ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.331

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ СУММИРОВАНИЯ

И. Ф. Авдеев (г. Москва)

Аннотация

В данной работе получен некоторый аналог формулы Эйлера — Маклорена, которая более удобна в применении.

Используемые в математике формулы суммирования служат главным образом для того, чтобы выразить значение сумм функции целого аргумента по некоторому сплошному промежутку суммирования в виде явных формул, включающих в себя многочлены или другие элементарные функции, зависящие от границ промежутка суммирования, а так же интегралы с весами от самой функции и ее производных. Дело в том, что аналитические свойства сумм обычно поддаются исследованию в значительно меньшей степени, чем свойства конкретных функций или интегралов от них, в котором в отличии от сумм применимы стандартные средства математического анализа.

Иногда некоторые из таких сумм поддаются прямому вычислению. Для примера укажем сумму арифметической и геометрической прогрессий.

Несколько сложнее ситуация складывается в том случае, когда нужно суммировать значение некоторого многочлена. Здесь оказывается полезным представление произвольного многочлена

$$P\left(x\right) = P_n\left(x\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

в виде

$$P_n\left(x\right) = b_0q_0\left(x\right) + b_1q_1\left(x\right) + b_2q_2\left(x\right) + \ldots + b_nq_n\left(x\right),$$

где $b_0, \ldots, b_n$ некоторые постоянные, а функции $q_0\left(x\right), \ldots, q_n\left(x\right)$ – «треугольные»многочлены, то есть многочлены вида

$$q_k\left(x\right) = \frac{x\left(x-1\right)\ldots\left(x-k+1\right)}{k!}.$$

Такое представление, очевидно, единственно.

Заметим, что при $k \geqslant 0$ выполняется равенство

$$q_{k+1}\left(x\right) - q_{k+1}\left(x-1\right) = q_k\left(x-1\right).$$

Если просуммировать это равенство по x в пределах от 1 до y, то получим формулу

$$q_{k+1}(y) - q_{k+1}(y-1) = q_k(y-1)$$

$$q_{k+1}(y-1) - q_{k+1}(y-2) = q_k(y-2)$$

$$\vdots$$

$$q_{k+1}(1) - q_{k+1}(0) = q_k(0)\,.$$

Таким образом, учитывая, что $q_{k+1}(0) = 0$, получим

$$q_{k+1}(y) = \sum_{x=0}^{y-1} q_k(x).$$

Следовательно

$$\sum_{x=0}^{y-1} P_n(x) = b_0 q_1(y) + b_1 q_2(y) + \ldots + b_n q_{n+1}(y)\,.$$

Для произвольных гладких функций $f(x)$ рассчитывать на наличие подобных универсальных формул не приходится. Однако в 30-х годах XVIII столетия независимо друг от друга Л. Эйлер и К. Маклорен предложили формулу, позволяющую дискретные суммы значений выразить через значение интегралов от самой функции и ее производных некоторого порядка. Данная формула носит название формула Эйлера — Маклорена.

Современный вид этой формулы выглядит так

$$\sum_{a\leqslant k<b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где

$$R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx.$$

Здесь $a \leqslant b$, m — натуральное, B_k — числа Бернулли, $f(x)$ — достаточно гладкая функция, чтобы иметь $f^{'(x)}, \cdots, f^{(m)}(x)$, $B_m(t)$ — многочлен Бернулли, определяемый рекуррентным равенством

$$B_0(x) = 1, B_n^{'}(x) = nB_{n-1}(x)\,, \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Вывод данной формулы можно посмотреть в известном учебнике Г. М. Фихтенгольца [1].

Основной целью данной статьи является вывод некоторого аналога формулы Эйлера — Маклорена, которая, на наш взгляд более удобна в применении.

Заметим еще, что предлагаемый обычно в математической литературе вывод формулы Эйлера — Маклорена довольно громоздок, в то время как используемые нами выкладки вполне прозрачны.

Следует сказать, что на практике обычно применяются упрощенные варианты формулы Эйлера — Маклорена, в частности в [2] доказана формула, называемая формулой суммирования Эйлера, которая имеет вид

$$\sum_{a<n\leqslant x} f(n) - \rho(x) f(x) = \int_a^x f(u)du - \int_a^x \rho(u) f'(u)du - \rho(a) f(a),$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$.

С помощью интегрирования по частям, из последней формулы непосредственно вытекает новое соотношение, которое называется формулой Сонина [3], которая выглядит так

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x) - \rho(R) f(R) =$$
$$= \int_Q^R f(x)\,dx - \rho(Q) f(Q) - \sigma(R) f'(R) + \sigma(Q) f'(Q) + \int_Q^R \sigma(x) f''(x)\,dx,$$

где $\sigma(x) = \int\limits_0^x \rho(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\{x\} - \{x\}^2\right)$.

Если в последнем интеграле в правой части данного равенства несколько раз выполнить интегрирование по частям, то получим другой вид формулы суммирования.

Введем следующие обозначения

$$\sigma_0(x) = \sigma(x),\ \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt, \ldots, \sigma_{k+1}(x) = \int_0^x \sigma_k(t)\,dt,$$

тогда $\sigma_0'(x) = \rho(x)$, $\sigma_\nu'(x) = \sigma_{\nu-1}(x)$ $(\nu \geqslant 1)$.

Имеет место следующая формула.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка k $(k \geqslant 2)$ на $[Q, R]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x) - \rho(R) f(R) =$$
$$= \int_Q^R f(x)\,dx - \rho(Q) f(Q) - \sigma(R) f'(R) + \sigma(Q) f'(Q) + \ldots +$$

$$+(-1)^{k-1}\left(\sigma_{k-1}(R)\, f_1^{(k-1)}(R)-\sigma_{k-2}(Q)\, f^{(k-1)}(Q)\right)+(-1)^k\int_Q^R \sigma_{k-2}(t)\, f^{(k)}(t)dt=$$

$$=\int_Q^R f(x)\,dx-\rho(Q)\, f(Q)+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu\left(\sigma_{\nu-1}(R)\, f^{(\nu)}(R)-\sigma_{\nu-1}(Q)\, f^{(\nu)}(Q)\right)+$$

$$+(-1)^k\int_Q^R \sigma_{k-2}(t)\, f^{(k)}(t)dt.$$

Доказательство. Правая и левая часть доказываемого равенства, рассматриваются как функции от параметра R, являются непрерывными. Если же R не целое, то обе эти функции будут гладкими. Кроме того при $R=Q$ и правая и левая часть равенства обращаются в нуль. Поэтому, для доказательства его достаточно убедиться, что в каждой нецелой точке x производная левой и правой части совпадает.

Действительно, производная левой части равна

$$\left(\sum_{Q<x\leqslant R} f(x)-\rho(R)\, f(R)\right)'_R=0-\rho'(R)\, f(R)-\rho(R)\, f'(R)=f(R)-\rho(R)\, f'(R)\,.$$

Для производной в правой части равенства имеем

$$\left(\int_Q^R f(x)\,dx-\rho(Q)\, f(Q)+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu\left(\sigma_{\nu-1}(R)\, f^{(\nu)}(R)-\sigma_{\nu-1}(Q)\, f^{(\nu)}(Q)\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\int_Q^R \sigma_{k-2}(t)\, f^{(k)}(t)dt\right)'_R=f(R)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu\left(\sigma'_{\nu-1}(R)\, f^{(\nu)}(R)+\sigma_{\nu-1}(R)\, f^{(\nu+1)}(R)\right)+(-1)^k\sigma_{k-2}(R)\, f^{(k)}(R)=$$

$$=f(R)-\rho(R)\, f'(R)+\sum_{\nu=2}^{k-1}(-1)^\nu\sigma_{\nu-2}(R)\, f^{(\nu)}(R)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu\sigma_{\nu-1}(R)\, f^{(\nu+1)}(R)+(-1)^k\sigma_{k-2}(R)\, f^{(k)}(R)=f(R)-\rho(R)\, f'(R)+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{k}(-1)^\nu\sigma_{\nu-2}(R)\, f^{(\nu)}(R)-\sum_{\nu=2}^{k}(-1)^\nu\sigma_{\nu-2}(R)\, f^{(\nu)}(R)=f(R)-\rho(R)\, f'(R)\,.$$

Таким образом для производных левых и правых частей равенства получено одно и тоже выражение. Следовательно теорема полностью доказана.

Анализ формулы составляющей содержание доказанной теоремы показывает, что несмотря на ее естественный вид, она имеет недостатки, препятствующие ее применению. Это связано с тем, что в ней отсутствует явный вид величины, получающейся в результате многократного интегрирования функции $\rho(x)$, то есть функции $\sigma_k(x)$. Кроме того функция $\sigma_k(x)$ с ростом x растет по порядку также, как x^k, так как интеграл от функции $\sigma_0(x)$ по единичному промежутку равен константе $\frac{1}{12}$.

На самом деле при доказательстве нашей формулы мы пользуемся только тем фактом, что функция $\sigma_k(x)$ является первообразной для σ_{k-1}, хотя в условиях теоремы предполагается явное задание. Но так как все первообразные от фиксированной функции отличаются на константу, то за счет ее выбора можно усовершенствовать эту формулу. Мы также ограничим себя выбором чисел Q и R, считая их полуцелыми.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Q и R – полуцелые числа, удовлетворяющие условию $Q < R$. На функцию $f(x)$ наложим условия, что на отрезке $[Q, R]$ ее k-ая производная существует и непрерывна. Тогда при любом натуральном m справедлива следующая формула суммирования*

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(n) = \int_Q^R f(x)dx + f'(x)\frac{\zeta(2)}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_Q^R + \ldots +$$
$$+ (-1)^{m-1}\frac{\zeta(2m)\, f^{(2m-1)}(x)}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)\Bigg|_Q^R + T_{2m},$$

где

$$T_{2m} = (-1)^{m-1} 2\int_Q^R f^{(2m)}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi \mathrm{kx}}{(2\pi k)^{2m}}dx.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Рассмотрим сначала базу индукции, то есть случай $m = 1$. Тогда доказываемая формула приобретает вид

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(n) = \int_Q^R f(x)\,dx + f'(x)\frac{\zeta(2)}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_Q^R + T_2,$$

где

$$T_2 = 2\int_Q^R f''(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi \mathrm{kx}}{(2\pi k)^2}dx.$$

Для доказательства этого соотношения воспользуемся формулой Сонина. В нашем случае она записывается в следующем виде

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x) = \int_Q^R f(x)\,dx + \rho(x)f(x)\Bigg|_Q^R - \sigma(x)f'(x)\Bigg|_Q^R + \int_Q^R \sigma(x)f''(x)\,dx.$$

Заметим, что имеет место разложение

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k},$$

и $\rho(Q) = \rho(R) = 0$, так как Q, R предполагаются полуцелыми. Кроме того

$$\sigma(x) = \int_0^x \rho(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin 2\pi ky}{\pi k} dy = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{2\pi^2 k^2}\bigg|_0^x =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos 2\pi kx}{2\pi^2 k^2} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2}\zeta(2).$$

Подставим полученное значение для $\sigma(x)$ в формулу Сонина. Получим

$$\int_Q^R \sigma(x) f''(x)dx = \int_Q^R \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2}\zeta(2) \right) f''(x)dx =$$
$$= 2\int_Q^R -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} f''(x)\,dx + \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} \int_Q^R f''(x)\,dx =$$
$$= -2\int_Q^R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} f''(x)\,dx + \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} \int_Q^R df'(x) =$$
$$= -2\int_Q^R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} f''(x)\,dx + \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} f'(x)\bigg|_Q^R.$$

Далее, так как Q и R – полуцелые, то

$$\sigma(Q) = \sigma(R) = \sigma\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2}\zeta(2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\pi^2 k^2} + \frac{1}{2\pi^2}\zeta(2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\zeta(2) + \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\zeta(2) + \zeta(2) - \frac{1}{2}\zeta(2) \right) =$$
$$= \frac{3}{4\pi^2}\zeta(2) = \frac{1}{8}.$$

Таким образом приходим к равенству

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x) = \int_Q^R f\left(x\right)dx + 0 + \frac{3}{4\pi^2}\zeta\left(2\right)f'\left(x\right)\Big|_Q^R + 2\int_Q^R \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{\left(2\pi k\right)^2}f''\left(x\right)dx =$$
$$= \int_Q^R f\left(x\right)dx + \frac{1}{4\pi^2}\zeta\left(2\right)f'\left(x\right)\Big|_Q^R + 2\int_Q^R \rho_2\left(x\right)f''\left(x\right)dx.$$

Здесь используется следующее обозначение

$$\rho_r(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi ky}{\left(2\pi k\right)^r}, & r - \text{четное},\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi ky}{\left(2\pi k\right)^r}, & r - \text{нечетное}.\end{cases}$$

Полученное равенство доказывает утверждение теоремы для $m = 1$.

Предположим, что $r \geqslant 1$ и утверждение теоремы верно для всех $m \leqslant r$. Докажем справедливость утверждения теоремы для $m = r + 1$.

Согласно предположению индукции, при $m = r$ выполняется равенство

$$(-1)^{m-1}T_{2r} = 2\int_Q^R f^{(2r)}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{\left(2\pi k\right)^{2r}}dx =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{2r+1}}\int_Q^R f^{(2r)}\left(x\right)d\left(\sin 2\pi kx\right).$$

Учитывая, что

$$U = f^{(2r)},\ dV = \mathrm{d}(\sin 2\pi kx)$$
$$dU = f^{(2r+1)}dx,\ V = \sin 2\pi kx.$$

Имеем

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{2r+1}}\int_Q^R f^{(2r)}\left(x\right)d\left(\sin 2\pi kx\right) =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{2r+1}}\left(f^{(2r)}\left(x\right)\sin 2\pi kx\Big|_Q^R - \int_Q^R \sin 2\pi kx f^{(2r+1)}\left(x\right)dx\right) =$$
$$= -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2\pi k\right)^{2r+1}}\int_Q^R \sin 2\pi kx f^{(2r+1)}\left(x\right)dx,$$

поскольку при полуцелых Q, R внеинтегральный член последнего равенства обращается в нуль. Поэтому снова интегрируя по частям, приходим к равенству

$$(-1)^{m-1}T_{2r}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2r+1}}\int_Q^R \sin 2\pi kx f^{(2r+1)}(x)\,dx=$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2r+2}}\int_Q^R f^{(2r+1)}(x)\,d(\cos 2\pi kx)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2r+2}}\left(f^{(2r+1)}(x)\cos 2\pi kx\Big|_Q^R-\int_Q^R \cos 2\pi kx f^{(2r+2)}(x)\,dx\right)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(2r+1)}(x)\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^{2r+2}}\Bigg|_Q^R-2\int_Q^R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2r+2}}\cos 2\pi kx f^{(2r+2)}(x)\,dx.$$

Как и выше, далее учитываем, что при полуцелых $x=Q$ и $x=R$ выполняется равенство $\cos 2\pi kx=(-1)^k$. Следовательно

$$(-1)^{m-1}T_{2r}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(2r+1)}(x)(-1)^k}{(2\pi k)^{2r+2}}\Bigg|_Q^R-2\int_Q^R \rho_{2r+2}(x)\,f^{(2r+2)}(x)\,dx.$$

Осталось вычислить внеинтегральный член последней формулы. Как и ранее имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{2r+2}}=-\,\zeta(2r+2)\left(1-\frac{1}{2^{2r+1}}\right).$$

Отсюда получаем

$$(-1)^{m-1}T_{2r}=$$

$$=-\,\zeta(2r+2)\left(1-\frac{1}{2^{2r+1}}\right)\frac{f^{(2r+1)}(x)}{2^{2r+1}\pi^{2r+1}}\Bigg|_Q^R-2\int_Q^R \rho_{2r+2}(x)\,f^{(2r+2)}(x)\,dx.$$

Подставляя последнее значение для $(-1)^{m-1}T_{2r}$ в предположение индукции, получим утверждение теоремы для случая $m=r+1$. Тем самым по принципу индукции теорема 2 доказана.

Как было отмечено ранее, теорема 2, справедливость которой установлена выше, представляет собой вариант известной формулы суммирования Эйлера-Маклорена.

Отличие нашей формулы от приведенной выше традиционной состоит в том, что интегрирование в ее правой части производится по промежутку с полуцелыми концами, охватывающему целые точки суммирования. Длинна этого промежутка равна $b-a+1$. Она в точности совпадает с количеством слагаемых в сумме. В тоже время в традиционной формуле промежуток интегрирования равен $b - a$ и на единицу меньше количества слагаемых. Для устранения этого несоответствия там в неявном виде содержаться члены, за счет которых значение конечных слагаемых учитываются с коэффициентами $\frac{1}{2}$, тем самым производится некоторая «регуляризация». В нашем случае необходимость в подобной корректировке суммы отсутствует. Это позволяет в некоторых случаях достигать более точных результатов при ее применении см.[4].

Следует отметить, что многочлены Бернулли, вообще говоря задаются в неявном виде, что затрудняет использование формулы. Коэффициенты, входящие в правую часть, традиционной формулы, выражаются через числа Бернулли, которые, в свою очередь, могут быть записаны через значения дзета-функции Римана в четных точках. При сравнении этих коэффициентов с соответствующими коэффициентами нашей формулы видно, что в нашем случае всегда присутствует понижающий множитель вида $\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)$, который меньше единицы.

В заключении отметим, что формула суммирования Эйлера-Маклорена входит в основной аппарат математического анализа. Она послужила источником для вывода других формул суммирования, включая известную формулу суммирования Пуассона [Архипов], которая в свою очередь является мощным аналитическим инструментом математических исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 7-е изд.,стереотип.– М.: Наука, 1969. – Т. 2. –С. 531–551. – 800 с.

[2] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов.– 4-ое изд., М.: Дрофа, 2004. –640с.

[3] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981 г.

[4] Авдеев Ф.С., Авдеев И.Ф. Асимптотическое разложение остаточного члена в приближенном функциональном уравнении для дзета-функции Римана // Ученые записки Орловского ун-та. 2012.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Поступило 12.12.2011