



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

УДК 531.011

Дата: поступления статьи: 27.09.2021  
 после рецензирования: 28.10.2021  
 принятия статьи: 15.11.2021

**В.М. Савчин**

Российский университет дружбы народов,  
 г. Москва, Российская Федерация

E-mail: savchin-vm@rudn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>

**Ф.Т. Чинь**

Российский университет дружбы народов,  
 г. Москва, Российская Федерация

E-mail: tr.phuoc.toan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>

## О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

### АННОТАЦИЯ

Основная цель данной статьи — исследование потенциальности дискретной системы, полученной из системы вида  $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$  с непрерывным временем. Введено определение потенциальности соответствующей дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно заданной билинейной формы. Изложен алгоритм построения соответствующего функционала — аналога действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

**Ключевые слова:** потенциальные операторы; дискретные системы.

**Цитирование.** Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности дискретных систем // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 74–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Савчин В.М., 2021

Владимир Михайлович Савчин — профессор, доктор физико-математических наук, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

© Чинь Ф.Т., 2021

Фьюк Тоан Чинь — аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

## 1. Предварительные сведения

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$N(u) \equiv C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0, \quad 0 < t < l, \quad (1.1)$$

$$u(0) = a_1, u(l) = a_2, \quad (1.2)$$

где  $C(t, u)$  — заданная матрица  $[C_{\mu\nu}(t, u)]_{2n \times 2n}$ ;  $u = (u^1, u^2, \dots, u^{2n})^T$  — неизвестная вектор-функция;  $E(t, u) = (E_1(t, u), E_2(t, u), \dots, E_{2n}(t, u))^T$ ;  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Предположим, что  $C_{\mu\nu}(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $E_\mu(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Запишем систему (1.1) в виде

$$A(u) + E(t, u) = 0,$$

<sup>1</sup> Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

где  $A$  — оператор, определяемый дифференциальным выражением

$$A(u) \equiv C(t, u) \dot{u}(t).$$

Пусть область определения  $D(A)$  оператора  $A$  состоит из непрерывно дифференцируемых вектор-функций на  $(0, l)$  — пространство  $X$ , удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Разобьем  $[0, l]$  на  $m$  равных частей узлами  $t_k = k\tau$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), где  $\tau = m^{-1}l$ . Введем операторы сужения [1]

$$T_p u(t) = (u^1(t_1), \dots, u^{2n}(t_1), u^1(t_2), \dots, u^{2n}(t_2), \dots, \\ \dots, u^1(t_{m-1}), \dots, u^{2n}(t_{m-1}))^T$$

(столбец высоты  $p = 2n(m-1)$ ). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать  $\bar{X}_p$ . Для  $\bar{u}_p = T_p u(t)$  зададим сферическую норму

$$\|\bar{u}_p\| = \left( \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} |u_k^\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

где  $u_k^\mu = u^\mu(t_k)$ .

Заменим в дифференциальном операторе  $A$

$$C(t, u) \dot{u}(t) \sim \frac{1}{\tau} C^{1,k} (u_{k+1} - u_k) + \frac{1}{\tau} C^{2,k} (u_k - u_{k-1}),$$

где  $u_k = u(t_k)$ ;  $C^{1,k} = C^{1,k}(t_k, u_k)$ ,  $C^{2,k} = C^{2,k}(t_k, u_k, u_{k-1})$  — матрицы  $[C_{\mu\nu}^{1,k}]_{2n \times 2n}$ ,  $[C_{\mu\nu}^{2,k}]_{2n \times 2n}$ , удовлетворяющие равенству  $C^{1,k} + C^{2,k} = C(t_k, u(t_k)) + o(\tau)$ . Дифференцируемые функции  $C_{\mu\nu}^{1,k}$  и  $C_{\mu\nu}^{2,k}$  можно выбрать разными способами, например,  $C_{\mu\nu}^{1,k} = \gamma_{\mu\nu} C_{\mu\nu}(t_k, u_k)$ ;  $C_{\mu\nu}^{2,k} = \frac{(1-\gamma_{\mu\nu})}{2} (C_{\mu\nu}(t_k, u_k) + C_{\mu\nu}(t_k, u_{k-1}))$ , а  $\gamma_{\mu\nu}$  — некоторое число из  $[0, 1]$ .

Тогда можем записать в  $\bar{X}_p$  следующую последовательность приближенных задач, или разностную схему:

$$\frac{1}{\tau} C^{1,k} (u_{k+1} - u_k) + \frac{1}{\tau} C^{2,k} (u_k - u_{k-1}) + E^k = 0, k = \overline{1, m-1}; \quad (1.4)$$

$$u_0 = a_1, u_m = a_2. \quad (1.5)$$

Здесь  $E^k = E(t_k, u_k)$ .

Обозначим

$$N_\mu^k = \sum_{\nu=1}^{2n} \left[ \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{1,k} (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) + \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) \right] + E_\mu^k$$

и

$$\bar{N}_p(\bar{u}_p) \equiv (N_1^1, N_1^2, \dots, N_1^{m-1}, N_2^1, \dots, N_{2n}^{m-1})^T.$$

В книге [2] получены необходимые и достаточные условия самосопряженности системы дифференциальных уравнений вида (1.1) с непрерывным временем, а также разработаны методы приведения этой системы к форме уравнений Биркгофа с непрерывным временем.

В работах [3; 4] получены дискретные аналогии уравнения Биркгофа путем дискретизации пфаффиана. Однако вопрос о необходимых и достаточных условиях потенциальности дискретных систем и построении соответствующих функционалов в литературе, насколько нам известно, пока не исследовался. Рассматриваемые в настоящей статье вопросы восходят к идеям монографии [5].

Для дальнейшего нам понадобится понятие потенциальности дискретного оператора.

## 2. Критерий потенциальности дискретного оператора

Обозначим через  $\bar{N}_p'$  первую производную Гато оператора  $\bar{N}_p$  и положим  $D(\bar{N}_p) = \{\bar{u}_p \in \bar{X}_p; u_0 = a_1, u_m = a_2\}$ ,  $D(\bar{N}_p') = \{\bar{h}_p \in \bar{X}_p; h_0 = h_m = 0\}$ .

**Определение 2.1.** Дискретный оператор  $\bar{N}_p : D(\bar{N}_p) \rightarrow \mathbb{R}^p$  называется потенциальным в области  $D(\bar{N}_p)$  относительно билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bar{X}_p \times \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$ , если существует функционал  $F_{\bar{N}_p} : \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$ , такой, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p] - F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]}{\varepsilon} = \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p), \bar{h}_p \rangle, \quad \forall \bar{u}_p \in D(\bar{N}_p), \forall \bar{h}_p \in D(\bar{N}_p').$$

При этом будем говорить, что система (1.4), (1.5) является потенциальной в области  $D(\bar{N}_p)$  относительно заданной билинейной формы, а  $F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]$  — потенциал оператора  $\bar{N}_p(\bar{u}_p)$ .

**Теорема 2.1** (критерий потенциальности оператора). Пусть дифференцируемый по Гато оператора  $\bar{N}_p : D(\bar{N}_p) \rightarrow \mathbb{R}^p$  и билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \bar{X}_p \times \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

такие, что для любых фиксированных элементов  $\bar{u}_p \in D(\bar{N}_p)$ ,  $\bar{h}_p, \bar{g}_p \in D(\bar{N}'_p)$  функция  $\varphi(\varepsilon) \equiv \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p), \bar{g}_p \rangle \in C^1[0, 1]$ . Тогда для потенциальности оператора  $\bar{N}_p$  в односвязной области  $D(\bar{N}_p)$  относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle \bar{N}'_p \bar{h}_p, \bar{g}_p \rangle = \langle \bar{N}'_p \bar{g}_p, \bar{h}_p \rangle. \quad (2.1)$$

При этом

$$F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p] = \int_0^1 \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p^0 + \lambda(\bar{u}_p - \bar{u}_p^0)), \bar{u}_p - \bar{u}_p^0 \rangle d\lambda, \quad (2.2)$$

где  $\bar{u}_p^0 \in D(\bar{N}_p)$  — фиксированный элемент.

Доказательство можно получить, используя общий критерий потенциальности оператора [6].

Для дальнейшего изложения введем в  $\bar{X}_p$  скалярное произведение

$$(\bar{u}_p, \bar{v}_p) = \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu v_k^\mu. \quad (2.3)$$

Теперь  $\bar{X}_p$  превращено в евклидово пространство, причем  $(\bar{u}_p, \bar{u}_p) = \|\bar{u}_p\|^2$ . Сначала найдем первую производную Гато оператора  $N_\mu^k$

$$\begin{aligned} \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_\mu^k &= \sum_{\nu=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{1,k} (h_{k+1}^\nu - h_k^\nu) + \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{2,k} (h_k^\nu - h_{k-1}^\nu) + \right. \\ &\quad + \sum_{\sigma=1}^{2n} \left[ \frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} h_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) \right] \right\} + \sum_{\sigma=1}^{2n} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{N}'_p \bar{h}_p &= \left( \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_1^1, \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_1^2, \dots, \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_1^{m-1}, \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_2^1, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_{2n}^{m-1} \right)^T. \end{aligned}$$

Используя формулу (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p, \bar{g}_p \right) &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} \left( \bar{N}'_p \bar{h}_p \right)_\mu^k g_k^\mu = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{1,k} + W_{\mu\nu\sigma}^{2,k}], \\ \left( \bar{N}'_p \bar{g}_p, \bar{h}_p \right) &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} \left( \bar{N}'_p \bar{g}_p \right)_\mu^k h_k^\mu = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{3,k} + W_{\mu\nu\sigma}^{4,k}], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{1,k} &= C_{\mu\nu}^{1,k} (h_{k+1}^\nu - h_k^\nu) g_k^\mu + C_{\mu\nu}^{2,k} (h_k^\nu - h_{k-1}^\nu) g_k^\mu, \\ W_{\mu\nu\sigma}^{2,k} &= \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) g_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) g_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} h_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) g_k^\mu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma g_k^\mu, \\ W_{\mu\nu}^{3,k} &= C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) h_k^\mu + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) h_k^\mu, \\ W_{\mu\nu\sigma}^{4,k} &= \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) h_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) h_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} g_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) h_k^\mu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma h_k^\mu. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{h}_p, \bar{g}_p$  — произвольные элементы из  $D(\bar{N}'_p)$ . Поскольку

$$W_{\mu\nu}^{1,k} = W_{\nu\mu}^{1,k}, \quad W_{\mu\nu\sigma}^{2,k} = W_{\nu\sigma\mu}^{2,k}, \quad W_{\mu\nu}^{3,k} = W_{\mu\sigma\nu}^{3,k},$$

ТО

$$\begin{aligned} (\bar{N}'_p \bar{h}_p, \bar{g}_p) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\nu\mu}^{1,k} + W_{\nu\sigma\mu}^{2,k}] = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} \left[ C_{\nu\mu}^{1,k} (h_{k+1}^\mu - h_k^\mu) g_k^\nu + C_{\nu\mu}^{2,k} (h_k^\mu - h_{k-1}^\mu) g_k^\nu + \right. \\ &+ \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\mu} h_{k-1}^\mu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \left. \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu g_k^\nu \right], \\ (\bar{N}'_p \bar{g}_p, \bar{h}_p) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{3,k} + W_{\mu\sigma\nu}^{4,k}] = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} h_k^\mu \left[ C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) + \right. \\ &+ \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\nu} g_{k-1}^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \left. \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu \right]. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности элементов  $h_k^\mu$  из критерия потенциальности (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ C_{\nu\mu}^{1,k-1} g_{k-1}^\nu - C_{\nu\mu}^{1,k} g_k^\nu + C_{\nu\mu}^{2,k} g_k^\nu - C_{\nu\mu}^{2,k+1} g_{k+1}^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k+1}}{\partial u_k^\mu} (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_{k+1}^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\mu} g_k^\nu \right] = \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\nu} g_{k-1}^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu \right], \\ k = \overline{2, m-2}, \mu = \overline{1, 2n}, \\ \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ -C_{\nu\mu}^{1,1} g_1^\nu + C_{\nu\mu}^{2,1} g_1^\nu - C_{\nu\mu}^{2,2} g_2^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,1}}{\partial u_1^\mu} (u_2^\sigma - u_1^\sigma) g_1^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,1}}{\partial u_1^\mu} (u_1^\sigma - u_0^\sigma) g_1^\nu + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,2}}{\partial u_1^\mu} (u_2^\sigma - u_1^\sigma) g_2^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^1}{\partial u_1^\mu} g_1^\nu \right] = \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ C_{\mu\nu}^{1,1} (g_2^\nu - g_1^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,1} g_1^\nu + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,1}}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu (u_2^\sigma - u_1^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,1}}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu (u_1^\sigma - u_0^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^1}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu \right], \mu = \overline{1, 2n}, \\ \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ C_{\nu\mu}^{1,m-2} g_{m-2}^\nu - C_{\nu\mu}^{1,m-1} g_{m-1}^\nu + C_{\nu\mu}^{2,m-1} g_{m-1}^\nu + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} (u_m^\sigma - u_{m-1}^\sigma) g_{m-1}^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) g_{m-1}^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^{m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} g_{m-1}^\nu \right] = \\ = \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[ -C_{\mu\nu}^{1,m-1} g_{m-1}^\nu + C_{\mu\nu}^{2,m-1} (g_{m-1}^\nu - g_{m-2}^\nu) + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu (u_m^\sigma - u_{m-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) + \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-2}^\nu} g_{m-2}^\nu (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^{m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu \right], \mu = \overline{1, 2n}. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности элементов  $g_k^\nu$  отсюда находим условия

$$C_{\nu\mu}^{1,k-1} + C_{\mu\nu}^{2,k} = \sum_{\sigma=1}^{2n} \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\mu} (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) \quad (k = \overline{2, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -C_{\nu\mu}^{1,k} + C_{\nu\mu}^{2,k} + C_{\mu\nu}^{1,k} - C_{\mu\nu}^{2,k} + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\mu} - \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} = \\ = \sum_{\sigma=1}^{2n} \left[ \left( \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} - \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} \right) (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) \right] \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2n} \left( \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\nu} - \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} \right) = 0 \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}). \quad (2.6)$$

Таким образом, выше доказана следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Система (1.4) является потенциальной в области  $D(\bar{N}_p)$  относительно билинейной формы (2.3) тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.4) – (2.6).

Остается вопрос построения функционала — потенциала оператора  $\bar{N}_p$  — аналога действия по Гамильтону.

### 3. Построение действия по Гамильтону

При выполнении условий (2.4) – (2.6) искомый функционал  $F_{\bar{N}_p}$  может быть построен по формуле (2.2). К этому вопросу можно подойти по-другому. Ищем потенциал оператора  $\bar{N}_p$  в виде

$$F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p] = \frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{\nu=1}^{2n} R_{\nu}^k \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - B^k \right), \quad (3.1)$$

где  $R_{\nu}(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\nu = \overline{1, 2n}$ ),  $B(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  — неизвестные непрерывно дифференцируемые функции, а  $R_{\nu}^k = R_{\nu}(t_k, u_k)$ ,  $R^k = (R_1^k, R_2^k, \dots, R_{2n}^k)$ ,  $B^k = B(t_k, u_k)$  ( $k = \overline{1, m-1}$ ).

Из определения потенциальности имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p] - F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]}{\varepsilon} &= \frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left( \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} h_k^{\mu} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + R_{\nu}^k \frac{h_{k+1}^{\nu} - h_k^{\nu}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} h_k^{\mu} \right) = \\ &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left( \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - \frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} \right) h_k^{\mu} = \\ &= (\bar{N}_m(\bar{u}_m), \bar{h}_m) = \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left( C_{\mu\nu}^{1,k} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \right) h_k^{\mu}. \end{aligned}$$

Считая, что элементы  $h_k^{\mu}$  произвольные, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - \frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} &= \sum_{\nu=1}^{2n} \left( C_{\mu\nu}^{1,k} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} \right) + E_{\mu}^k \\ (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Сравнивая левую и правую части тождеств (3.2), находим

$$C_{\mu\nu}^{1,k} = \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \quad (3.3)$$

$$-\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}). \quad (3.4)$$

Если существуют функции  $R_{\mu}^k$ , удовлетворяющие этим условиям, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \left( -\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} \right) &= \frac{\partial R_{\mu}^{k-1}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \left( \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \right) = -\frac{1}{\tau} C_{\mu\sigma}^{2,k} + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau}. \end{aligned}$$

В силу условий (2.4) имеем

$$-C_{\mu\sigma}^{2,k} + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} (u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}) = C_{\sigma\mu}^{1,k-1}.$$

Таким образом, получаем  $C_{\mu\nu}^{1,k} = \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}}$ . Значит, условия (3.3) являются следствием условий (3.4).

Итак, чтобы определить функции  $R^k$ ,  $B^k$ , нужно решить следующую систему уравнений:

$$-\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k, \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}).$$

Укажем некоторые частные случаи, для которых можно решить эти уравнения относительно  $R^k$ ,  $B^k$ .

- Пусть существуют функции  $\Phi_\mu^1(t_k, u_k), \Phi_\mu^2(t_k, u_k)$  такие, что

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) = \Phi_\mu^1(t_k, u_k) + \Phi_\mu^2(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

Тогда

$$\begin{cases} R_\mu^k = \Phi_\mu^2(t_k, u_k), \mu = \overline{1, 2n}, \\ B^k = - \sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu \int_0^1 \left[ E_\mu^k(t_k, \lambda u_k) + \frac{\Phi_\mu^1(k, \lambda u_k) + \Phi_\mu^2(k, \lambda u_k)}{\tau} \right] d\lambda. \end{cases}$$

- Пусть  $C_{\mu\nu}^{2,k}$  зависят только от  $k$ . Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) = \sum_{\nu=1}^{2n} \left[ (C_{\mu\nu}^{2,k+1} u_k^\nu - C_{\mu\nu}^{2,k} u_{k-1}^\nu) - u_k^\nu (C_{\mu\nu}^{2,k+1} - C_{\mu\nu}^{2,k}) \right].$$

Получаем

$$\begin{cases} R_\mu^k = - \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k+1} u_k^\nu, \mu = \overline{1, 2n}, \\ B^k = - \sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu \int_0^1 \left[ E_\mu^k(t_k, \lambda u_k) - \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda u_k^\nu \frac{C_{\mu\nu}^{2,k+1} - C_{\mu\nu}^{2,k}}{\tau} \right] d\lambda. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к действию по Гамильтону  $F_{\overline{N}_p}$ .

## 4. Пример

Рассмотрим систему уравнений движения точки единичной массы в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости [7]

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Ky^2 \\ -y \end{pmatrix} = 0, \\ (x(0), y(0)) = (\phi_1, \phi_2), \\ (x(1), y(1)) = (\phi_3, \phi_4), \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\dot{x} = y$  скорость частицы,  $K$  — постоянный коэффициент.

Запишем разностную схему этой системы

$$\begin{aligned} \overline{N}_p(\overline{u}_p) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y_k}{y_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_k-x_{k-1}}{\tau} \\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -Ky_k^2 \\ -y_k \end{pmatrix} = 0, \\ u_0 = (\phi_1, \phi_2)^T, u_m = (\phi_3, \phi_4)^T, \end{aligned}$$

где  $u_k = (x_k, y_k)^T$ .

Поскольку

$$C_{12}^{1,k-1} + C_{21}^{2,k} \neq \frac{\partial C_{11}^{2,k}}{\partial y_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) + \frac{\partial C_{12}^{2,k}}{\partial y_{k-1}} (y_k - y_{k-1}),$$

то разностная схема непотенциальная.

С помощью условий (2.4) – (2.6) можно найти матричный вариационный множитель

$$M_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_k^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_k \overline{N}_p(\overline{u}_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y_k^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y_k y_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_k-x_{k-1}}{\tau} \\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K \\ -\frac{1}{y_k} \end{pmatrix},$$

потенциальный оператор и

$$\begin{cases} R_1^k - R_1^{k-1} = \frac{1}{y_k y_{k-1}} (y_k - y_{k-1}) = -\frac{1}{y_k} + \frac{1}{y_{k-1}} \Rightarrow R_1^k = -\frac{1}{y_k}, \\ R_2^k - R_2^{k-1} = 0 \Rightarrow R_2^k = 0, \\ \frac{\partial B^k}{\partial x_k} + \frac{\partial B^k}{\partial y_k} = K + \frac{1}{y_k} \Rightarrow B^k = K x_k + \ln y_k. \end{cases}$$

Искомый функционал равен

$$F_{M_k \bar{N}_p} [\bar{u}_p] = -\frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau y_k} + K x_k + \ln y_k \right).$$

В случае непрерывного времени он имеет вид [7]

$$J = - \int_0^1 \left( \frac{1}{2y} \dot{x} + \frac{x}{2y^2} \dot{y} + Kx + \ln y \right) dt.$$

Обозначим

- $\bar{u}_p^1 = (\bar{x}_p^1, \bar{y}_p^1)^T$  — точное решение задачи (4.1),
- $\bar{u}_p^2 = (\bar{x}_p^2, \bar{y}_p^2)^T$  — решение, полученное при переходе к вариационному множителю и дальнейшей дискретизации функционала,
- $\bar{u}_p^3 = (\bar{x}_p^3, \bar{y}_p^3)^T$  — решение, полученное при прямом использовании метода Рунге — Кутты.

Для оценки погрешности решений  $\bar{u}_p^i$  ( $i = 2, 3$ ) используем норму  $\|\bar{u}_p^i - \bar{u}_p^1\|$  по формуле (1.3).

Положим  $m = 4, K = 1, u_0 = (0, 1)^T, u_m = (\frac{1}{2}, \ln 2)^T$ , находим

$$u^1(t_k) = \left( \ln(1 + t_k), \frac{1}{1 + t_k} \right)^T.$$

С помощью Matlab получаем таблицу значений и графики вышеперечисленных решений (рис. 4.1, 4.2).

Таблица

#### Значения решений в точках и погрешности решений

Table

| Solution values at points and solution errors |                                                  |                                                  |                                                  |             |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------|
| Решение                                       | $k = 1 (t = 0, 25)$                              | $k = 2 (t = 0, 5)$                               | $k = 3 (t = 0, 75)$                              | Погрешность |
| $\bar{u}_6^1$                                 | $\begin{pmatrix} 0,2231 \\ 0,8000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,4055 \\ 0,6667 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,5596 \\ 0,5714 \end{pmatrix}$ | 0           |
| $\bar{u}_6^2$                                 | $\begin{pmatrix} 0,2000 \\ 0,8333 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,3667 \\ 0,7143 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,5095 \\ 0,6250 \end{pmatrix}$ | 0,0329      |
| $\bar{u}_6^3$                                 | $\begin{pmatrix} 0,1800 \\ 0,7867 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,3248 \\ 0,6528 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,4467 \\ 0,5597 \end{pmatrix}$ | 0,0418      |

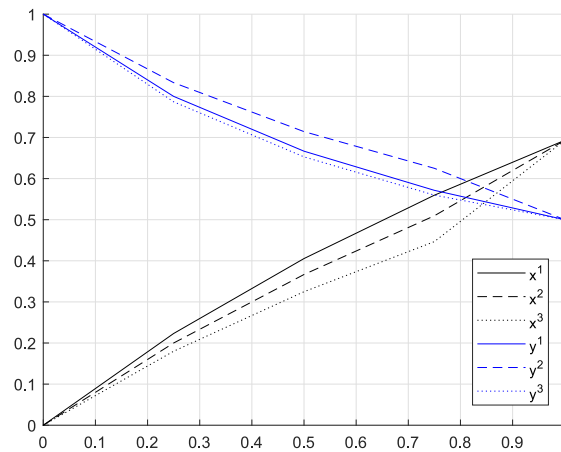


Рис. 4.1. Графики решений  $\bar{u}_6^1, \bar{u}_6^2, \bar{u}_6^3$   
Fig. 4.1. Graph of solutions  $\bar{u}_6^1, \bar{u}_6^2, \bar{u}_6^3$

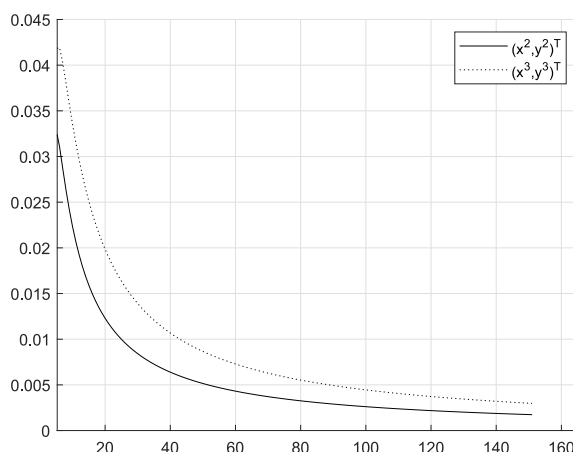


Рис. 4.2. Зависимость погрешности от количества узлов  $m$   
 Fig. 4.2. Dependence of the error on the number of nodes  $m$

## Выводы

Получены разностные уравнения, соответствующие системе вида  $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$  с непрерывным временем. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности рассматриваемой разностной системы относительно заданной билинейной формы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

## Литература

- [1] Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. 3-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с. URL: <https://booksee.org/book/443580>.
- [2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. 371 p. URL: <http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf>.
- [3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 74. pp. 711–719. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0>.
- [4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems // Chinese Physics. 2007. Vol. 16, № 3. pp. 582–587. DOI: <http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004>.
- [5] Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1992. Т. 40 С. 3–176. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/intd/v40/p3>.
- [6] Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. Москва: РУДН, 1991. 237 с.
- [7] Галлиулин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: Редакция ж-ла УФН, 1997. 324 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

Submitted: 27.09.2021

Revised: 28.10.2021

Accepted: 15.11.2021

**V.M. Savchin**

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation  
 E-mail: [savchin-vm@rudn.ru](mailto:savchin-vm@rudn.ru). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>

**P.T. Trinh**

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation  
 E-mail: [tr.phuoc.toan@gmail.com](mailto:tr.phuoc.toan@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>

## ON DISCRETE SYSTEMS WITH POTENTIAL OPERATORS<sup>2</sup>

### ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the potentiality of a discrete system obtained from the system of the form  $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$  with continuous time. The definition of potentiality of the corresponding discrete system is introduced. Necessary and sufficient conditions for its potentiality with respect to a given bilinear form are obtained. The algorithm for the construction of the corresponding functional—the analogue of the Hamiltonian action—is presented. The illustrative example is given.

**Key words:** potential operators; discrete systems.

**Citation.** Savchin V.M., Trinh P.T. On discrete systems with potential operators. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 74–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Savchin V.M., 2021

*Vladimir M. Savchin*—professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

© Trinh P.T., 2021

*Phuoc T. Trinh*—PhD student, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

## References

- [1] Trenogin V.A. Functional Analysis: textbook. 3rd edition. Moscow: FIZMATLIT, 2002, 488 p. Available at: <https://booksee.org/book/443580>. (In Russ.)
- [2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983, 371 p. Available at: <http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf>.
- [3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems. *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 74, pp. 711–719. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0>.
- [4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. *Chinese Physics*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 582–587. DOI: <http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004>.
- [5] Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 1994, vol. 68, no. 3, pp. 275–398. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01252319>. (English; Russian original)
- [6] Savchin V.M. Mathematical methods in mechanics of infinite dimensional nonpotential systems. Moscow: RUDN, 1991, 237 p. (In Russ.)
- [7] Galiullin A.S., Gafarov G.G., Malaishka R.P., Khwan A.M. Analytical dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu systems. Moscow: Redaktsiya zh-la UFN, 1997, 324 p. (In Russ.)

---

<sup>2</sup>This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.