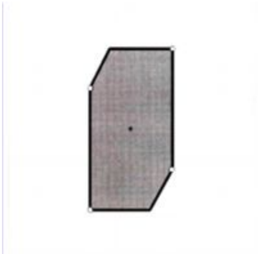

Рис. 1. Многогранник $(n=3, n_2=2, n_1=1)$.

Библиографические ссылки

1. Mellin H. R'esolution de l'e'quation alg'ebrique g'en'erale `a l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math. 1921. Vol. 172. P. 658–661.

2. Антипова И. А., Зыкова Т. В. О множестве сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения // Журнал СФУ. Сер. Матем. и физ. 2010. № 3, 4. С. 475–486.

T. V. Zykova

Siberian Federal University, Russia, Krasnoyarsk

ON THE ALGORITHM OF CREATION OF THE POLYGON DEFINING AREA OF CONVERGENCE FOR MELLIN-BARNES INTEGRAL REPRESENTING SOLUTION TO THE TETRONOMIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

The description of the algorithm of creation of the polygon defining area of convergence for Mellin-Barnes integral representing solution to the tetranomial algebraic equations is given.

УДК 681.3.06

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения
Российской академии наук, Россия, Красноярск

О ПРОБЛЕМЕ КЛАССИФИКАЦИИ ГУРСА

Освещается классическая проблема Гурса, которая состоит в перечислении всех нелинейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, интегрируемых методом Дарбу.

В конце девятнадцатого века Дарбу предложил подход к интегрированию нелинейных уравнений с частными производными, обобщающий метод промежуточного интеграла Монжа–Ампера. Подробное описание с большим числом примеров, дано в замечательной монографии Гурса [1]. В данном методе используются дифференциальные 1-формы. Близкий подход, основанный на применении дифференциальных операторов, описан в [2], там же дано обобщение метода Дарбу на системы уравнений с частными производными.

В работе рассматривается проблема Гурса – классификация гиперболических нелинейных уравнений, обладающих двумя нетривиальными инвариантами характеристик, описывается алгоритм нахождения инвариантов характеристик, приводится пара уравнений Лэне, одно из которых обладает инвариантами второго и третьего порядков. Наличие такого уравнения показывает, что проблема Гурса остается открытой. Ранее о решении проблемы классификации Гурса было заявлено в работе [3]. Компьютерные расчеты демонстрируют, что инварианты характеристик второго уравнения Лэне, приведенные в его работе, указаны тоже неверно. Подробности можно найти в [4].

Библиографические ссылки

1. Goursat M. E. Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second order a deux variables independantes. Paris : Librairie scientifique A. Hermann. T. II. 1898. P. 344.

2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М. : Физматлит, 2009.

3. Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа. УМН. 2001. Т. 56. Вып. 1 (337). С. 63–106.

3. Капцов О. В. О проблеме классификации Гурса // Программирование. 2012. Т. 38. № 2. С. 68–71.

O. V. Kaptsov

Institute of Computational Modelling, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Russia, Krasnoyarsk

ON THE GOURSAT CLASSIFICATION PROBLEM

The Goursat problem of classification of nonlinear hyperbolic differential equations, which have two characteristic invariants, is considered. An algorithm for finding the characteristic invariants is described. On the basis of this algorithm, implemented in the REDUCE, made checking of the characteristic invariants of the two Lain\'{e}'s equations. It is shown that one of them has the invariants of the second and third orders. The presence of this equation shows that the Goursat problem, apparently, is still open. Computer calculations show that the characteristic invariants of the second Laine's equation given in his paper are incorrect.

УДК 539.37

М. М. Клунникова

Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск

В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения
Российской академии наук, Россия, Красноярск

АЛГОРИТМ ПРЯМОГО МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

Разработан универсальный вычислительный алгоритм и компьютерная программа в системе Matlab для произвольной гиперболической системы квазилинейных уравнений. Алгоритм применен к расчету сетки линий скольжения и поля вектора скорости в задачах теории предельного равновесия идеально пластических и сыпучих сред.

Рассматривается задача Коши для произвольной гиперболической системы квазилинейных уравнений общего вида:

$$A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}=F,\quad U(x(s),y(s))=\Phi(s),\qquad (1)$$

где $U(x, y)$ – m-мерная вектор-функция, подлежащая определению в точках плоской области D; $A(U, x, y)$, $B(U, x, y)$ – $m \times m$-матрицы, $F(U, x, y)$ – m-мерный вектор, $\Phi(s)$ – вектор такой же размерности, заданный на кривой L: $x = x(s)$, $y = y(s)$, служащей частью границы D. Полагается, что задача Коши поставлена корректно.

Предполагается, что система уравнений является гиперболической [1], тогда характеристическое уравнение

$$\det(\alpha B-\beta A)=0,\qquad (\alpha^2+\beta^2=1)$$

в каждой точке $(x, y)\in D$ имеет ровно m действительных корней $\alpha_k(U, x, y)$, $\beta_k(U, x, y)$ $(k = 1,\ldots,m)$, удовлетворяющих условию $\alpha_k a + \beta_k b > 0$ для некоторого ненулевого вектора (a, b), указывающего направление выхода характеристик. Полная система левых собственных векторов Y_k (U, x, y) имеет вид $Y_k(\alpha_k B-\beta_k A)=0$.

Систему (1) можно привести к уравнениям на характеристиках:

$$\frac{dx_k}{ds}=\alpha_k,\ \frac{dy_k}{ds}=\beta_k:\quad Y_k(\alpha_k A+\beta_k B)\frac{dU}{ds}=Y_kF.\ (2)$$

Для решения задачи Коши методом характеристик [2] на кривой L вводится сетка узлов $(x^1, y^1),\ldots,(x^n, y^n)$. Из каждого узла выпускается веер характеристик вовнутрь области решения. С помощью библиотечной процедуры Matlab в узлах решается спектральная задача

$$(P-\lambda_k Q)V_k=0,\quad (V_k\neq 0,\ k=1,2,\ldots,m),$$

где $P=aB^T-bA^T,\ Q=aA^T+bB^T,\ V_k=Y_k^T$. Коэффициенты a и b выбираются так, чтобы вектор (a,b) был направлен вдоль внутренней нормали к звеньям ломаной, аппроксимирующей кривую L. Матрица Q при таком выборе коэффициентов оказывается невырожденной, что гарантирует существование решения спектральной задачи.

Затем величины α_k и β_k вычисляются по формулам

$$\alpha_k=\frac{a-\lambda_k b}{\sqrt{(1+\lambda_k^2)(a^2+b^2)}},\ \beta_k=\frac{\lambda_k a+b}{\sqrt{(1+\lambda_k^2)(a^2+b^2)}}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053).