8. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
9. *Плиско В.Е.* Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, № 2. 315–334.

Поступила в редакцию
23.10.2015

УДК 515.12

О РАВНОМЕРНО НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. В. Богомолов[1]

Топологическое пространство X равномерно нормально, если система $\mathcal{U}$ всех симметричных окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$ образует равномерность на X. Окрестностью диагонали называется любое подмножество, внутренность которого содержит диагональ. Доказывается, что Σ-произведение перистых линделефовых пространств счетной тесноты равномерно нормально.

Ключевые слова: равномерная нормальность, равномерность, Σ-произведение, счетная теснота, F_σ-δ-нормальность.

A topological space X is uniformly normal if the family $\mathcal{U}$ of all symmetric neighborhoods of the diagonal $\Delta \subset X \times X$ forms a uniformity on X. A neighborhood of the diagonal is any subset whose interior contains the diagonal. It is proved that the Σ-product of Lindelof p-spaces of countable tightness is uniformly normal.

Key words: uniform normality, uniformity, Σ-product, countable tightness, F_σ-δ-normality.

Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются тихоновскими. Терминология и обозначения, не разъясняемые в этой заметке, следуют книге [1]. Окрестностью диагонали квадрата топологического пространства называется любое подмножество, внутренность которого содержит диагональ [2]. Топологическое пространство X с топологией τ будем называть *равномерно нормальным*, если система $\mathcal{U}$ всех симметричных окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$ образует равномерность на X. При этом, разумеется, равномерность $\mathcal{U}$ индуцирует исходную топологию τ.

Предложение 1. *Всякое равномерно нормальное пространство коллективно нормально.*

Примером нормального пространства, не являющегося равномерно нормальным, может служить известный пример Бинга [1, пример 5.1.23]. Из того, что в любое открытое покрытие паракомпакта можно звездно вписать открытое покрытие [1, теорема 5.1.12], следует

Предложение 2. *Всякий паракомпакт является равномерно нормальным пространством.*

Примеры равномерно нормальных пространств, не являющихся паракомпактами, строятся с помощью следующей конструкции Σ-произведения [2]. Пусть $\{X_s : s \in S\}$ — семейство топологических пространств, и пусть $a = \{a_s\}$ — точка произведения $\prod\{X_s : s \in S\}$. Тогда Σ-произведением пространств $X_s, s \in S$, с центром a называется подпространство $\Sigma(a)$ произведения $\prod\{X_s : s \in S\}$, состоящее из всех таких точек $\{x_s\}$, что $x_s \neq a_s$ не более чем для счетного числа индексов $s \in S$. Σ-произведение, не совпадающее с произведением, не может быть паракомпактным пространством. Известно, что Σ-произведение компактов может не быть и нормальным пространством (см., например, [3]). В то же время в работе [2] доказана

Теорема 1. *Σ-произведение полных сепарабельных метрических пространств равномерно нормально.*

Теорема 1 была обобщена в работе [4] следующим образом.

Теорема 2. *Σ-произведение полных по Чеху линделефовых пространств счетной тесноты равномерно нормально.*

Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема 3. Предварительно напомним, что перистые линделефовы пространства — это в точности полные прообразы сепарабельных метрических пространств при совершенных отображениях [5]. Известно, что полные по Чеху

[1] *Богомолов Алексей Владимирович* — студ. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: praktgeom@gmail.com.

пространства являются перистыми, поэтому теорема 3 представляет собой дальнейшее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Σ-произведение перистых линделефовых пространств счетной тесноты равномерно нормально.*

Доказательство. Пусть X — Σ-произведение перистых линделефовых пространств $X_s, s \in S$, каждое из которых имеет счетную тесноту. Пусть $\mathcal{U}$ является системой всех симметричных окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$. Докажем, что $\mathcal{U}$ образует равномерность на X. Проверим выполнение условий $(U1)$ – $(U4)$ [1, с. 623]. $(U1)$: если $V \in \mathcal{U}$ и $V \subset W$, то $W \in \mathcal{U}$. $(U2)$: если $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, то $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$. $(U4)$: $\cap\mathcal{U} = \Delta$. Напомним, что окрестностью диагонали Δ называется любое подмножество, внутренность которого содержит Δ, поэтому выполнение условий $(U1)$, $(U2)$ и $(U4)$ очевидно. Рассмотрим условие

$$(U3): \text{ для любого } V \in \mathcal{U} \text{ существует такое } W \in \mathcal{U}, \text{ что } 2W \subset V.$$

Напомним, что $2W = \{(x,z) : \text{существует точка } y \in X, \text{ такая, что } (x,y), (y,z) \in W\}$.

Заметим, что $X \times X$ также является Σ-произведением перистых линделефовых пространств счетной тесноты, поскольку объединение двух счетных множеств индексов счетно. Всякое перистое линделефово пространство является паракомпактным p-пространством, поэтому Σ-произведение перистых линделефовых пространств счетной тесноты нормально [6]. Из нормальности $X \times X$ следует, что для любого $V \in \mathcal{U}$ существует непрерывная функция $\psi : X \times X \to [0;1]$, такая, что $\psi(\Delta) = 0$ и $\psi(X \times X \setminus \mathrm{Int} V) = 1$. Заметим, что счетное произведение перистых линделефовых пространств линделефово [5], поэтому по теореме [1, теорема 3.12.23 (b)] непрерывная функция ψ зависит от счетного числа координат, т.е. найдутся счетное множество $S_0 \subset S$ и непрерывная функция $\psi_0 : X_{S_0} \times X_{S_0} \to [0;1]$ (здесь $X_{S_0} = \prod\{X_s : s \in S_0\}$), такие, что ψ совпадает с композицией $\psi_0\,(p_{S_0}|X \times X)$ сужения проекции $p_{S_0} : X_S \times X_S \to X_{S_0} \times X_{S_0}$ (соответственно $X_S = \prod\{X_s : s \in S\}$) на Σ-произведение $X \times X$ и функции ψ_0. Поскольку функция ψ_0 непрерывна, множество $V_0 = \{(x,y) \in X_{S_0} \times X_{S_0} : \psi_0(x,y) < 1\}$ открыто и содержит диагональ $\Delta_{S_0} \subset X_{S_0} \times X_{S_0}$. Заметим здесь, что выполняется включение $(p_{S_0})^{-1}(V_0) \subset V$. Так как счетное произведение перистых линделефовых пространств линделефово и, следовательно, паракомпактно, произведение X_{S_0} по предложению 2 равномерно нормально. Поэтому для открытого множества V_0 найдется псевдометрика ρ_0 на X_{S_0}, которая равномерна (см. [1, с. 627]) относительно системы всех окрестностей диагонали $\Delta_{S_0} \subset X_{S_0} \times X_{S_0}$ и удовлетворяет условию $\{(x,y) : \rho_0(x,y) < 1\} \subset V_0$ [1, следствие 8.1.11]. С помощью проекции p_{S_0} "поднимем" псевдометрику ρ_0 до псевдометрики ρ на Σ-произведении $X \times X$ с помощью формулы $\rho(x,y) = \rho_0(x_{S_0}, y_{S_0})$, где $(x_{S_0}, y_{S_0}) = p_{S_0}(x,y)$. Легко проверяется, что ρ действительно является псевдометрикой, непрерывной на $X \times X$, и что

$$\{(x,y) : \rho(x,y) < 1\} \subset (p_{S_0})^{-1}(\{(x,y) \in X_{S_0} \times X_{S_0} : \rho_0(x,y) < 1\}) \subset (p_{S_0})^{-1}(V_0) \subset V.$$

Пусть теперь $W = \{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) < 0{,}5\}$. Включение $2W \subset V$ очевидно. Таким образом, условие $(U3)$ выполняется и, следовательно, система всех симметричных окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$ образует равномерность на X. Пространство X равномерно нормально. Теорема 3 доказана.

Важным моментом доказательства теоремы 3 является использование свойства нормальности Σ-произведения перистых линделефовых пространств счетной тесноты. Заметим, что в этом случае нормальность можно заменить на более слабое свойство F_σ-δ-нормальности [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Corson H.H.* Normality in subsets of product spaces // Amer. J. Math. 1959. **81**, N 3. 785–796.
3. *Комбаров А.П.* О Σ-произведениях топологических пространств // Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 3. 526–528.
4. *Комбаров А.П.* О произведении нормальных пространств. Равномерности на Σ-произведениях // Докл. АН СССР. 1972. **205**, № 5. 1033–1035.
5. *Архангельский А.В.* Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Матем. сб. 1976. **67**. 55–85.
6. *Комбаров А.П.* О тесноте и нормальности Σ-произведений // Докл. АН СССР. 1978. **239**, № 4. 775–778.
7. *Kombarov A.P.* On F_σ-δ-normality and hereditary δ-normality // Topol. and Appl. 1999. **91**. 221–226.

Поступила в редакцию
18.05.2015