DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.74.8.002

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Научная статья

Джээнбаева Г.А.

Институт математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, Кыргызстан

Корреспондирующий автор (baytemirova2007[at]mail.ru)

Аннотация

Изучена проблема: при выполнении каких условий периодическая функция будет решением интегрального уравнения Вольтерра с периодическими коэффициентами. В данной работе найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра, которые стремятся к решению периодической краевой задачи для порождающего уравнения. При этом применяется принцип сжатых отображений и условия аналитичности заданных функций. Само решение квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра построено в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, периодические решения краевой задачи, необходимое и достаточное условие существования периодических решений уравнения Вольтерра, принцип сжатых отображений, порождающее уравнение, условие аналитичности.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASILINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS

Research article

Dzheenbaeva G.A.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan

Corresponding author (baytemirova2007[at]mail.ru)

Abstract

The following problem is studied: under what conditions the periodic function is a solution of the Volterra integral equation with periodic coefficients. In this paper, we find sufficient conditions for the existence of periodic solutions of the boundary value problem for quasilinear integral Volterra equations that tend to the solution of a periodic boundary value problem for the generating equation. The principle of condensed mappings and the conditions for the analyticity of given functions are applied. The solution of the Volterra quasilinear integral equations is constructed in the space of continuous functions.

Keywords: Volterra integral equation, periodic solutions of the boundary value problem, necessary and sufficient condition for the existence of periodic solutions of Volterra equation, the principle of condensed mappings, the generating equation, the condition of analyticity.

I. Рассмотрим для интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ) второго рода

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds+f(t), \tag{1}$$

где *K(t,s)* – квадратная матричная функция; а $f(t)$ – вектор-функция определенные и непрерывные соответственно в областях $-\infty < S,\ t< \infty$, $-\infty < t< \infty$, причем

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),\quad f(t+\omega)=f(t), \tag{2}$$

Вопросы существования периодических решений

Как известно, для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\quad A(t+\omega)=A(t) \tag{3}$$

если *x(t)* – решение, то функция $x(t+\omega)$ тоже является ее решением. Этот факт лежит в основе методов исследования проблемы периодических решений систем вида (3). Для ИУВ (1) такое явление не имеет места, так как интегральный оператор Вольтерра не всегда отображает периодический вектор в периодический [5, С. 57], т.е. в случае ИУВ не для всякого решения *u(t)* будет его решением и функция $u(t+\omega)$. В силу не периодичности оператора Вольтерра очень важна проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

Теорема 1. Наряду с *u(t)* будет решением ИУВ (1), (2) и функция $u(t+\omega)$ в том, и только в том случае, когда для *u(t)* выполняется условие

$$\int_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0 \tag{4}$$

тождественно по $t\geq 0$.

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условий (4) теоремы. Пусть *u* = *u(t)* некоторое ω периодическое решение (1), т.е.

$$u(t+\omega)=u(t). \tag{5}$$

Отсюда в силу (1) имеем

$$\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+f(t+\omega)=\int_0^t K(t,\ s)u(s)ds+f(t).$$

Далее, учитывая (2) и преобразуя интеграл с левой стороны, получим

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+\int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds=\int_0^t K(t,s)u(s)ds.$$

Сделаем замену во втором интеграле левой стороны равенства: $s=\tau+\omega$. Находим пределы интегрирования: При $s=\omega,\tau=0$ и при $s=t+\omega,\tau=t$

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+\int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)ds=\int_0^t K(t,s)u(s)ds.$$

Из последнего равенства в силу (2), (5) имеем (4).

2) Докажем теперь достаточность условий (4). Предположим, что выполнено (4) и пусть *u(t)* – решение (1). Тогда в силу (2), (4) имеем

$$u(t+\omega)=\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+f(t+\omega)=\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+\int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+f(t)=$$

$$=\int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)d\tau+f(t)=\int_0^{t} K(t,\tau)u(\tau+\omega)d\tau+f(t).$$

Последнее соотношение показывает, что функция $u(t+\omega)$ также является решением уравнения (1). Что и требовалось доказать.

Замечание 1. В силу произвольности *t* в (4) в слагаемом $t+\omega$ можно опустить ω, но по соображениям дальнейших удобств мы сохраняем такую форму. Кроме того, для краткости в дальнейшем будем пользоваться символом $\forall t$.

Условие (4) представляет собой неявное ограничение на ядро $K(t,s)$.

Замечание 2. Теорема остается справедливой и для ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds=f(s) \tag{6}$$

при выполнении условий (2).

Следуя методике, приведенной в [3], покажем справедливость замечания 2. Пусть *u(t)* – некоторое периодическое решение (6), т.е. $u(t+\omega)=u(t)$ т.е. уравнение (6) превращено в тождество. Из теории чисел известно, что для любого $t\geq 0$ найдется натуральное число $n\geq 0$ и величина $\theta\in[0,\omega]$, что

$$t=\theta+n\omega,\quad n\geq 0,\quad 0\leq\theta\leq\omega.$$

Поэтому, заменяя в полученном тождестве (6) t *на* $\theta+n\omega$ и учитывая (2) получим

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=f(\theta). \tag{7}$$

Так как, во-первых,

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=\left[\int_0^{n\omega}+\int_{n\omega}^{\theta+n\omega}\right]K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=\int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds+\int_0^{\theta} K(\theta+\delta)u(\delta)d\delta.$$

где в последнем переходе второй интервал преобразован с помощью подстановки $s=\delta+n\omega$ и использованы периодичность ядра и решения; во-вторых, тождество (3.4.7) верно и при *n=0*, то

$$\int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=0,\quad \forall n\geq 1. \tag{8}$$

В свою очередь, так как

$$\int_{\omega}^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=\int_0^{(n-1)\omega} K(\theta+(n-1)\omega,s)u(s)ds=0, \tag{9}$$

где сначала проведено преобразование $s=\delta+\omega$ и использовано свойство ядра $K(t,s)$ из (2), а затем учтено, что соотношение (8) в силу произвольности *n* верно и для *n-1*. Имеем

$$\int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=\left[\int_0^{\omega}+\int_{\omega}^{n\omega}\right]K(\theta+n\omega,s)u(s)=0ds$$

Отсюда, учитывая (9) имеем

$$\int_0^{\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=0,$$

или, так как $t=\theta+n\omega$, отсюда имеем (4).

Таким образом, для существования ω–периодического решения ИУВ второго (первого) рода с периодическим ядром и свободным членом, необходимо и достаточно выполнения условия (4). Необходимость этого условия, видимо, впервые было обнаружено Г.Вахабовым [4], при исследовании интегро-дифференциальных систем. Условие (4) было активно использовано в [3], [4] при обосновании метода построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пример 1. Для ИУВ второго рода

$$u(s)+\int_0^{t}\cos s\,u(s)ds=\frac{\sin t}{2}(2+\sin t) \tag{10}$$

выполнены все условия (2), где $\omega=2\pi$. Уравнение (10) имеет решение , $u(t)=\sin t,$ период которой $\omega=2\pi$. Условие (4) в данном случае запишется в виде

$$\int_0^{2\pi}\cos s\sin s ds=0,$$

и оно выполнено (ортогональность функций $\sin t,\quad \cos t$ *на* $[0,2\pi]$).

Пример 2. Для ИУВ первого рода

$$\int_0^{t}(t-s)u(s)ds=1-\cos t \tag{11}$$

также выполнены условия (2), где $\omega=2\pi$. Уравнение (11) имеет решение $u(t)=\cos t$, период которой $\omega=2\pi$. В силу замечания 1, для $\forall t$ проверим выполнение условия (4):

$$\int_0^{2\pi}(t-s)\cos ds=-(t-s)\sin s\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin s\,ds=\cos s\Big|_0^{2\pi}=0.$$

II. Рассмотрим векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t)=\int_0^{t}K(t,s)u(s)ds+F(t,u),t\in(-\infty,\infty), \tag{12}$$

где $K(t,s)$ непрерывная квадратная матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $-\infty\le t\le\infty,\|u\|\le R,$ причём

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),F(t+\omega,u)=F(t,u) \tag{13}$$

Пусть $u=u_{\omega}(t),t\in[0,\omega]$ решение периодической краевой задачи $u(0)=u(\omega)$ для интегрального уравнения (12), (13). Обозначим $u=\tilde{u}_{\omega}(t)$ периодическое продолжение $u_{\omega}(t)$ на всю ось. Поставим вопрос: при выполнении каких условий $\omega-$периодическая функция $\tilde{u}_{\omega}(t)$ будет решением интегрального уравнения (12), (13).

Так как $\tilde{u}_{\omega}(t)$ есть ω периодическое продолжение $u_{\omega}(t)$ справедливо соотношение

$$\tilde{u}_{\omega}(t)=u_{\omega}(t-n\omega),n\omega\le t\le(n+1)\omega,n\ge 0 \tag{14}$$

Поскольку для любого $t\ge 0$ и заданного $\omega\ge 0$ всегда найдётся единственное натуральное число n такое, что $t=\theta+n\omega,$ где $\theta\in[0,\omega],$ то (14) можно представить в виде

$$\tilde{u}_{\omega}(t)=\tilde{u}_{\omega}(\theta+n\theta)=\tilde{u}_{\omega}(\theta),t=\theta+n\omega,0\le\theta\le\omega \tag{15}$$

Имеет место [4, С. 53]

Лемма. Если для $u_{\omega}(t)$, $t\in[0,\omega]$ и произвольного β выполнено условие

$$\int_0^{\omega}K(\beta+\omega,s)u_{\omega}(s)ds=0, \tag{16}$$

то для $\tilde{u}_{\omega}(t)$ и натурального *m* справедливо соотношение

$$\int_0^{\omega}K(\beta+m\omega,s)\tilde{u}_{\omega}(s)ds=0. \tag{17}$$

Эта лемма позволяет доказать следующее предложение:

Теорема 2. Периодическое продолжение $\tilde{u}_\omega(t)$ решения $u_\omega(t)$ периодической краевой задачи для интегрального уравнения (12) с периодическими коэффициентами (13) будет решением того же уравнения тогда и только тогда, когда для $u_\omega(t)$ выполнено условие (16).

Необходимость. Так как $\tilde{u}_\omega$ - решение задачи (12), (13), то справедливо тождество

$$\tilde{u}_\omega(t) = \int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds + F(t,\tilde{u}_\omega(t)) \tag{18}$$

Откуда в силу (12), (15)

$$\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)\tilde{u}_\omega ds = \int_0^{\omega} K(t+\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} K(t+\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds =$$

$$\begin{pmatrix} s=\tau+\omega \\ ds=d\tau \\ s=\omega,\tau=0 \\ s=t+\omega,\tau=t \end{pmatrix} = \int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds + \int_0^{t} K(t,\tau)\tilde{u}_\omega(s)ds, \tag{19}$$

0

для произвольного t имеем

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds = 0,$$

здесь можно положить $t=\beta$.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (16) и покажем, что $\tilde{u}_\omega(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (12). Составим выражение

$$V(t) = \tilde{u}_\omega(t) - \int_0^{t+\omega} K(t,s)\tilde{u}_\omega(s)ds - F(t,\tilde{u}_\omega(t)) \tag{20}$$

Положим в (20) $t=\theta+n\omega,\ 0\le\theta\le\omega$ и учитывая (13),(15) имеем

$$V(t) = V(\theta+n\omega) = u_\omega(\theta) - \int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\bar{u}_\omega(s)ds - F(\theta,u_\omega(\theta)) \tag{21}$$

Рассмотрим интегральную часть

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds = \left(\int_0^{n\omega} + \int_{n\omega}^{\theta+n\omega}\right) K(\theta+n\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds,$$

Первое слагаемое в силу леммы есть нуль $(m=1)$. Преобразуем второе слагаемое с помощью подстановки $s=\tau+n\omega$ и учитывая (13), (15) получим

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds = K(\theta,\tau)u_\omega(\tau)d\tau, 0\le\theta\le\omega \tag{22}$$

Преобразуем (21) с помощью (22) и учитывая, что $u_\omega(t)$ при $\theta\in[0,\omega]$ есть решение (12), имеем

$$V(t) = V(\theta+n\omega) = u_\omega(\theta) - \int_0^{\theta} K(\theta,\tau)u_\omega(\tau)d\tau - F(\theta,u_\omega(\theta)) \equiv 0, \tag{23}$$

$$0\le\theta\le\omega$$

Из сравнения (20) и(23) следует, что $\tilde{u}_\omega(t)$ есть решение интегрального уравнения (12). Теорема 2 полностью доказана.

III. Далее рассмотрим квазилинейную систему ИУВ

$$u(t) = \lambda\int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t) + \varepsilon F(t,u(t),\varepsilon) \tag{24}$$

где $K(t,s)\in C(-\infty<s\le t<\infty)\to R^{n\times n})$, $f(t)\in C\left(R\to R^n\right), F(t,u,\varepsilon)\in C\left(R\times R^n\to R^n\right)$. Кроме того, вектор-функция $F(t,u,\varepsilon)$ аналитична по векторному u и скалярному ε аргументам при $\|u\|\le h$. Наряду со сказанным будем предполагать

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),\ f(t+\omega)=f(t),$$
$$F(t+\omega,u,\varepsilon)=F(t,u,\varepsilon). \qquad (25)$$

В данном пункте исследуется проблема периодических решений для (24), (25).

Уравнение

$$u_0(t)=\lambda\int_0^t K(t,s)u_0(s)ds+f(t), \qquad (26)$$

получающееся из (24) при $\varepsilon=0$, называется порождающим. Предположим, что для $\forall\lambda$ оно имеет ω-периодическое решение, т.е.

$$u(0)=u(\omega). \qquad (27)$$

Ставим задачу. Найти решения $u=u_\omega(t)\in C[0,\omega]$ периодической краевой задачи для (24), которые при $\varepsilon\to0$ стремятся к решению $u_{0\omega}(t)$ периодической краевой задачи для порождающего уравнения (26), (27).

Для решения задачи предположим, что для системы (24), также выполнено условие (16).

Из аналитичности F по u следует, что она удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(t,u_1,\varepsilon)-F(t,u_2,\varepsilon)\|\le L(\varepsilon,\rho)\|u_1-u_2\|,\|u_i\|\le\rho\le h, i=1,2. \qquad (28)$$

Пусть $\Omega_\delta=\{u(t)\in C[0,\omega];\|u(t)\|\le\delta\}$,

и для $u(t)\in\Omega_\delta$ определим оператор $A(u)$:

$$u=A(u), \qquad (29)$$

$$A(u)=\lambda\int_0^t K(t,s)u(s)ds+f(t)+\varepsilon F(t,u(t),\varepsilon);\ t\in[0,\omega]. \qquad (30)$$

К операторному уравнению (29) применим принцип сжатых отображений. Очевидно, что $Au(t)\in C[0,\omega]$, т.е. оператор *A* отображает $C[0,\omega]$ в $C[0,\omega]$.

Далее покажем, что для достаточно малых q и ε_1 оператор Au отображает Ω_q в Ω_q для $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$ и является оператором сжатия.

Из тождества

$$f(t)+\varepsilon F(t,u,\varepsilon)=\varepsilon F(t,u,\varepsilon)-\varepsilon F(t,0,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon F(t,0,\varepsilon) \qquad (31)$$

и неравенства Липшица (28) имеем

$$\|f(t)+\varepsilon F(t,u,\varepsilon)\|\le\varepsilon L(\varepsilon,\delta)\|u\|+L_0(\varepsilon),$$
$$L_0(\varepsilon)\equiv\|f(t)+\varepsilon F(t,0,\varepsilon)\|,\|u\|\le\delta\le h. \qquad (32)$$

Из (30), (31) получим

$$\|Au\|\le[|\lambda|M\omega+\varepsilon L(\varepsilon,\delta)+L_0(\varepsilon).] \qquad (33)$$

где $M=\max\limits_{0\le s\le t\le\omega}|K(t,s)|$.

Если теперь удастся выбрать δ и $\varepsilon\in[0,\varepsilon]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$[|\lambda|M\omega+\varepsilon L(\varepsilon,\delta)]\delta+L_0(\varepsilon)<\delta,$$
$$|\lambda|M\omega+\varepsilon L(\varepsilon,\delta)<1, \qquad (34)$$

то будет $\|Au\|\le\delta,$ т.е. $A\Omega_\delta\in\Omega_\delta$, для таких ε и δ, но, полагая в левой части $\varepsilon=0$ и учитывая (34) будем иметь

$$|\lambda|M\omega\delta+\|f\|<\delta, \qquad (35)$$

при этом должно быть $\delta\le h.$ Поэтому (35) в определенном смысле является ограничением на f и ядро $K(t,s)$.

Кроме того, оператор Au будет сжимающим в Ω_q. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\|A(u_1)-A(u_2)\|\le[|\lambda|M\omega+\varepsilon L(\varepsilon,\delta)]\|u_1-u_2\|,$$
$$\|u_i\|\le q,i=1,2. \qquad (36)$$

В силу (36) можем сказать, что Au – действительно оператор сжатия на Ω_δ так как условия (34) совместна.

Поэтому в Ω_δ существует единственная неподвижная точка $u^0(t,\varepsilon)$ оператора Au. Ясно, что аналитичность функции $u^0(t,\varepsilon)$ по ε следует из аналитичности F по ε и u.

Тем самым, доказано.

Теорема 3. Пусть порождающая система (26) для $\forall\lambda$ имеет периодическое решение, тогда найдутся постоянные $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что в области $\|u\| < \delta, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$ существует и притом единственное решение $u^0(t,\varepsilon)$ периодической краевой задачи (24), (27), такое, что $u^0(t,0) = u_0^0(t)$ – решение периодической краевой задачи для порождающего уравнения (26), (27).

Конфликт интересов

Не указан.

Conflict of Interest

None declared.

Список литературы / References

1. Алымбаев А.Т. О нахождении периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений / Алымбаев А.Т. // Иследования по интегро-дифф. уравн. - Фрунзе: Илим,1983, вып.16. - С. 226-233.

2. Алымкулов К. О периодических решениях неавтономных систем диф. уравнений / Алымкулов К. // Илим, 1962, вып.5. - С. 177-182.

3. Боташев А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра / Боташев А.И. // М.: Издательство МФТН, 1998. – 88 с.

4. Вахабов Г. Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений / Вахабов Г. // УМЖ. 1969. – № 5. – С. 75-83.

5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Еругин Н.П. // Минск: Наука и техника, 1979. – 743 с.

6. Иманалиев М.И. Математические исследования / Иманалиев М.И., Боташев А.И. // Изв.АН Кирг. ССР, Сер.физ.-тех.и мат. науки. – 1990. – №2. – С. 3-20.

7. Иманалиев М.И. Интегральные уравнения / Иманалиев М.И, Хведелидзе Б.В., Боташев А.И. и др. // Дифф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 12. –С. 2050-2069.

8. Иманалиев М. Колебание и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем / Иманалиев М.И. // Фрунзе: Илим, 1974. – 352 с.

9. Байзаков А.Б. Об одном условии существования периодических решений интегральных уравнений Вольтерра / Байзаков А.Б. // Исследования по интегро-диф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – вып. 33. - С. 222-226.

10. Байзаков А.Б. О разрешимости начальной задачи сингулярно-возмущенной интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка / Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А. // Международная научно-практическая конференция. - Актюбинск, 2015. - С. 100-106

Список литературы на английском языке / References in English

1. Alymbaev A.T. O nakhozhdenii periodicheskikh resheniy avtonomnykh sistem integro-differentsial'nykh uravneniy [On finding Periodic Solutions of Autonomous Systems of Integrodifferential Equations] / Alymbayev A.T. / Isledovaniya po integro-diff. uravn [Investigations of integr. and diff. Eq]. – Frunze: Ilim, 1983, Is. 16. – P.226-233. [in Russian]

2. Alymkulov K. O periodicheskikh resheniyakh neavtonomnykh sistem dif. uravneniy [On Periodic Solutions of Non-autonomous Systems of Differential Equations] / Alymkulov K. // Ilim, 1962, Is. 5. – P.177-182. [in Russian]

3. Botashev A.I. Periodicheskiye resheniya integro-differentsial'nykh uravneniy Vol'terra [Periodic Solutions of Integrodifferential Volterra equations] / Botashev A.I. // - M.: MFTT Publishing house, 1998. – 88 p. [in Russian]

4. Vakhabov G. Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya periodicheskikh sistem integro-differentsial'nykh uravneniy [Numerical-analytical Method for Studying Periodic Systems of Integrodifferential Equations] / Vakhabov G. // - UMZh. 1969. – № 5. – P .75-83. [in Russian]

5. Yerugin N.P. Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy [Book for Reading on the General Course of Differential Equations] / Yerugin N.P. // Minsk: Science and technology. 3.9797. – 743 p. [in Russian]

6. Imanaliev M.I. Matematicheskiye issledovaniya [Mathematical Studies] / Imanaliev M.I., Botashev A.I. // Izv.AN Kirg..SSR, Ser.fiz.-tekh.i mat. nauki [Bul. of Kirg AS, Kirg. SSR, Phys and tech. and mat. Science series] – 1990. – № 2. – P. 3-20. [in Russian]

7. Imanaliev M.I. Integral'nyye uravneniya [Integral Equations] / Imanaliev M.I., Khvedelidze B.V., Botashev A.I. and others / Diff. uravneniya [Diff. equations] – 1982. – V. 18, № 12. – P. 2050-2069. [in Russian]

8. Imanaliev M. Kolebaniye i ustoychivost' resheniy singulyarno-vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem [Oscillation and Stability of Solutions of Singularly Perturbed Integrodifferential Systems] // Imanaliev M.I. – Frunze: Ilim, 1974. – 352 p. [in Russian]

9. Bayzakov A.B. Ob odnom uslovii sushchestvovaniya periodicheskikh resheniy integral'nykh uravneniy Vol'terra [On Condition for Existence of Periodic Solutions of Volterra Integral Equations] / Baizakov AB // Issledovaniya po integro-dif. uravneniyam [Investigations on integrodiff. equations]. – Bishkek: Ilim, 2004. – P.33. – P.222-226. [in Russian]

10. Bayzakov A.B. O razreshimosti nachal'noy zadachi singulyarno-vozmushchennoy integro-differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh tret'yego poryadka [On Solvability of Initial Problem of Singularly Perturbed Integrodifferential Partial Differential Equation of Third Order] / Bayzakov A.B., Dzhaenbaeva G.A. // Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya [International Scientific and Practical Conference]. – Aktyubinsk, 2015. – P. 100-106 [in Russian]