МАТЕМАТИКА

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА И ПРОБЛЕМЕ КЭЛИ

В.С. Секованов

ON NEWTON'S METHOD AND KELY'S PROBLEM

V.S. Sekovanov

The article views the history of Kely's problem solution. The full solution with the use of new information technologies is presented.

В данной статье рассматривается история решения проблемы Кэли. Указывается ее полное решение с помощью новых информационных технологий.

УДК 51(072)С289

В процессе преподавания математики, по нашему мнению, положительно влияет на формирование творческой личности студента отслеживание им решения проблемы с момента ее зарождения до настоящего времени. Причем очень важно для обучаемого осознать все методы и технологии, которые применялись в процессе решения данной проблемы. Очень ценно для формирования мировоззрения и творческого потенциала обучаемого также осознание им связей данной проблемы с другими проблемами.

В качестве примера рассмотрим метод касательных, предложенный Ньютоном для решения уравнения $f(x)=0$.

Метод Ньютона и его усовершенствованные варианты относятся к наиболее известным численным методам нахождения решения нелинейных уравнений. Обычно анализируются две части при решении этой проблемы:

а) доказательство сходимости метода;

б) получение асимптотической скорости сходимости.

Однако с методом Ньютона связана еще одна глубокая проблема, которую мы и обсудим в данной статье.

Метод Ньютона или метод касательных для нахождения вещественного корня функции $f(x)$ заключается в следующем. Берем начальное приближение x_0 и будем находить точки по формуле (1)

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,3.... \quad (1)$$

Укажем условия для сходимости метода Ньютона. Пусть $f(c)=0$ и $f'(c)\neq 0$. Предположим, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором открытом интервале, содержащем c. Пусть x_0 – начальное приближение к точке c. Тогда существует такой интервал, содержащий c, что если x_0 принадлежит этому интервалу, то последовательность (1) сходится к c, то есть $x_n \to c$ при $n\to\infty$ [2]. Нетрудно заметить, что уравнение $f(x)=0$ при $f'(x)\neq 0$ эквивалентно уравнению $j(x)=x$, где $j(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Следует отметить, что метод Ньютона не всегда приводит к цели. Например, если рассмотреть уравнение $arctg(x-2)=0$, то взяв в качестве первоначального приближения уравнения достаточно большое по абсолютной величине число x_0, мы получим расходящуюся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Однако, если взять точку x_0 достаточно близкой к точке 2, то процесс будет сходящимся.

В 1879 году Кэли поставил задачу итерирования функций комплексной переменной, которая позднее стимулировала исследования Жюлиа. Его работа, носила название «Комплексная проблема Ньютона-Фурье». Суть проблемы Кэли в том, что он предложил выйти за рамки итерирования вещественных функций и стал итерировать функции комплексной переменной $P(z)=z-\dfrac{f(z)}{f'(z)}$, где $f(z)$ – полином комплексной переменной. Оказывается, что с множествами Жюлиа (см.[2]) имеется связь решений алгебраических уравнений n-ой степени (мы рассмотрим степени 2 и 3) в комплексной плоскости с помощью итерационного алгоритма $z_{n+1}=z_n-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ $n=0,1,2,....$, который, как уже отмечалось, применял Ньютон при решении уравнения $f(x)=0$ в множестве действительных чисел.

Кэли перенес этот алгоритм в комплексную плоскость, что привело к возникновению проблемы, которая носит имя этого математика (проблема Кэли). Кэли выяснил, что для функции $f(z)=z^2-1$ $z\in\overline{C}$ ньютоновские итерации имеют вид: $z_{n+1}=z_n-\dfrac{z_n^2-1}{2\cdot z_n}$, причем для каждой исходной точки z_0, лежащей в правой полуплоскости $z_n\to 1$ (правая полуплоскость есть область притяжения $A(1)$), а для каждой исходной точки z_0, расположенной в левой полуплоскости $z_n\to -1$(левая полуплоскость есть область притяжения $A(-1)$). Исключение составляет случай, когда начальная точка равноудалена от данных корней (то есть множеством Жюлиа является мнимая ось комплексной плоскости).

В случае, когда $f(z)$являлась полиномом второй степени Кэли предложил изящное решение. Однако уже для $f(z)$, являющейся полиномом степени 3 решение задачи представило значительную трудность, которую преодолеть Кэли не удалось. Данная задача была решена Хаббардом с помощью компьютерной программы почти через сто лет.

Воспроизведем доказательство Кэли для полинома второй степени. Покажем сначала, несколько изменив указания [2], что для функции $u=f(z)=\dfrac{z^2+1}{2z}=\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{2z}$ множество Жюлиа $J(f)$ есть перпендикуляр, проходящий через середину отрезка $[-1;1]$, то есть множество Жюлиа является мнимой осью OY. Заметим, что если $z=ip$, то $f(ip)=\dfrac{ip}{2}+\dfrac{1}{2ip}=$ $=\dfrac{ip}{2}+\dfrac{-pi}{2p^2}=i\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2p}\right)$, то есть точки мнимой оси функция $f(z)$отображает в точки мнимой оси. Пусть теперь $z = a + bi$, где $a > 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{a+ib}{2} + \frac{1}{2(a+ib)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + ib + \frac{a-ib}{a^2+b^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{2}i\left(b - \frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Таким образом, функция $f(z)$ точки правой полуплоскости переводит в точки, принадлежащие той же полуплоскости. Аналогично можно проверить, что данная функция каждую точку левой полуплоскости вновь переводит в точку левой полуплоскости. Замечаем также, что $f(z)$ является непрерывной функцией в каждой точке $z \neq 0$ комплексной плоскости $\overline{C}$.

Рассмотрим теперь два взаимно обратные отображения: $z = j^{-1}(w) = \dfrac{w+1}{w-1}$ и $w = j(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Покажем тогда, что $w^2 = j \circ f \circ j^{-1}$. Пусть $w = w_0$. Тогда

$$z_0 = j^{-1}(w_0) = \frac{w_0+1}{w_0-1}$$

$$f(z_0) = f(j^{-1}(w_0)) =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{w_0+1}{w_0-1}\right)^2 + 1}{2\dfrac{w_0+1}{w_0-1}} = \frac{w_0^2+1}{w_0^2-1}.$$

Далее

$$j(f(j^{-1}(w_0))) = \frac{\dfrac{w_0^2+1}{w_0^2-1}+1}{\dfrac{w_0^2+1}{w_0^2-1}-1} = w_0^2.$$

Таким образом, $j(f(j^{-1}(w))) = w^2$ Нетрудно проверить, что множество Жюлиа для функции $L(z) = z^2$ есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости $\overline{C}$ (см., [2], [3]). Таким образом, изучение траекторий точки при отображении f сводится к изучению траектории точки при отображении L.

Покажем, что отображение

$$z = j^{-1}(w) = \frac{w+1}{w-1}$$

переводит окружность $|w| = 1$ в мнимую ось $\mathrm{Re}(z) = 0$. Для того чтобы убедиться в справедливости данного суждения? найдем образы трех точек при отображении

$$j^{-1}(w) = \frac{w+1}{w-1}.$$

Действительно пусть $w = i$. Тогда

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{(1+i)(-1-i)}{2} = -i.$$

Если же $w = 1$, то $\dfrac{w+1}{w-1} = \infty$. И, наконец, если $w = -1$, то $\dfrac{w+1}{w-1} = 0$. Таким образом, при отображении

$$j^{-1}(w) = \frac{w+1}{w-1}$$

трем точкам, лежащим на окружности $|w| = 1$ соответствуют три точки на прямой $\mathrm{Re}(z) = 0$. Ясно, что дробно-линейное преобразование $j^{-1}(w) = \dfrac{w+1}{w-1}$ переводит единичную окружность в мнимую ось, а внутренность единичного круга переводит в левую полуплоскость (поскольку, например, $\dfrac{0+1}{0-1} = -1$). И, наконец, внешность единичного круга данное отображение переводит в правую полуплоскость (поскольку, $\dfrac{5+1}{5-1} = \dfrac{3}{2}$).

Таким образом, $J(f) = \{ci, c \in R\}$, а бассейнами притяжения $A(-1)$ и $A(+1)$ двух корней уравнения $z^2 - 1 = 0$

(неподвижные точки ± 1 отображения $f(z)$) являются левая и правая полуплоскости, определяемые мнимой осью $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Как уже отмечалось, Кэли предположил, что аналогичная ситуация верна и для функции $g(z) = z^3 - 1$, нули которой являются кубическими корнями из единицы и равняются

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Он пытался доказать, что комплексная плоскость разбивается на три области притяжения $A(z_1), A(z_2), A(z_3)$, каждая из которых представляет внутренность угла в 120º. Неудивительно, что Кэли не смог подтвердить выдвинутую им гипотезу, поскольку ситуация в данном случае резко изменилась и без использования компьютера, вряд ли, могла быть решена. Этот вопрос спустя почти сто лет, используя новые информационные технологии, исследовал Хаббард. Компьютерное исследование, проведенное Хаббардом показало, что геометрия границ областей притяжения к кубическим корням из единицы имеет гораздо более сложную фрактальную форму [1].

Следуя [4], дадим краткие указания, что множество Жюлиа для функции $P_1(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}$ имеет трехстороннюю фрактальную структуру. Согласно характеристике множеств Жюлиа [4]: $J(P_1) = \partial A(\exp(2pik/3), k = 0,1,2.$ Тогда каждая точка $J(P_1)$ должна быть трехсторонней точкой по отношению к бассейнам притяжения тройки корней из единицы. Пусть U – произвольная окрестность точки $z \in J(P_1)$. Можно показать, что данная окрестность содержит точки из всех трех бассейнов притяжения $A(z_1), A(z_2), A(z_3)$.

Для некоторых кубических уравнений области притяжения включают в себя разбросанные всюду копии множества Мандельброта [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – М.;Ижевск, 2001. – 128 с.*
2. *Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.*
3. *Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – М.;Ижевск, 2002. – 159 с.*
4. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Пер. с англ. Под ред. А.Н. Шарковского. – М.: Мир, 1993. – 176 с., ил.*

Об авторе

Секованов Валерий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова.

Математика

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЧТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

П.К. Корнеев

CALCULATING THE DETERMINANTS OF ALMOST TRIANGULAR MATRIXES BY MEANS OF CONTINUED FRACTIONS

Korneev P.K.

The article presents the factoring of finite ascending continued fractions for the calculation of almost triangular matrixes. Basing on the result there has been derived the expansion into the finite ascending continued fraction of the first or the last coordinate of the vector for solving the system of liner algebraic equations with almost triangular matrix.

В статье для вычисления значений определителей почти треугольных матриц строится представление в виде произведения конечных восходящих цепных дробей. На основе этого результата получено разложение в конечную восходящую цепную дробь первой либо последней координаты вектора решения системы линейных алгебраических уравнений с почти треугольной матрицей.

УДК 519.61

1. Вычислим значение определителя левой почти треугольной матрицы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Вычитая первый столбец, умноженный на a_{12} / a_{11}, из второго столбца и разложив полученный определитель по элементам первой строки, будем иметь

$$\Delta_n = a_{11} \cdot \Delta_{n-1},$$

где Δ_{n-1} – определитель того же типа, что Δ_n.

Продолжая этот процесс, получим следующий результат

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} B_i, \quad (2)$$

где

$$B_1 = a_{11},\ B_2 = a_{22} - \frac{a_{21}}{B_1} \cdot a_{12},$$

$$B_3 = a_{33}, - \frac{a_{32}}{B_2} \cdot a_{23} - \frac{a_{31}}{B_1} \cdot a_{12},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$B_n = a_{nn} - \frac{a_{n,n-1}}{B_{n-1}} \times \quad (3)$$

$$\times a_{n-1,n} - \frac{a_{n,n-2}}{B_{n-2}} \cdot a_{n-2,n-1} - \dots - \frac{a_{n1}}{B_1} \cdot a_{12}.$$