

УДК 517.988.52

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Н.А. ЕРЗАКОВА

Рассматриваются не линейные, но частично аддитивные операторы, действующие в правильных пространствах. Доказаны новые критерии уплотняющих относительно меры некомпактности Хаусдорфа операторов. Приводится приложение полученных результатов к разрешимости нелинейного уравнения.

Ключевые слова: частично аддитивные операторы, нелинейные операторы, уплотняющие операторы.

Пусть Ω - подмножество конечномерного пространства, причем $\mu(\Omega) < \infty$, μ - непрерывная мера; θ обозначает нулевую функцию ($\theta \equiv 0$ п.в. на Ω); U произвольное множество измеримых на Ω функций. Его носителем называется [1, с. 15] множество $\text{supp } U = \text{supp}(\text{sup}\{\kappa_{\text{supp } u} : u \in U\})$, где κ_D - характеристическая функция подмножества $D \subset \Omega$.

В каждом идеальном пространстве E существует неотрицательная измеримая на Ω функция u_0 с $\text{supp } u_0 = \text{supp } E$, называемая единицей пространства E [1, с. 17]. Через $M(u_0)$, также как и в [1, с. 35], обозначается пространство измеримых на Ω функций, для которых имеет смысл и конечна норма $\|u\|_{M(u_0)} = \inf\{\lambda : |u| \leq \lambda u_0 \text{ п.в.}\}$.

Напомним, что банахово пространство E измеримых функций на Ω называется идеальным, если из $|u(x)| \leq |v(x)|$ п.в., где $v \in E$, а u - измеримая функция, вытекает, что $u \in E$, причем $\|u\|_E \leq \|v\|_E$.

Идеальное пространство E называется правильным, если каждая функция u из E имеет абсолютно непрерывную норму, т.е. $\lim_{\mu(D) \rightarrow 0} \|P_D u\|_E = 0$, где $P_D u(s) = u(s)$, если $s \in D$ и $P_D u(s) = 0$, если $s \notin D$.

Заметим, что пространства Лебега $L_p(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$, пространства Лоренца и основной класс пространств Орлича являются правильными пространствами.

Так как $\|u\|_E \leq \lambda \|u_0\|_E$ для любой функции $u \in M(u_0)$, то имеет место вложение $M(u_0) \subseteq E$. В частности, если $u_0 \equiv 1$, то $M(u_0) = L_\infty(\Omega)$, т.е. это пространство ограниченных в существенном функций.

Лемма 1 [1, теорема 15, с.27]. Произвольное ограниченное подмножество U правильного пространства E относительно компактно в том и только в том случае, если оно компактно по мере и если нормы функций из U равностепенно абсолютно непрерывны.

Для произвольной функции $u \in E$ и произвольного числа $T > 0$ введем обозначения:

$$D(u, T, u_0) = \{s : |u(s)| > T u_0\}; \quad A(u, T, u_0) = \{s : |u(s)| \leq T u_0\} = \Omega \setminus D(u, T, u_0). \quad (1)$$

Пусть U не ограничено в $M(u_0)$. Введем в рассмотрение множества: U_{0T} , $U_{\infty T}$, $[U]_T$, $P_{A(T)}U$, $P_{D(T)}U$, где U_{0T} - множество всех функций из U , для которых $\|u\|_{M(u_0)} \leq T$, $U_{\infty T} = U \setminus U_{0T}$, $P_{A(T)}U = \{P_{A(u,T,u_0)}u : u \in U_{\infty T}\}$, $P_{D(T)}U = \{P_{D(u,T,u_0)}u : u \in U_{\infty T}\}$, $[U]_T = \{[u]_T : u \in U_{\infty T}\}$,

где $[u]_T(s)$ равно $P_{A(u,T,u_0)}u(s)$, если $s \in A(u,T,u_0)$ и $\frac{Tu_0(s)(P_{D(u,T,u_0)}u)(s)}{|P_{D(u,T,u_0)}u(s)|}$, если $s \in D(u,T,u_0)$,

$[U]_{DT} = \{[u]_{DT} : u \in U_{\infty T}\}$, где $[u]_{DT}(s)$ равно $(P_{D(u,T,u_0)}u)(s) \left(1 - \frac{Tu_0(s)}{|P_{D(u,T,u_0)}u(s)|}\right)$, если $s \in D(u,T,u_0)$,

и 0, если $s \notin D(u,T,u_0)$.

Справедливы включения:

$$U \subseteq U_{0T} \cup \{P_{A(T)}U + P_{D(T)}U\}, \quad (2)$$

$$U \subseteq U_{0T} \cup \{[U]_T + [U]_{DT}\}. \quad (3)$$

В работе обозначение $P_{D(u,T,u_0)}u$ используется только в случае, если функция $P_{D(u,T,u_0)}u$ не эквивалентна θ , т.е. $\|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E \neq 0$ соответственно $P_{D(T)}U$ состоит из ненулевых функций.

Определение 1 [2, с. 7]. Пусть E - банахово пространство, а U - ограниченное подмножество E . Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества U называется инфимум всех $\varepsilon > 0$, при которых U имеет в E конечную ε - сеть.

Для относительно компактного множества U справедливо равенство $\chi_E(U) = 0$. Кроме того, χ_E обладает рядом замечательных свойств [2, с.7], среди которых полуоднородность $\chi_E(tU) = |t| \chi_E(U)$ (t -число); полуаддитивность $\chi_E(U_1 \cup U_2) = \max\{\chi_E(U_1), \chi_E(U_2)\}$; инвариантность относительно сдвигов $\chi_E(U + b) = \chi_E(U)$ ($b \in E$), алгебраическая полуаддитивность $\chi_E(U_1 + U_2) \leq \chi_E(U_1) + \chi_E(U_2)$.

Так же, как в работах [3-5], обозначим через $\nu_E(U)$ меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества U правильного пространства E , полагая $\nu_E(U) = \lim_{\mu(D) \rightarrow 0} \sup_{u \in U} \|P_D u\|_E$.

Мера $\nu_E(U)$ обладает всеми вышеперечисленными свойствами $\chi_E(U)$ и отличается от меры некомпактности Хаусдорфа только тем, что равенство $\nu_E(U) = 0$ возможно в силу леммы 1 на множествах, не являющимися относительно компактными.

В дальнейшем назовем подмножества U_1, U_2 правильного пространства E **сравнимыми** $U_1 \leq U_2$, если в E существует такая функция $b(x)$, что для каждой функции u из U_1 найдется функция v из U_2 , для которой почти всюду выполняется неравенство $|u(x)| \leq |b(x)| + |v(x)|$.

Аналогично, два оператора F_1, F_2 , действующие из правильного пространства E в правильное пространство E_1 , назовем **сравнимыми** $F_1 \leq F_2$, если для каждого подмножества U из E имеет место $F_1(U) \leq F_2(U)$.

В силу свойства нормы в правильном пространстве и определения ν_E справедливо:

$$U_1 \leq U_2 \Rightarrow \nu_E(U_1) \leq \nu_E(U_2). \quad (4)$$

Лемма 2. Пусть U - произвольное ограниченное подмножество правильного пространства E . Тогда 1) $\chi_E(U) \geq \nu_E(U)$; 2) $\nu_E(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E$; 3) если U к тому же компактно по мере, то $\chi_E(U) = \nu_E(U)$.

Доказательство. Для множества U и произвольного числа $\varepsilon > 0$, согласно определению $\chi_E(U)$, найдется конечная $[\chi_E(U) + \varepsilon]$ - сеть $C_\varepsilon = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, такая, что

$U \subseteq C_\varepsilon + [\chi_E(U) + \varepsilon]B$, где B - единичный шар E . Поэтому по определению $\nu_E(U)$ получим $\nu_E(U) \leq \nu_E(C_\varepsilon + [\chi_E(U) + \varepsilon]B) \leq \chi_E(U) + \varepsilon$ в силу обычных свойств нормы, а также свойства абсолютной непрерывности нормы в правильном пространстве E . Учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получим утверждение 1), т.е. $\chi_E(U) \geq \nu_E(U)$.

Утверждения 2) и 3) докажем одновременно.

Для фиксированного $T > 0$ множества U_{0T} , $[U]_T$ сравнимы с одноэлементным множеством $\{Tu_0\}$. Поэтому в силу (4) и абсолютной непрерывности нормы в правильном пространстве E для любого $T > 0$ имеем $\nu_E(U_{0T}) = 0$ и $\nu_E([U]_T) = 0$, и, в случае компактности по мере U , по лемме 1 также $\chi_E(U_{0T}) = 0$ и $\chi_E([U]_T) = 0$.

Из включения (3), аддитивности и алгебраической полуаддитивности $\nu_E(U)$, $\chi_E(U)$ следует, что

$$\nu_E(U) \leq \nu_E([U]_T) + \nu_E([U]_{DT}) = \nu_E([U]_{DT}); \quad \chi_E(U) \leq \chi_E([U]_T) + \chi_E([U]_{DT}) = \chi_E([U]_{DT}) \quad (5)$$

для любого $T > 0$, фиксированного на момент рассуждений. Так как множества $[U]_{DT}$ и $P_{D(T)}U$ сравнимы: $[U]_{DT} \leq P_{D(T)}U$, то из (5) вытекает, что $\nu_E(U)$ и $\chi_E(U)$ ограничены сверху одним и тем же числом, а именно, $\sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E$. Следовательно, для произвольного $T > 0$ имеем $\chi_E(U) \leq \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E$ и $\nu_E(U) \leq \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E$. Устремляя $T \rightarrow \infty$, получим

$$\chi_E(U) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E \quad (6)$$

для компактного по мере U и $\nu_E(U) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E$ для любого U . По теореме 1 [1, с. 16] для ограниченного множества U в E имеет место $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \mu[D(u,T,u_0)] = 0$. Поэтому $\nu_E(U) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E \leq \overline{\lim_{\mu(D) \rightarrow 0}} \sup_{u \in U} \|P_D u\|_E = \nu_E(U)$.

Равенство 2) доказано. Из утверждения 1), 2) и (6) получим утверждение 3).

Определение 2 [2, с. 28]. Пусть E , E_1 - банаховы пространства. Непрерывный оператор $A: G \rightarrow E_1$, где $G \subset E$, называется χ -уплотняющим, если для любого ограниченного подмножества $U \subset G$, замыкание которого не компактно, выполняется неравенство

$$\chi_{E_1}(AU) < \chi_E(U).$$

Уплотняющие операторы, являющиеся обобщением компактных и сжимающих операторов, во многих случаях сохраняют свойства последних. Так, например, для уплотняющих операторов построена теория вращения векторных полей [6, глава 4].

Непрерывный оператор A называется (k, χ) -ограниченным, если для любого $U \subset G$ выполняется неравенство $\chi_{E_1}(AU) \leq k\chi_E(U)$.

Определение 3 [7, с.344]. Пусть E , E_1 - пространства функций на Ω , Ω_1 соответственно. Оператор $A: E \rightarrow E_1$ называется частично аддитивным, если для функций $u_1, u_2, \dots, u_m$ с непересекающимися носителями справедливо равенство:

$$A(u_1 + u_2 + \dots + u_m) = Au_1 + Au_2 + \dots + Au_m - (m-1)A\theta.$$

Теорема 1. Пусть E и E_1 - правильные пространства с единицами u_0 и u_{01} соответственно. Пусть непрерывный оператор A , действующий из E в E_1 , обладает свойством частичной ад-

дитивности. Пусть A каждое ограниченное по норме в $M(u_0)$ множество V переводит в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в E_1 , т.е. с $\nu_{E_1}(AV) = 0$. Тогда для любого множества $U \subset E$ выполняется неравенство $\nu_{E_1}(AU) \leq k_1(U, A)\nu_E(U)$, где

$$k_1(U, A) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \neq 0, u \in U} \frac{\left\| P_{D(AP_{D(u, T, u_0)} u, T, u_0)} AP_{D(u, T, u_0)} u \right\|_{E_1}}{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E}. \quad (7)$$

Пусть, кроме того, A является вполне непрерывным как оператор из $M(u_0)$ в E_1 . Тогда для любого множества $U \subset E$ выполняется неравенство $\chi_{E_1}(AU) \leq k(U, A)\nu_E(U)$, где

$$k(U, A) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \neq 0, u \in U} \frac{\left\| AP_{D(u, T, u_0)} u \right\|_{E_1}}{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E}. \quad (8)$$

Доказательство. Заметим, что $k_1(U, A) \leq k(U, A)$. Доказательства $\nu_{E_1}(AU) \leq k_1(U, A)\nu_E(U)$ и $\chi_{E_1}(AU) \leq k(U, A)\nu_E(U)$ для оператора A , вполне непрерывного из $M(u_0)$ в E_1 , проведем параллельно. Если U ограничено в $M(u_0)$, то требуемые неравенства выполнены, так как $\nu_{E_1}(AU) = 0$ по предположению теоремы и $\chi_{E_1}(AU) = 0$ для оператора A , вполне непрерывного из $M(u_0)$ в E_1 . Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы в случае, когда для любого $T > 0$ множество $P_{D(T)}U$ не пусто, т.е. найдется функция, для которой $\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \neq 0$.

Очевидно, из частичной аддитивности оператора A , включения (2) следует, что $AU \subseteq AU_{0T} \cup (AP_{D(T)}U + AP_{A(T)}U - A\theta)$.

Отсюда в силу полуаддитивности, алгебраической полуаддитивности ν_{E_1} и χ_{E_1} , равенств $\nu_{E_1}(A\theta) = 0$, $\chi_{E_1}(A\theta) = 0$ получим $\nu_{E_1}(AU) \leq \max\{\nu_{E_1}(AU_{0T}), (\nu_{E_1}(AP_{D(T)}U) + \nu_{E_1}(AP_{A(T)}U))\}$,

$$\chi_{E_1}(AU) \leq \max\{\chi_{E_1}(AU_{0T}), (\chi_{E_1}(AP_{D(T)}U) + \chi_{E_1}(AP_{A(T)}U))\}. \quad (9)$$

Для каждого $u \in P_{A(T)}U \cup U_{0T}$ имеем $\|u\|_{M(u_0)} \leq T$. Поэтому $\nu_{E_1}(AP_{A(T)}U) = 0$ и $\nu_{E_1}(AU_{0T}) = 0$ в силу предположения теоремы и $\chi_{E_1}(AP_{A(T)}U) = 0$ и $\chi_{E_1}(AU_{0T}) = 0$ для оператора A , вполне непрерывного из $M(u_0)$ в E . Следовательно,

$$\nu_{E_1}(AU) \leq \nu_{E_1}(AP_{D(T)}U), \quad (10)$$

а из (9) вытекает, что $\chi_{E_1}(AU) \leq \chi_{E_1}(AP_{D(T)}U)$ для любого $T > 0$. В силу выбора множества U множество $P_{D(T)}U$, состоящее из ненулевых функций, не пусто и

$$\chi_{E_1}(AU) \leq \sup_{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \neq 0, u \in U} \left\| AP_{D(u, T, u_0)} u \right\|_{E_1} = \sup_{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \neq 0, u \in U} \left(\frac{\left\| AP_{D(u, T, u_0)} u \right\|_{E_1}}{\left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E} \left\| P_{D(u, T, u_0)} u \right\|_E \right).$$

Отсюда

$$\chi_{E_1}(AU) \leq \sup_{\left\| P_{D(u,T,u_0)} u \right\|_E \neq 0, u \in U} \left(\frac{\|AP_{D(u,T,u_0)} u\|_{E_1}}{\|P_{D(u,T,u_0)} u\|_E} \right) \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)} u\|_E.$$

Устремляя $T \rightarrow \infty$, согласно утверждению леммы 2 получим

$$\chi_{E_1}(AU) \leq k(U, A) \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T,u_0)} u\|_E = k(U, A) \nu_E(U), \text{ где } k(U, A) \text{ из (8).}$$

Из (10), принимая во внимание, что величина $\nu_{E_1}(AP_{D(T)}U)$ по утверждению 2) леммы 2 является пределом невозрастающей относительно T последовательности, запишем

$$\nu_{E_1}(AU) \leq \nu_{E_1}(AP_{D(T)}U) \leq \sup_{u \in U} \left\| P_{D(AP_{D(u,T,u_0)} u, T, u_{01})} AP_{D(u,T,u_0)} u \right\|_{E_1}. \quad (11)$$

Из (11) по аналогии с тем, как получено утверждение для $k(U, A)$ из (8), получим утверждение для $k_1(U, A)$ из (7).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть оператор Урысона $(Au)(t) = \int_{\Omega} K[t, s, u(s)] ds$, ядро которого удовлетворяет условиям Каратеодори, непрерывен как оператор из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ ($1 \leq p, q < \infty$), и вполне непрерывен как оператор из $L_{\infty}(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Пусть для некоторого множества $U \subset L_p(\Omega)$ константа $k(U, A)$ из (8) удовлетворяет неравенству $k(U, A) < 1$. Тогда A является χ -уплотняющим оператором на множестве U .

Аналогично, если A компактный по мере оператор и для некоторого множества $U \subset L_p(\Omega)$ константа $k_1(U, A)$ из (7) удовлетворяет неравенству $k_1(U, A) < 1$. Тогда A является χ -уплотняющим оператором на множестве U .

Доказательство. Пусть для некоторого множества $U \subset L_p(\Omega)$ константа $k(U, A)$ из (8) удовлетворяет неравенству $k(U, A) < 1$. Как утверждается в [7, с.364] оператор Урысона является частично аддитивным. Поэтому выполнены все предположения теоремы 1, из которой следует, что для оператора Урысона и для любого подмножества $V \subseteq U$ справедливо неравенства $k(V, A) \leq k(U, A) < 1$ и $\chi_{L_q}(AV) \leq k(U, A) \nu_{L_p}(V)$. Отсюда по утверждению 1) леммы 2 $\chi_{L_q}(AV) \leq k(V, A) \nu_{L_p}(V) \leq k(V, A) \chi_{L_p}(V)$, т.е. A является (k, χ) -ограниченным с $k < 1$, а, следовательно, χ -уплотняющим оператором.

Аналогично рассуждаем в случае компактного по мере оператора A , учитывая при этом, что по утверждению 3) леммы 2 имеем равенство $\chi_{L_q}(AV) = \nu_{L_q}(AV)$ для любого ограниченного множества $V \subset L_p(\Omega)$.

Теорема доказана.

Пусть вещественная функция $f(x, u)$, где $x \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$, удовлетворяет условию Каратеодори, т.е. при каждом фиксированном u измерима по x и почти при всех x непрерывна по u .

Рассмотрим нелинейный оператор суперпозиции [7, с. 340] $Fu(x) = f[x, u(x)]$.

Теорема 3. Пусть непрерывный оператор K , действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ ($1 \leq p < q < \infty$), обладает свойством частичной аддитивности. Пусть, кроме того, K вполне

непрерывный как оператор из $L_\infty(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Пусть $F : L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ - оператор суперпозиции. Тогда оператор KF является (k, χ) -ограниченным на шаре $B(u_1, r) = \{u \in L_q(\Omega) : \|u - u_1\|_{L_q} \leq r\}$ (u_1 и r произвольны) с константой

$k = ak(F(B(u_1, r)), K)r^{\frac{q-1}{p}}$, где $k(F(B(u_1, r)), K)$ из (8), а константа $a > 0$ зависит только от F .

Доказательство. Пусть U - подмножество из $B(u_1, r)$, т.е. $U \subseteq u_1 + rB$, где B - единичный шар $L_q(\Omega)$. По теореме 1 для оператора K имеем

$$\chi_{L_q(\Omega)}(KFU) \leq k(F(B(u_1, r)), K)\nu_{L_p(\Omega)}(FU). \quad (12)$$

По лемме 17.6 из [7] найдутся число $a > 0$ и функция $b \in L_p(\Omega)$, такие, что $|Fu(x)| \leq |b(x)| + a|u(x)|^{q/p}$ для любой функции $u \in U$. Отсюда оператор суперпозиции F сравним с оператором суперпозиции $F_1 u(x) = a|u(x)|^{q/p}$

Следовательно, в силу (4) $\nu_{L_p(\Omega)}(FU) \leq \nu_{L_p(\Omega)}(F_1U)$ и

$$\chi_{L_q(\Omega)}(KFU) \leq k(F(B(u_1, r)), K)\nu_{L_p(\Omega)}(F_1U). \quad (13)$$

Оператор суперпозиции обладает свойством частичной аддитивности [7, с. 344], по теореме 17.1 из [7] непрерывен как оператор из $L_q(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

Кроме того, по лемме 17.4 из [7] каждое множество U , ограниченное в пространстве $L_\infty(\Omega)$, оператор суперпозиции переводит в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_p(\Omega)$, т.е. $\nu_{L_p(\Omega)}(FU) = 0$. Отсюда по теореме 1

$$\nu_{L_p(\Omega)}(F_1U) \leq k_1(U, F_1)\nu_{L_q(\Omega)}(U) \leq k(U, F_1)\nu_{L_q(\Omega)}(U).$$

Полагая в (8) $D(u, T, u_0) = D(u, T)$ при $u_0 \equiv 1$, вычисляем

$$k(U, F_1) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)} \neq 0, u \in U} \frac{\|F_1 P_{D(u,T)}u\|_{L_p(\Omega)}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)} \neq 0, u \in U} \frac{\|a |P_{D(u,T)}u|^{q/p}\|_{L_p(\Omega)}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}}.$$

Учитывая определение нормы в $L_p(\Omega)$, получим

$$k(U, F_1) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)} \neq 0, u \in U} \frac{a\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}^{q/p}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in u_1 + rB} a\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}^{\frac{q-1}{p}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in rB} a\|P_{D(u,T)}u\|_{L_q(\Omega)}^{\frac{q-1}{p}}.$$

Так как для ограниченного множества U в $L_q(\Omega)$ имеет место $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in U} \mu[D(u, T)] = 0$ [1, с. 16], то в силу абсолютной непрерывности нормы отбрасываем $P_{D(u,T)}u_1$.

Таким образом, $k(U, F_1) \leq ar^{q/p-1}$ и из (12), (13), утверждения 1) леммы 2 следует, что

$$\chi_{L_q(\Omega)}(KFU) \leq k(F(B(u_1, r)), K)\nu_{L_p(\Omega)}(F_1U) \leq k(F(B(u_1, r)), K)ar^{q/p-1}\chi_{L_q(\Omega)}(U).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть K – линейный непрерывный оператор, действующий из $L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$ ($1 \leq p < q < \infty$) и вполне непрерывный как оператор из $L_\infty(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Пусть $F : L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ – оператор суперпозиции. Тогда оператор KF является (k, χ) –ограниченным на шаре $B(u_1, r) = \{u \in L_q(\Omega) : \|u - u_1\|_{L_q} \leq r\}$ (u_1 и r произвольны) с константой $k = a \|K\|_{L_p \rightarrow L_q} r^{\frac{q}{p}-1}$, где a зависит только от F . Пусть, кроме того, оператор суперпозиции удовлетворяет неравенству

$$|Fu(x)| \leq a |u(x)|^{q/p}. \quad (14)$$

Тогда для всех $g \in L_q(\Omega)$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что уравнение $u = KF u + \varepsilon g$ разрешимо в $L_q(\Omega)$.

Доказательство. Для каждого $u \in L_q(\Omega)$ имеем

$$\|KF u + \varepsilon g\|_{L_q(\Omega)} \leq a \|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)} \|Fu\|_{L_p(\Omega)} + \varepsilon \|g\|_{L_q(\Omega)}. \quad (15)$$

В силу (14) $\|Fu\|_{L_p(\Omega)} \leq a \|u\|_{L_q(\Omega)}^{q/p} = a \|u\|_{L_q(\Omega)}^{q/p}$. Пусть u принадлежит шару радиуса r в $L_q(\Omega)$ с центром в 0 . Тогда из (15) следует, что

$$\|KF u + \varepsilon g\|_{L_q(\Omega)} \leq a \|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{q/p} + \varepsilon \|g\|_{L_q(\Omega)} \leq a \|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)} r^{q/p} + \varepsilon \|g\|_{L_q(\Omega)} \leq r,$$

если ε, r достаточно малы. Таким образом, для оператора $Au = KF u + \varepsilon g$ справедливо включение $AB(0, r) \subseteq B(0, r)$ для достаточно малых ε, r . Оператор KF удовлетворяет всем предположениям теоремы 3. В силу линейности оператора K имеем $k(F(B(u_1, r)), K) \leq \|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)}$.

Таким образом, оператор KF является χ –уплотняющим по теореме 3 настоящей работы при достаточно малых r , а следовательно, и $Au = KF u + \varepsilon g$, так как постоянное слагаемое εg не влияет на величину меры некомпактности Хаусдорфа [2, с.7].

Применим к оператору $Au = KF u + \varepsilon g$ обобщение теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки на χ –уплотняющие операторы [2, теорема 1.5.11, с.33], получим существование решения в пространстве $L_q(\Omega)$ уравнения $u = KF u + \varepsilon g$.

Теорема доказана.

Замечание. В теоремах 1 - 3 настоящей работы получены новые результаты. В теореме 3 обобщается результат, доказанный ранее автором настоящей работы, для линейного оператора K , на случай частично аддитивного оператора K .

К классу операторов, рассмотренных в теореме 3, относится интегральный оператор Гаммерштейна [7, с. 365].

Результаты леммы 2 и теоремы 4 впервые доказаны в [3-5].

В теореме 4 доказана так называемая ε -разрешимость, понятие которой введено в работе [8].

Напомним, что под ε -разрешимостью произвольного уравнения $Au = g$ понимается следующее: для заданной функции g существуют функция u и число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющие уравнению $Au = \varepsilon g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Забрейко П.П.** Идеальные пространства функций. - Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений // Вестник Ярославского университета. Вып. 8. Ярославль, 1974. С. 12-52.
2. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.** Меры некомпактности и уплотняющие операторы. – Новосибирск: Наука, 1986.
3. **Yerzakova N.A.** On Measures of Non-Compactness in Regular Spaces// Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1996.V. 15. № 2, p. 299-307.
4. **Ерзакова Н.А.** Компактность по мере и мера некомпактности // Сиб. Мат.Ж. 1997. Т. 38, № 5. С. 1071-1073.
5. **Ерзакова Н.А.** Нелинейное уравнение и весовое неравенство // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: Труды конференции ВГУ, 2003. С. 77-81.
6. **Красносельский М.А., Забрейко П.П.** Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975.
7. **Красносельский М.А., Забрейко П.П. и др.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966.
8. **Kalton N.J., Verbitsky I.E.** Nonlinear equations and weighted norm inequalities// Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. № 9, p. 3441-3497.

ON NONLINEAR OPERATORS

Erzakova N.A.

Partially additive (generally) nonlinear operators in regular spaces are studied. New criteria for such operators to be condensing with respect to the Hausdorff measure of non-compactness are proved. The results obtained are applied to the solvability of nonlinear equations.

Сведения об авторе

Ерзакова Нина Александровна, окончила Новосибирский государственный университет (1976), доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики МГТУ ГА, автор более 50 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.