

УДК 517.55

О ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА-ШИЛОВА

А.В. ЛУЦЕНКО, И.Х. МУСИН, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В работе, следуя схеме построения пространств Гельфанда-Шилова S_α и S^β , с помощью семейства $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ раздельно радиальных весовых функций $\mathcal{M}_\nu$ в $\mathbb{R}^n$ определены два пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Одно из них — пространство $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ — внутренний индуктивный предел счетно-нормированных пространств

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\beta)} < \infty, m \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Аналогичным образом, исходя из нормированных пространств

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} < \infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, вводится пространство $\mathcal{S}^\mathcal{M}$. Показано, что при определенных естественных условиях на весовые функции преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}^\mathcal{M}$.

Ключевые слова: пространства Гельфанда-Шилова, преобразование Фурье, выпуклые функции.

Mathematics Subject Classification: 46F05, 46A13, 42B10

ВВЕДЕНИЕ

В середине 1950-х годов были введены в рассмотрение семейства пространств типа S бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, ставшие, наряду с пространством Шварца, одним из центральных объектов теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений в частных производных и нашедшие значительные применения в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. Их изучение началось с работ Г.Е. Шилова [1], И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [2]–[4]. Они характеризовали пространства типа S в терминах преобразования Фурье функций и затем полученное описание применили для исследования единственности задачи Коши дифференциальных уравнений в частных производных и их систем.

Существенное развитие теория пространств типа S получила в работах М.А. Соловьева в ходе изучения проблем нелокальной теории поля. В частности, им было получено [5, раздел 4] описание образа преобразования Фурье пространства $S_b(\mathbb{R}^n)$, состоящего из

A.V. LUTSENKO, I.Kh. MUSIN, R.S. YULMUKHAMETOV, ON GELFAND-SHILOV SPACES.

© Луценко А.В., Мусин И.Х., Юлмухаметов Р.С. 2023.

Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (проект 21-11-00168), работа второго автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-950), работа третьего автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила 31 марта 2023 г.

функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих при некоторых $C > 0$ и $\mu > 0$, зависящих от f и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, неравенствам

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \leq C_\alpha \mu^{|\beta|} b_{|\beta|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где, как обычно, для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$, при условии, что монотонно неубывающая последовательность $(b_k)_{k=0}^\infty$ чисел $b_k > 0$ удовлетворяет условию: существуют числа $B > 0$ и $h > 0$ такие, что

$$b_{k+1} \leq B h^k b_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Одна из целей данной заметки — обобщить этот результат на более широкий класс пространств Гельфанда-Шилова такого типа.

1. ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ И $\mathcal{S}^\mathcal{M}$. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — произвольное семейство функций $\mathcal{M}_\nu : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1) существуют числа $a_1 = a_1(\nu) > 0$, $a_2 = a_2(\nu) > 0$ такие, что

$$\mathcal{M}_\nu(\alpha) \geq a_1 a_2^{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

$$i_2) \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha)}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} = +\infty.$$

Определим пространство $\mathcal{S}_\mathcal{M}$, следуя схеме построения пространства Гельфанда-Шилова $\mathcal{S}_\alpha$ [3, Глава 4]. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathcal{S}_{m, \mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m, \nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\beta)} < \infty \right\}.$$

Положим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathcal{S}_{m, \mathcal{M}_\nu}$. Класс $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ — непустой: он содержит финитные функции с носителем в $[-a_2, a_2]^n$. Снабдим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m, \nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). В силу условия i_2) пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_{\nu+1}}$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{S}_\mathcal{M} := \bigcup_{\nu=1}^\infty \mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ — линейное пространство. Наделим $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ топологией внутреннего индуктивного предела [6, с. 589] пространств $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$.

Определим пространство $\mathcal{S}^\mathcal{M}$. По $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m, \nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)} < \infty \right\}.$$

Эквивалентная топология в $\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$ может быть введена с помощью норм

$$q_{m, \nu}(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta| \leq m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{M}_\nu(\alpha)}.$$

Очевидно, нормированное пространство $\mathcal{S}_{m+1}^{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$. Пусть $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathcal{S}_m^{\mathcal{M}_\nu}$. Наделим пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m, \nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Ввиду условия i_2) $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_{\nu+1}}$. Положим $\mathcal{S}^\mathcal{M} := \bigcup_{\nu=1}^\infty \mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$. В $\mathcal{S}^\mathcal{M}$ введем топологию внутреннего индуктивного предела пространств

$\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$. Пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ построено по аналогии с пространством Гельфанда-Шилова $\mathcal{S}^\beta$ [3, глава 4].

Будем придерживаться следующего определения преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть семейство $\mathcal{M}$ таково, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$i_3)$ существует число $d_\nu > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0, 1]^n$

$$\mathcal{M}_\nu(\alpha + \beta) \leq d_\nu \mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha);$$

$i_4)$ каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$ существует число $d_{\nu,m} > 0$ такое, что

$$\mathcal{M}_{\nu+1}(\alpha) \geq d_{\nu,m} \mathcal{M}_\nu(\alpha) \prod_{k=1}^m (1 + \alpha_k)^m, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in \mathcal{S}_\mathcal{M} \rightarrow \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$.

Следствие 1.1. В предположениях Теоремы 1.1 преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}_\mathcal{M}$.

Замечание 1.1. Если $(b_k)_{k=0}^\infty$ — монотонно неубывающая последовательность чисел $b_k > 0$ таких, что при некоторых $B > 0$ и $h > 1$, $b_{k+1} \leq Bh^k b_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, то семейство $\{h^{\nu n|\alpha|} b_{|\alpha|}\}_{\nu=1}^\infty$ удовлетворяет условиям $i_1) - i_4)$. В этом случае пространство $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ совпадает с пространством $\mathcal{S}_b(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1.2. Если монотонно неубывающая последовательность $(b_k)_{k=0}^\infty$ чисел $b_k > 0$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b_{k+1}}{b_k} \right)^{\frac{1}{k}} = 1$, то семейство $\{(\sigma - 2^{-\nu})^{|\alpha|} b_{|\alpha|}\}_{\nu=1}^\infty$, где $\sigma > 0$, удовлетворяет условиям $i_1) - i_4)$.

Далее, пусть $\mathcal{H}$ — произвольное семейство неотрицательных функций h_ν в $\mathbb{R}^n$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$H_1)$ $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$H_2)$ существуют числа $Q_1 = Q_1(\nu) > 0$, $Q_2 = Q_2(\nu) > 0$ такие, что

$$h_\nu(x) \leq \sum_{1 \leq j \leq n: x_j \neq 0} x_j \ln \frac{x_j}{Q_1} + Q_2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

$H_3)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x)) = +\infty$.

Отметим, что функции $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где $h_\nu \in \mathcal{H}$, удовлетворяют требованиям $i_1)$ и $i_2)$, предъявляемым к функциям семейства $\mathcal{M}$. Таким образом, если $\mathcal{M} = \{\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, то пространство $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ состоит из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется число $K_\alpha > 0$ такое, что

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \leq K_\alpha \beta! e^{-h_\nu(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

а пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ — из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется число $L_\beta > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \leq L_\beta \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Чтобы выделить этот частный случай семейства $\mathcal{M}$ пространство $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathcal{S}_\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ — через $\mathcal{S}(h_\nu)$, пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ — через $\mathcal{S}^{\mathcal{H}}$.

Тогда из Теоремы 1.1 имеем еще одно следствие.

Следствие 1.2. Пусть семейство $\mathcal{M}$ состоит из функций $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha!e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где функции $h_\nu \in \mathcal{H}$ удовлетворяют дополнительным условиям:

$H_4)$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $\tau_\nu > 0$ такое, что для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$, $y \in [0, 1]^n$

$$h_\nu(x+y) - h_{\nu+1}(x) \geq \sum_{k=1}^n \ln(1+x_k) - \tau_\nu;$$

$H_5)$ для любых $\nu, m \in \mathbb{N}$ существует число $\tau_{\nu,m} > 0$ такое, что для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$, $y \in [0, 1]^n$

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \geq m \sum_{k=1}^n \ln(1+x_k) - \tau_{\nu,m}.$$

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in \mathbb{S}_{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ и $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$.

Действительно, условие $H_4)$ гарантирует выполнение условия $i_3)$, а условие $H_5)$ — выполнение условия $i_4)$.

Следствие 1.3. Пусть семейство $\mathcal{M}$ состоит из функций $\mathcal{M}_\nu(\alpha) = \alpha!e^{-h_\nu(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, где неубывающие по каждой переменной на $[0, \infty)^n$ функции $h_\nu \in \mathcal{H}$ удовлетворяют условию $H_5)$.

Тогда отображение $\mathcal{F} : f \in \mathbb{S}_{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ и $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$.

Представляется интересным рассмотрение случая, когда все функции семейства $\mathcal{H}$ удовлетворяют условию

$$H_6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty \quad (\|x\| — евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$).$$

Дело в том, что в этом случае какова бы ни была функция f из $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $c_\varepsilon(f) > 0$ такое, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_\varepsilon(f) \varepsilon^{|\alpha|} \alpha!, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

и, следовательно, f допускает (единственное) продолжение до целой функции в $\mathbb{C}^n$. Через F_f обозначим указанное продолжение, а через $\mathcal{A}$ — отображение: $f \in \mathbb{S}^{\mathcal{H}} \rightarrow F_f$. Естественным образом возникает задача описания образа $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ при отображении $\mathcal{A}$. Ее решение получено при дополнительных условиях на $\mathcal{H}$ (Теорема 1.2). Приведем ряд определений и обозначений, встречающихся в формулировке и доказательстве Теоремы 1.2. Для произвольной функции $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty)$ такой, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$ через g^* и $\tilde{g}$ обозначим функции, заданные в $\mathbb{R}^n$ по правилу:

$$g^*(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle \alpha, x \rangle - g(\alpha)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{g}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $\tilde{g}$ называется преобразованием Юнга-Фенхеля функции g [7]. Теперь для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_ν в $\mathbb{R}^n$, полагая

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+ |x_1|, \dots, \ln^+ |x_n|), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\ln^+ t = 0$ при $t \in [0, 1)$ и $\ln^+ t = \ln t$ при $t \in [1, \infty)$. Так как выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция h_ν^* принимает конечные значения, то она непрерывна в $\mathbb{R}^n$ [8, §11]. Значит, функция φ_ν

непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, ее сужение на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной. Ввиду условия H_2) при некотором $Q_3 = Q_3(\nu) > 0$ справедливо неравенство

$$\varphi_\nu(x) \geq \frac{Q_1}{e} \sum_{k=1}^n |x_k| - Q_3, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Благодаря условиям H_6) и H_3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h_{\nu+1}^*(x) - h_\nu^*(x)) = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)) = +\infty. \quad (1.1)$$

Далее, для произвольных $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathcal{P}_m(\varphi_\nu) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : p_{\nu,m}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1 + \|z\|)^m}{e^{\varphi_\nu(Im z)}} < \infty \right\}.$$

Очевидно, пространство $\mathcal{P}_{m+1}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. Пусть $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ есть пересечение пространств $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. Снабдим $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{P}_m(\varphi_\nu)$. В силу (1.1) пространство $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{P}(\varphi_{\nu+1})$. Обозначим семейство $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ через Φ . Пусть $\mathcal{P}(\Phi) := \bigcup_{\nu=1}^\infty \mathcal{P}(\varphi_\nu)$. Наделим $\mathcal{P}(\Phi)$ топологией внутреннего индуктивного предела пространств $\mathcal{P}(\varphi_\nu)$. В разделе 4 доказана следующая

Теорема 1.2. Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ являются выпуклыми и, помимо условия H_6), удовлетворяют условиям:

H_7) каково бы ни было $a > 0$ существует число $l_{\nu,a} > 0$ такое, что

$$h_{\nu+1}(x+y) \leq h_\nu(x) + l_{\nu,a}, \quad x \in [0, \infty)^n, \quad y \in [0, a]^n;$$

H_8) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется число $s \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} e^{h_{\nu+s}(\alpha) - h_\nu(\alpha)} < \infty.$$

Тогда отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\Phi)$.

В силу этих двух теорем справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ являются выпуклыми и удовлетворяют условиям H_5) – H_7). Тогда отображение $\mathcal{AF}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathbb{S}_{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\Phi)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

При доказательстве Теоремы 1.2 понадобится Следствие из следующего утверждения.

Предложение 2.1. Пусть функции семейства $\mathcal{H}$ удовлетворяют условиям H_6) и H_7), $m \in \mathbb{N}$ произвольно и $\tilde{m} = (m, \dots, m) \in \mathbb{N}^n$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$

$$h_{\nu+1}^*(x) \geq h_\nu^*(x) + \langle x, \tilde{m} \rangle - l_{\nu,m}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

где $l_{\nu,m}$ то же, что и в условии H_7).

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда

$$\begin{aligned} h_{\nu+1}^*(x) &= \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle x, \alpha \rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (\langle x, \alpha \rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) \\ &\geq \sup_{\alpha \geq \tilde{m}} (\langle x, \alpha \rangle - h_{\nu+1}(\alpha)) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (\langle x, \alpha + \tilde{m} \rangle - h_{\nu+1}(\alpha + \tilde{m})). \end{aligned}$$

Далее, пользуясь условием H_7) на $\mathcal{H}$, имеем

$$\begin{aligned} h_{\nu+1}^*(x) &\geq \langle x, \tilde{m} \rangle + \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (\langle x, \alpha \rangle - h_\nu(\alpha)) - l_{\nu,m} \\ &= \langle x, \tilde{m} \rangle + \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle x, \alpha \rangle - h_\nu(\alpha)) - l_{\nu,m} = h_\nu^*(x) + \langle x, \tilde{m} \rangle - l_{\nu,m}. \end{aligned}$$

□

В условиях Предложения 2.1 справедливо

Следствие 2.1. Для любых $\nu, m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_\nu(x) + m \ln(1 + \|x\|) \leq \varphi_{\nu+1}(x) + b_{\nu,m} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $b_{\nu,m} = l_{\nu,m} + 2mn \ln 2$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Покажем вначале, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ в $\mathcal{S}^\mathcal{M}$. Пусть $g \in \mathcal{S}_\mathcal{M}$. Тогда $g \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому каково бы ни было $m \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\gamma| \leq m$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x^\mu (D^\gamma g)(x)| \leq \|g\|_{m,\nu} \mathcal{M}_\nu(\mu). \quad (3.1)$$

Покажем, что $\hat{g} \in \mathcal{S}^\mathcal{M}$. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Положим $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \dots, n$ и $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$. Так как

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j (D^{\beta-j} g)(x) (D^j (ix)^\alpha) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx,$$

то

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta-j} g)(x)| |D^j (x^\alpha)| dx. \quad (3.2)$$

Согласно [5], если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то при любых $\mu, j \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^j (x^\mu)| |u(x)| dx \leq \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\mu| |(D^j u)(x)| dx. \quad (3.3)$$

Пользуясь им, из неравенства (3.2) получим, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^{\beta-j} g)(x)| dx. \quad (3.4)$$

Продолжим оценку (3.4), следуя [5, с. 371]. А именно:

1) представляем $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^{\beta-j} g)(x)| dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k| \leq 1$ или $|x_k| > 1$;

2) в интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k| > 1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2 .

Тогда из (3.4), пользуясь неравенством (3.1), получим, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leq \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} 2^{|\beta|} \|g\|_{|\beta|,\nu} \sup_{\substack{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}_+^n: \\ \omega_j \leq 2, j=1, \dots, n}} \mathcal{M}_\nu(\alpha + \omega).$$

Отсюда, благодаря условию i_3) на $\mathcal{M}$, имеем

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leq C_1 \|g\|_{|\beta|,\nu} 2^{|\beta|} \mathcal{M}_{\nu+2}(\alpha),$$

где $C_1 = \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} d_\nu d_{\nu+1}$. Но тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ можно найти постоянную $C_2 > 0$ такую, что

$$(1 + \|\xi\|)^k |(D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leq C_2 \|g\|_{k,\nu} \mathcal{M}_{\nu+2}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (3.5)$$

Следовательно, $\hat{g} \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_{\nu+2}}$. Итак, $\hat{g} \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. В силу неравенства (3.5)

$$\rho_{k,\nu+2}(\hat{g}) \leq C_2 \|g\|_{k,\nu}, \quad g \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_\nu}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда следует, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ непрерывно.

Очевидно, линейное отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$ инъективно.

Покажем, что $\mathcal{F}$ — отображение «на». Пусть $F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Тогда $F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому каково бы ни было $m \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\gamma F)(x)| \leq \rho_{m,\nu}(F) \mathcal{M}_\nu(\gamma). \quad (3.6)$$

Положим $f(x) := \hat{F}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha f)(\xi) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta (F(x)(ix)^\alpha) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx.$$

То есть,

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha f)(\xi) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j (D^{\beta-j} F)(x) (D^j (ix)^\alpha) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx,$$

где $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta-j} F)(x)| |D^j (x^\alpha)| dx.$$

Пользуясь неравенством (3.3), имеем

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| |x^\alpha| dx.$$

Отсюда получим, что

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| (1 + \|x\|)^{|\alpha|} dx.$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\beta F)(x)| (1 + \|x\|)^{m+2n} \frac{dx}{\prod_{k=1}^n (1 + x_k^2)}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (3.6), имеем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$

$$\begin{aligned} |\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| &\leq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^n \rho_{m+2n,\nu}(F) \mathcal{M}_\nu(\beta) \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n: j \leq \kappa} C_\beta^j \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^n \rho_{m+2n,\nu}(F) (m+1)^n (1 + \beta_1)^m \cdots (1 + \beta_n)^m \mathcal{M}_\nu(\beta). \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь условием i_4) на $\mathcal{M}$ получим, что при некотором $C_3 = C_3(\nu, m) > 0$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$ и всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| \leq C_3 \rho_{m+2n,\nu}(F) \mathcal{M}_{\nu+1}(\beta), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Следовательно, $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}_{\nu+1}}$. Значит, $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$. Ясно, что $\hat{f} = F$. Таким образом, отображение $\mathcal{F}$ действует из $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$. Оценка (3.7) означает, что

$$\|f\|_{m,\nu+1} \leq C_3 \rho_{m+2n,\nu}(F), \quad F \in \mathcal{S}^{\mathcal{M}_{\nu}}.$$

Из нее вытекает, что обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно.

Из доказанного следует, что отображение $\mathcal{F}$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $f \in \mathbb{S}^{\mathcal{H}}$. Докажем, что $F_f \in \mathcal{P}(\Phi)$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Пользуясь разложением $F_f(z)$ ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$) в ряд Тейлора в точке x и тем, что $f \in \mathbb{S}(h_{\nu})$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned} (1 + \|z\|)^m |F_f(z)| &\leq \rho_{m,\nu}(f) (1 + \|y\|)^m \sum_{|\alpha| \geq 0} e^{-h_{\nu}(\alpha)} \prod_{j=1}^n (|y_j|^+)^{\alpha_j} \\ &\leq B_{\nu,s} \rho_{m,\nu}(f) (1 + \|y\|)^m e^{\sup_{t=(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n} (t_1 \ln^+ |y_1| + \dots + t_n \ln^+ |y_n| - h_{\nu+s}(t))}, \end{aligned}$$

где $B_{\nu,s} := \sum_{|\alpha| \geq 0} e^{h_{\nu+s}(\alpha) - h_{\nu}(\alpha)}$, s — из условия H_8). Следовательно,

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq B_{\nu,s} \rho_{m,\nu}(f) (1 + \|y\|)^m e^{\varphi_{\nu+s}(Im z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Из этой оценки, пользуясь Следствием 1.1, получим, что при некотором $K_{\nu,m} > 0$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq K_{\nu,m} \rho_{m,\nu}(f) e^{\varphi_{\nu+s+1}(Im z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

То есть,

$$p_{\nu+s+1,m}(F_f) \leq K_{\nu,m} \rho_{m,\nu}(f), \quad f \in \mathbb{S}(h_{\nu}).$$

Ввиду произвольности $m \in \mathbb{Z}_+$, $F_f \in \mathcal{P}(\varphi_{\nu+s+1})$. Таким образом, $F_f \in \mathcal{P}(\Phi)$. Кроме того, последнее неравенство означает, что линейное отображение $\mathcal{A}$ непрерывно.

Очевидно, $\mathcal{A}$ — взаимно однозначное отображение из $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{P}(\Phi)$.

$\mathcal{A}$ сюръективно. Действительно, пусть $F \in \mathcal{P}(\Phi)$. Тогда $F \in \mathcal{P}(\varphi_{\nu})$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Пользуясь интегральной формулой Коши и неубыванием φ_{ν} по каждой переменной на $[0, \infty)^n$, получим (действуя, например, как при доказательстве Теоремы 1 в [9]), что для любого $R \in (0, \infty)^n$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + \|x\|)^m |(D^{\alpha} F)(x)| \leq \frac{\alpha! p_{\nu,m}(F) (1 + \|R\|)^m e^{\varphi_{\nu}(R)}}{R^{\alpha}}.$$

Отсюда, пользуясь Следствием 1.1, имеем

$$(1 + \|x\|)^m |(D^{\alpha} F)(x)| \leq e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(R)}}{R^{\alpha}}.$$

Положим для краткости $\varphi_{\nu+1}[e](r) := \varphi_{\nu+1}(e^{r_1}, \dots, e^{r_n})$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)^m |(D^{\alpha} F)(x)| &\leq e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \inf_{R \in (0, \infty)^n} \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(R)}}{R^{\alpha}} \\ &= \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup_{r \in \mathbb{R}^n} (\langle \alpha, r \rangle - \varphi_{\nu+1}[e](r)))} \leq \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup_{r \in \mathbb{R}_+^n} (\langle \alpha, r \rangle - \varphi_{\nu+1}[e](r)))} \\ &= \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup_{r=(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n} (\langle \alpha, r \rangle - h_{\nu+1}^*(\ln^+ e^{r_1}, \dots, \ln^+ e^{r_n})))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup_{r \in \mathbb{R}_+^n} (\langle \alpha, r \rangle - h_{\nu+1}^*(r)))} = \frac{e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F)}{\exp(\sup_{r \in \mathbb{R}^n} (\langle \alpha, r \rangle - h_{\nu+1}^*(r)))} \\
&= e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \exp(-\widetilde{h_{\nu+1}^*}(\alpha)) = e^{b_{\nu,m}} \alpha! p_{\nu,m}(F) \exp(-h_{\nu+1}(\alpha)).
\end{aligned}$$

В концовке этой оценки воспользовались тем, что в силу выпуклости функции $h_{\nu+1}$ $\widetilde{h_{\nu+1}^*}(\alpha) = h_{\nu+1}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ согласно Предложению 1 из [10]. Из полученной оценки вытекает, что

$$\rho_{m,\nu+1}(F|_{\mathbb{R}^n}) \leq e^{b_{\nu,m}} p_{\nu,m}(F), \quad F \in \mathcal{P}(\varphi_\nu). \quad (4.1)$$

Следовательно, $F|_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{S}(h_{\nu+1})$. Итак, $F|_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{S}^{\mathcal{H}}$. Очевидно, $\mathcal{A}(F|_{\mathbb{R}^n}) = F$ и неравенство (4.1) гарантирует непрерывность отображения $\mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между $\mathbb{S}^{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{P}(\Phi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Е. Шиллов. *Об одной проблеме квазианалитичности* // ДАН СССР. **102**:5, 893–895 (1955).
2. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши* // УМН. **8**:6(58), 3–54 (1953).
3. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. *Обобщенные функции (Пространства основных и обобщенных функций)*. М.: Физматгиз. 1958.
4. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. *Обобщенные функции (Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений)*. М.: Физматгиз. 1958.
5. М.А. Соловьев. *Пространственно-подобная асимптотика вакуумных средних в нелокальной теории поля* // ТМФ. **52**:3, 363–37 (1982).
6. Р. Эдвардс. *Функциональный анализ*. М.: Мир. 1972.
7. Р. Рокафеллар. *Выпуклый анализ*. М.: Мир. 1973.
8. В.С. Владимиров. *Методы теории функций многих комплексных переменных*. М.: Наука. 1964.
9. I.Kh. Musin. *On a space of entire functions rapidly decreasing on $\mathbb{R}^n$ and its Fourier transform* // Concrete Operators. **1**:2, 120–138 (2015).
10. А.В. Луценко, И.Х. Мусин, Р.С. Юлмухаметов. *О классе периодических функций в $\mathbb{R}^n$* // Уфимск. матем. журн. **14**:4, 73–79 (2022).

Анастасия Владимировна Луценко,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko.AV@yandex.ru

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru