух матрицах одинакового состава, введенное определение разнообразия становится излишним. Но как только ограничиваемся одной матрицей, так это определение приобретает самостоятельный смысл.

В дальнейшем введенное определение будем в основном связывать с некоторой вспомогательной матрицей R_A, которая будет строиться по матрице смежности A графа Г.

Напомним, что матрицей смежности графа с n вершинами называется квадратная (0,1)-матрица размерности $[n \times n]$, у которой на месте (i, j) стоит единица, если имеется дуга, идущая из i-й вершины в j-ю, и нуль – в противном случае. Если наряду с дугой, идущей из i-й вершины в j-ю, имеется дуга, идущая из j-й вершины в i-ю, то говорят, что i-я вершина соединена с j-й вершиной ребром. Граф, у которого вершины могут быть соединены только простыми (некратными) ребрами и не имеющий петель (дуг, идущих из вершины в себя), называется обыкновенным.

Возвращаясь к вспомогательной матрице R_A, определим понятия и обозначения, используемые для ее построения, а также введем обозначения:

e – столбец из единиц;

s_{A^j} – столбец строчных сумм j-й степени матрицы A, т. е. $s_{A^j} = A^j e$;

q_{A^j} – столбец столбцовых сумм j-й степени матрицы A, т. е. $q_{A^j} = A'^j e$;

d_{A^j} – диагональ j-й степени матрицы A, выписанная в виде столбца, $j = 1, 2, .., n$;

K – матрица полного n-вершинного обыкновенного графа, т. е. матрица, у которой все недиагональные элементы – единицы, а элементы главной диагонали – нули;

если A – матрица смежности обыкновенного графа, то $\widetilde{A}$ – матрица смежности дополнительного обыкновенного графа, т. е. $\widetilde{A} = K - A$;

$\prod_n$ – множество матриц перестановок размерности n;

E – единичная матрица;

$\lambda(A)$ – число Фробениуса–Перрона [3, с. 141] – максимальное собственное число неотрицательной матрицы A;

X – вектор Фробениуса–Перрона – неотрицательный собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda(A)$, т. е. X удовлетворяет соотношению $AX = \lambda(A)X$.

Зададим теперь матрицу R_A как матрицу, построенную из столбцов:

$$R_A = (s_A, q_A, d_A, s_{A^2}, q_{A^2}, d_{A^2}, ..., s_{A^n}, q_{A^n}, d_{A^n})$$

(n – размерность матрицы A).

Определение 5. Разнообразием графа будем называть разнообразие матрицы [1] $R_A = (s_A, q_A, d_A, s_{A^2}, q_{A^2}, d_{A^2}, ..., s_{A^n}, q_{A^n}, d_{A^n})$, построенной по матрице смежности A графа Г.

Будем обозначать разнообразие графа Г через $\rho(\Gamma)$ или $\rho(R_A)$.

Покажем, что это определение корректно. Действительно, если нумерация вершин в графе изменилась, то изменилась и матрица смежности графа. Пусть теперь тот же граф задается матрицей смежности B, причем $B = PAP'$, $P \in \Pi_n$. Рассмотрим цепочки следствий, получаемых из условия $B = PAP'$, $P \in \Pi_n$, сделав предварительно одно очевидное замечание: (0,1)-матрица P является матрицей перестановки, т. е. $P \in \Pi_n$, тогда и только тогда, когда $Pe = P'e = e$. Итак:

$B = PAP'$, $P \in \Pi \Rightarrow B^j e = PA^j P'e \Rightarrow B^j e = PA^j e \Rightarrow s_{B^j} = Ps_{A^j}$;

$B = PAP'$, $P \in \Pi \Rightarrow B' = PA'P' \Rightarrow B'^j e = PA'^j \Rightarrow q_{B^j} = Pq_{A^j}$;

$B = PAP'$, $P \in \Pi \Rightarrow d_B = Pd_A \Rightarrow d_{B^j} = Pd_{A^j}$.

Замечание 1. Выписанные цепочки охватывают большинство необходимых условий перестановочного подобия (0,1)-матриц и, как следствие, необходимых условий изоморфизма графов, заданных матрицами смежности A и B [1].

Так как $R_B = (s_B, q_B, d_B, s_{B^2}, q_{B^2}, d_{B^2}, ..., s_{B^n}, q_{B^n}, d_{B^n})$, то из этих цепочек тотчас же следует, что $R_B = (Ps_A, Pq_A, Pd_A, Ps_{A^2}, Pq_{A^2}, Pd_{A^2}, ..., Ps_{A^n}, Pq_{A^n}, Pd_{A^n})$, т. е. $R_B = PR_A$. Последнее равенство означает, что матрицы R_B и R_A имеют одинаковый состав и, как следствие, их разнообразия равны. Следовательно, независимо от того, какой матрицей смежности – A или B – задается граф, разнообразие построенных по ним вспомогательных матриц R_B и R_A остается одним и тем же и характеризует сам граф. Это и означает, что введенное выше определение разнообразия графа корректно.

Поясним, почему при построении матрицы R по квадратной матрице A размерности $[n \times n]$ используются ее степени до n-й включительно. **P**-подобие – частный случай подобия матриц. Известно, что характеристические многочлены подобных матриц равны. Многочлены равны, если равны их коэффициенты. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы могут быть вычислены через следы степеней матриц, с первой степени до n-й включительно. Именно потому для определения разнообразия графа выбран данный вид матрицы R.

Понятно, что в некоторых частных случаях разнообразие графа можно определить, не выписывая всю матрицу R.

Действительно, если матрица $A = K$ или $A = 0$, то $\rho(R_A) = 1$. Если $\rho(s_A) = n$ или $\rho(q_A) = n$, то $\rho(R_A) = n$. Это тривиальные случаи.

Рассмотрим нетривиальный случай. Предположим, что известна группа автоморфизмов графа Γ с матрицей смежности A. Обозначим ее через G_A, т. е. положим $G_A = \{P : P \in \Pi_n, \quad PAP' = A\}$. Обозначим через $G_{R_A} = \{P : P \in \Pi_n, \quad PR_A = R_A\}$ группу автоморфизмов матрицы R_A (таким же образом может быть определена и группа автоморфизмов для любого столбца размерности n). В отличие от G_A, группа G_{R_A} вычисляется (и даже выписывается) весьма просто.

Действительно, предположим, что матрица $\breve{A}$ такова, что $R_{\breve{A}}$ имеет специальный вид, а именно, все одинаковые строки идут подряд, т. е. собраны в группы. Пусть число этих групп равно k, т. е. $\rho(R_{\breve{A}}) = k$, и размерности их обозначим через n_i, $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Тогда матрицы $P \in G_{R_{\breve{A}}}$ имеют следующий квазидиагональный вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_2 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & ... & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P_k \end{pmatrix}, \quad \text{где } P_i \in \Pi_n,\ i = 1, 2, .., k.$$

Число таких матриц $N = n_1! n_2! \cdots n_k!$ и равно порядку группы $G_{R_{\breve{A}}}$.

Если R_A имеет произвольный вид, то существует матрица $H \in \Pi_n$ такая, что HR_A будет иметь уже требуемый упорядоченный вид $R_{\breve{A}}$, при этом $\breve{A} = HAH'$.

З а м е ч а н и е 2. Из определения разнообразия матрицы следует, что оно не меняется, если мы умножим элементы любого ее столбца на число, отличное от нуля. И оно может лишь стать больше, если увеличим число столбцов в матрице путем добавления новых.

З а м е ч а н и е 3. Мы можем менять вид вспомогательной матрицы R_A, через которую определяли разнообразие графа, заданного матрицей смежности A, путем добавления новых столбцов Z_k. При этом добавляемые столбцы Z_k должны удовлетворять требованию: если матрица смежности графа A меняется по закону PAP', где $P \in \Pi_n$, то вектора Z_k меняются по закону PZ_k для тех же самых P. Например (см. [1]), если X – вектор Фробениуса–Перрона неразложимой матрицы смежности A, то PX – вектор Фробениуса–Перрона матрицы смежности PAP'. Добавление столбца X в матрицу R_A для неразложимой матрицы A может лишь увеличить разнообразие графа (см. замечание 2), что, как будет показано ниже, вполне соответствует цели нашего исследования.

Утверждение 1. $G_{R_A} \supset G_A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \in G_A$, т. е. $PAP' = A$. Рассмотрим цепочки следствий из этого равенства: $(PAP')^j = A^j \Rightarrow PA^jP' = A^j \Rightarrow PA^je = A^je \Rightarrow Ps_{A^j} = s_{A^j}$, т. е. $P \in G_{s_{A^j}}$, $j = 1, ..., n$.

Аналогично показывается, что $P \in G_{q_{A^j}}$. Несложно показать, что $d_{PA^jP'} = Pd_{A^j}$, и, следовательно, для $P \in G_A$ будет $d_{PA^jP'} = Pd_{A^j} = d_{A^j}$ или $P \in G_{d_{A^j}}$. Далее из $PAP' = A$ и $AX = \lambda(A)X$ вытекает, что $PX = X$, т. е. $P \in G_X$.

Из того что P оставляет неизменным каждый столбец матрицы R_A, вытекает, что P оставляет неизменным матрицу R_A, т. е. $P \in G_{R_A}$. Тем самым, если $P \in G_A$, то $P \in G_{R_A}$, т. е. $G_{R_A} \supset G_A$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что если порядок какой-нибудь группы G_A является кратным n, а n – простое число, то $\rho(R_A) = 1$ и порядок группы G_{R_A} равен $n!$. Последнее вытекает из того, что порядок группы G_{R_A}, равный $N = n_1!n_2! \cdots n_k!$, должен делиться на n, а это возможно только при указанных выше условиях.

Рассмотрим в качестве примера следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее максимальный порядок группы G_A равен 10. Следовательно, $\rho(R_A) = 1$, и порядок группы G_{R_A} равен 5! или 120. Сказанное выше относительно данной матрицы A проверяется непосредственными вычислениями.

Следует отметить, что введенное в работе [1] понятие разнообразия матрицы и обобщенное здесь до понятия разнообразия графа является важной характеристикой графа. Оно позволяет оценить количество матриц перестановок, подлежащих перебору при формальной проверке двух графов с матрицами смежности A и B на изоморфность. Проверка при условии, что $R_A = R_B$, состоит в том, что рассматривается произведение PAP' ($P \in G_{R_A}$) и сравнивается с матрицей B. Если для некоторой матрицы перестановки P произведение равно матрице B, то матрицы A и B **P**-подобны, а соответствующие им графы изоморфны. Если же для всех матриц перестановок P из класса, определяемого матрицей R_A, выписанное выше произведение не равно матрице B, то графы с матрицами смежности A и B не изоморфны.

Введенное понятие разнообразия графа позволяет говорить, что изоморфными могут быть лишь графы, имеющие одинаковое разнообразие, и если оно больше единицы, то количество перебираемых матриц перестановок при проверке на изоморфизм n-вершинных графов меньше, чем $n!$ (полный перебор).

Отдельного исследования требует лишь случай, когда разнообразие графа равно единице. Действительно ли для установления изоморфности двух n-вершинных графов с разнообразием, равным единице, в общем случае необходим полный, описанный выше, перебор?

Изучение этой проблемы начнем с рассмотрения обыкновенных графов с разнообразием, равным единице. Матрицы смежности таких графов – симметрические (0,1)-матрицы с нулевой главной диагональю. Будем предполагать, что рассматриваются только связные графы, т. е. графы, матрицы смежности которых являются неразложимыми матрицами. Более того, будем рассматривать только такие графы, дополнительные к которым также являются связными, т. е. графы, у которых не только их матрицы смежности A неразложимы, но неразложимы и матрицы $\widetilde{A} = K - A$. Это не нарушает общности исследования, так как из $PAP' = B$ всегда следует $P\widetilde{A}P' = \widetilde{B}$, и наоборот. Потому проверку на изоморфность заданных графов можно заменить задачей проверки на изоморфность дополнительных графов. Если у дополнительных графов матрицы смежности разложимы, то мы начинаем рассматривать их и тем самым уходим от полного перебора матриц перестановок размерности n.

Итак, рассмотрим обыкновенный граф с разнообразием, равным единице, у которого матрица смежности A и матрица смежности дополнительного графа $\widetilde{A}$ являются неразложимыми. Установим, какой вид будет иметь в данном случае матрица R_A.

В силу симметрии матрицы A, все $s_{A^j} = q_{A^j}$ $(j = 1, 2, ..., n)$, потому

$$R_A = (s_A, d_A, s_{A^2}, d_{A^2}, ..., s_{A^n}, d_{A^n}).$$

В силу того что разнообразие матрицы R_A равно единице, все ее столбцы R_A будут пропорциональны столбцу e, т. е. $R_A = (\alpha e, 0e, \beta e, \alpha e, ..., \sigma e)$. Выписанный вид матрицы R_A может быть интересен разве лишь интерпретацией коэффициентов $\alpha, \beta, ..., \sigma$. Так, при выписывании данного вида матрицы учтено, что для матрицы смежности A обыкновенного графа $s_A = d_{A^2}$, т. е. α равно числу ребер, выходящих из вершины i, или числу циклов длины 2, проходящих через i-ю вершину, или числу единиц в i-й строке матрицы A. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $2 \leqslant \alpha \leqslant [(n-1)/2]$, здесь через $[(n-1)/2]$ обозначена целая часть числа $(n-1)/2$.

Действительно, случай $\alpha = 0$ означает, что матрица $A = 0$, и потому исключается из рассмотрения как тривиальный. В случае $\alpha = 1$ имеем $Ae = A'e = e$, т. е. A – матрица перестановки, причем симметрическая. Чтобы она была матрицей обыкновенного графа, она не должна иметь единиц на диагонали, и, следовательно, ее размерность может быть только четной. Симметричная матрица перестановки четной размерности больше двух разложима, а случай разложимой матрицы исключен нами из рассмотрения. В итоге мы и приходим к ограничению числа снизу: $2 \leqslant \alpha$. Ограничение α сверху объясняется тем, что от рассмотрения матрицы A мы всегда можем перейти к изучению матрицы $\widetilde{A}$. Кроме указанных ограничений, имеется ограничение, вытекающее из симметрии (0,1)-матриц. Действительно, число ребер у обыкновенного графа всегда четное (в силу симметрии матрицы, число единиц над диагональю равно числу единиц под диагональю). Или, по-другому, сумма элементов матрицы смежности обыкновенного графа – всегда четное число. Это означает, что α и n не могут быть одновременно нечетными числами, так как их произведение равно сумме элементов матрицы смежности обыкновенного графа.

Утверждение 2. Если произведение αn $(2 \leqslant \alpha \leqslant [(n-1)/2])$ – четное число, то всегда существуют симметричные (0,1)-матрицы с нулевой диагональю и разнообразием, равным единице.

Доказательство. Пусть α – четное число. Тогда в качестве матриц A можно взять, например, матрицы вида $A = \sum_{i=1}^{q}(P^i + P'^i)$, где $q = \alpha/2$, а

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} -$$

циклическая матрица n-го порядка. Матрица P – неразложимая, тогда и матрица A – неразложимая. Произведение любой степени матрицы P или P' на столбец e будет равно столбцу e, следовательно, произведение степени матрицы A на столбец e будет столбцом, пропорциональным e. Покажем, что и вектор d_{A^j} в рассматриваемом случае будет пропорционален столбцу e. Действительно, в силу перестановочности матриц P и P' $(PP' = E)$, степень матрицы A^j будет состоять из слагаемых, являющихся степенями матриц P и P' с некоторыми коэффициентами. Степени P^m и P'^k будут иметь единичную диагональ, если m и k кратны n, и нулевую диагональ – в противном случае. В любом случае d_{A^j} будет пропорционален столбцу e. Тем самым мы построили неразложимые симметричные (0,1)-матрицы $A = \sum_{i=1}^{q}(P^i + P'^i)$ с $\rho(R_A) = 1$ и четным α.

Пусть теперь α – нечетное число, тогда n – обязательно четное. Возьмем в качестве A матрицу вида $A = Q + \sum_{i=1}^{q}(P^{2i} + P'^{2i})$. Здесь P – то же самое, что и в предыдущем случае, $q = (\alpha - 1)/2$, Q – матрица перестановки – диагональная матрица с единицами вдоль побочной диагонали, т. е. диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Ясно, что $Q^2 = E$. В силу четности n, побочная диагональ не имеет общих элементов с главной диагональю, и матрица A является симметричной (0,1)-матрицей с нулевой главной диагональю. Из цикличности P и $n > 2$ (случай $n = 2$ не представляет интереса) получаем, что P^2 неразложима. Как и в предыдущем случае, произведение степени матрицы A на столбец e будет столбцом, пропорциональным e. Поскольку $QP^jQ = P'^j$, а у матриц $QP^{2i}, QP'^{2i}, P^{2i}Q, P'^{2i}Q$ главная диагональ нулевая, то столбцы d_{A^j} будут пропорциональны e. То есть и для этой матрицы A имеем $\rho(R_A) = 1$. Утверждение доказано полностью.

Казалось бы, построенные типы матриц смежности графов с разнообразием, равным единице, показывают, что даже для обыкновенных графов при установлении их изоморфизма не избежать полного перебора. Однако это не так.

Воспользуемся наблюдением из [2], заключающимся в следующем. Если в двух **P**-подобных (0,1)-матрицах с нулевыми главными диагоналями поставим по одной единице на соответствующие места, то измененные матрицы останутся **P**-подобными. И наоборот, если в двух **P**-подобных (0,1)-матрицах со следом, равным единице, удалим единицы с диагонали, то полученные таким путем матрицы останутся **P**-подобными.

Применим это наблюдение к установлению перестановочного подобия двух матриц A и B с разнообразием матриц R_A и R_B, равным единице, и имеющих одинаковый состав. Поставим в матрицах A и B по единице на места (i,i) и (j,j) соответственно. Обозначим полученные матрицы через $A^{(i)}$ и $B^{(j)}$ соответственно. Тогда $\rho(R_{A^{(i)}}) \geqslant 2$ и $\rho(R_{B^{(j)}}) \geqslant 2$. Будем для определенности считать, что единица в матрицу A поставлена на место $(1,1)$ и, кроме того, матрица $A^{(1)}$ такова, что в $R_{A^{(1)}}$ одинаковые строки собраны в группы и следуют друг за другом.

Начнем теперь перебор (напомню, что нас интересует проблема полного перебора, точнее, когда его можно избежать) следующим образом.

Берем матрицы $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(j)}}$, $j = 1,2,...,n$. Если матрицы $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(j)}}$ для выбранного j различны по составу, то $A^{(1)}$ и $B^{(j)}$ не подобны перестановочно. И мы переходим к следующему j. Если для выбранного j матрицы $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(j)}}$ одинаковы по составу, то найдется такая матрица перестановки $H^{(j)}$, что $R_{A^{(1)}} = H^{(j)} R_{B^{(j)}}$. Обозначим через $C^{(j)}$ матрицу $C^{(j)} = H^{(j)} B^{(j)} H'^{(j)}$ и начинаем перебор матриц $P \in G_{R_{A^{(1)}}}$, т. е. начинаем вычислять матрицы $L_P^{(j)} = A^{(1)} - PC^{(j)}P'$. Если для данного j и всех $P \in G_{R_{A^{(1)}}}$ получим, что $L_P^{(j)} \neq 0$, то $A^{(1)}$ и C^j, а следовательно, $A^{(1)}$ и $B^{(j)}$ перестановочно не подобны, и мы переходим к следующему j. Если же для данного j найдется такое $P \in G_{R_{A^{(1)}}}$, что $L_P^{(j)} = 0$, то $A^{(1)}$ и $B^{(j)}$ перестановочно подобны и $A^{(1)} = PH^{(j)}B^{(j)}H'^{(j)}P'$. Отсюда перестановочно подобны A и B, причем $A = PH^{(j)}BH'^{(j)}P'$. Перебирая таким образом j, мы либо на некотором шаге получим, что A и B перестановочно подобны, либо для всех j $A^{(1)}$ и $B^{(j)}$ перестановочно не подобны, тогда A и B перестановочно не подобны.

Понятно, что применять данную процедуру перебора следует лишь тогда, когда $\rho(R_{A^{(1)}}) > 2$, в этом случае общее число вариантов перебора меньше $n!$, т. е. полного перебора.

Утверждение 3. Всегда при указанных выше условиях на матрицу $A^{(1)}$, $\rho(R_{A^{(1)}}) > 2$.

Доказательство. Так как предполагалось, что матрица $A^{(1)}$ – неразложимая с одной единицей на главной диагонали на месте $(1,1)$, то при доказательстве утверждения 3 будем пользоваться очевидным соображением: разнообразие матрицы $R_{A^{(1)}}$ (в смысле числа различных строк) всегда больше либо равно разнообразию подматрицы матрицы $R_{A^{(1)}}$, построенной из произвольного набора столбцов матрицы $R_{A^{(1)}}$.

Воспользуемся также результатом работы [1], заключающимся в том, что если (0,1)-матрица $A^{(1)}$ неразложима, то в нашу матрицу $R_{A^{(1)}}$ всегда может быть включен в качестве одного из столбцов вектор Фробениуса–Перрона – положительный собственный вектор X матрицы $A^{(1)}$, отвечающий максимальному положительному собственному числу $\lambda(A^{(1)})$.

Возьмем подматрицу $(d_{A^{(1)}}, X)$ матрицы $R_{A^{(1)}}$, образованную двумя выписанными столбцами (напомним, что, в отличие от матрицы A, в матрице $A^{(1)}$ на месте $(1,1)$ стоит единица). Ясно, что $\rho((d_{A^{(1)}}, X)) \geqslant 2$. Покажем, что $\rho((d_{A^{(1)}}, X)) \neq 2$.

От противного, пусть $\rho((d_{A^{(1)}}, X)) = 2$. Тогда, в силу того, что $d_{A^{(1)}}$ совпадает с первым столбцом единичной матрицы, следует, что у вектора X все положительные элементы, начиная со второго, совпадают между собой. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что они равны единице. Так как $\rho(R_A) = 1$, то $Ae = s_A = \alpha e$. Далее, $A^{(1)}e = s_{A^{(1)}}$, причем $s_{A^{(1)}}$ отличается от s_A только первой координатной, которая в $s_{A^{(1)}}$ равна $\alpha+1$. Из вида $s_{A^{(1)}}$ также следует, что максимальное собственное число матрицы заключено в промежутке $\alpha < \lambda(A^{(1)} < \alpha + 1$ (см. [3, с. 149]). При указанных ограничениях на $\lambda(A^{(1)}$ и предположениях относительно координат вектора X n покомпонентных равенств $A^{(1)}X = \lambda(A^{(1)}X$ не может быть выполнено по крайней мере в $n-\alpha-1$ случаях. Это противоречит предположению, что $\rho(d_{A^{(1)}}, X) = 2$. Следовательно, $\rho(d_{A^{(1)}}, X) > 2$, откуда следует утверждение 3.

П р и м е р. Рассмотрим матрицы A и B десятого порядка с разнообразием, равным единице. Пусть $A = P^2 + P'^2 + Q$ и $B = P^4 + P'^4 + Q$, где P – циклическая матрица перестановки десятого порядка, а Q – диагональная матрица десятого порядка с единицами вдоль побочной диагонали (диагонали, идущей из правого верхнего угла в левый нижний). Как было показано в общем случае, разнообразие матриц R_A и R_B равно единице, и непосредственной проверкой можно убедиться, что R_A и R_B имеют одинаковый состав. Обозначим через $E^{(j)}$ матрицу, у которой на месте (j,j) стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Положим $A^{(1)} = P^2 + P'^2 + Q + E^{(1)}$ и $B^{(1)} = P^4 + P'^4 + Q + E^{(1)}$. Выпишем матрицы $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(1)}}$ в явном виде, причем в матрицах $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(1)}}$ (без потери нужной информации) достаточно выписать по 10 первых столбцов:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix};$$

$$R_{A^{(1)}} = \begin{pmatrix} 4&1&13&4&43&7&136&29&437&62&\dots\\ 3&0&9&3&29&0&89&19&285&6&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&100&20&311&15&\dots\\ 3&0&9&3&27&0&84&19&259&2&\dots\\ 3&0&9&3&28&0&86&19&270&3&\dots\\ 3&0&9&3&27&0&84&19&259&2&\dots\\ 3&0&9&3&28&0&86&19&270&3&\dots\\ 3&0&9&3&29&0&89&19&285&6&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&100&20&311&15&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&101&20&314&17&\dots \end{pmatrix},$$

$$R_{B^{(1)}} = \begin{pmatrix} 4&1&13&4&43&7&136&29&437&62&\dots\\ 3&0&9&3&27&0&84&19&259&2&\dots\\ 3&0&9&3&28&0&86&19&270&3&\dots\\ 3&0&9&3&29&0&89&19&285&6&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&100&20&311&15&\dots\\ 3&0&9&3&29&0&89&19&285&6&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&100&20&311&15&\dots\\ 3&0&9&3&27&0&84&19&259&2&\dots\\ 3&0&9&3&28&0&86&19&270&3&\dots\\ 3&0&10&3&31&1&101&20&314&17&\dots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $R_{A^{(1)}}$ и $R_{B^{(1)}}$ имеют одинаковое разнообразие $\rho(R_{A^{(1)}}) = \rho(R_{B^{(1)}}) = (6,1,1,2,2,2,2)$ и одинаковый состав. Действительно, $R_{A^{(1)}} = WR_{B^{(1)}}$, где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, для того чтобы проверить, изоморфны ли матрицы $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$, достаточно перебрать не более $2!2!2!2! = 16$ вариантов произведения матриц $PWB^{(1)}W'P'$, где $P \in G_{R_{A^{(1)}}}$.

В общем случае для проверки, изоморфны ли матрицы A и B или нет, необходимо перебрать не более 160 вариантов, вместо полного перебора вариантов, число которых равно $10! = 3\,628\,800$.

Для нашего примера ответ получается сразу – матрицы A и B изоморфны, поскольку $A^{(1)} = WB^{(1)}W'$ и, следовательно, $A = WBW'$.

З а м е ч а н и е 4. В нашем примере разнообразие матрицы $R_{A^{(1)}}$ совпадает с разнообразием любого ее столбца, начиная с девятого.

Утверждение 4. Если (0,1)-матрица A, для которой выполнено условие $\rho(R_A) = 1$, разложима, то с помощью перестановки рядов (перестановки строк и такой же перестановки столбцов) она может быть приведена к квазидиагональному виду.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho(R_A) = 1$, тогда $s_A = Ae = \alpha e$ и $q_A = A'e = \alpha e$ $(\alpha \geqslant 1)$. Из предположения разложимости матрицы A следует, что существует такая матрица перестановки P, что $A_D = PAP' = \begin{pmatrix} A_1 & * & ... & * & * \\ 0 & A_2 & ... & * & * \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{k-1} & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & A_k \end{pmatrix}$, где матрицы $A_1, A_2, ..., A_k$ – квадратные неразложимые матрицы, 0 – нулевые блоки соответствующих размерностей, $*$ – блоки, которые могут быть ненулевыми. Из $s_A = Ae = \alpha e$ вытекает, что $s_{A_D} = A_D e = \alpha e$, и, таким образом, $s_{A_k} = A_k e = \alpha e$. Из неразложимости матрицы A_k следует, что $\lambda(A_k)$ – максимальное собственное число матрицы A_k – заключено между максимальной и минимальной строчными суммами этой матрицы (между максимальным и минимальным элементами вектора s_{A_k}). Поскольку все элементы вектора s_{A_k} равны α, то $\lambda(A_k) = \alpha$.

Из тех же соображений получаем, что $\lambda(A_k) = \alpha$ заключено между максимальной и минимальной столбцовыми суммами матрицы A_k. Любая столбцовая сумма матрицы A_k является частью соответствующей столбцовой суммы матрицы A_D, которые все равны α $(q_{A_D} = A'_D e = \alpha e)$. Следовательно, все столбцовые суммы матрицы A_k не могут быть больше α, но не могут быть и меньше α. То есть все они равны α. Это означает, что все блоки $*$, расположенные над матрицей A_k, нулевые. По аналогии получаем затем, что все блоки $*$ – нулевые, т. е. матрица A_D – квазидиагональная. Утверждение 4 доказано.

З а м е ч а н и е 5. При доказательстве утверждения 3 нигде не использовалась симметричность матрицы A, применялись лишь факт неразложимости (в этом случае положительный вектор X определяется единственным образом с точностью до постоянного положительного множителя) и то, что у матрицы A главная диагональ нулевая. Когда $A = E + \widehat{A}$ (напомним, что из $\rho(R_A) = 1$ следует, что матрица A может иметь только нулевую или единичную диагональ), мы всегда от рассмотрения матрицы A можем перейти к рассмотрению (0,1)-матрицы $\widehat{A}$.

Действительно, из $B = PAP'$ и $A = E + \widehat{A}$, $B = E + \widehat{B}$ вытекает, что $\widehat{B} = P\widehat{A}P'$ и обратно. Поэтому решение задачи на перестановочное подобие матриц A и B с единичными главными диагоналями можем заменить аналогичной задачей, но уже для матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ с нулевыми диагоналями, для которых сможем воспользоваться утверждением 3.

Итак, можно утверждать, что в случае, когда $\rho(R_A) = 1$, мы всегда от матрицы A сможем перейти к эквивалентной в отношении $\mathbf{P}$-подобия матрице, для которой ее вспомогательная матрица будет иметь разнообразие больше двух. Следовательно, при установлении изоморфизма графов число формальных переборов всегда может быть уменьшено относительно числа полного перебора.

Summary

Khitrov G. M. Graph's diversity and its application to the graphs isomorphism problem.

Graph's diversity definition and its application to the graphs isomorphism problem are examined.

Литература

1. *Беспалов А. А.* Матричный метод проверки изоморфизма графов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2004. Вып. 3–4. С. 3–12.

2. *Беспалов А. А.* Р-подобие матриц // Устойчивость и процессы управления: Труды междунар. конференции. СПб., 2005. С. 731–740.

3. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Пер. с англ. А. В. Малишевского; Под ред. Э. М. Бравермана. М.: Мир, 1972. 517 с.

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2005 г.