

УДК 531.112.1

О мерах механического движения

И. П. Попов

Курганский государственный университет
Россия, 640669, Курган, ул. Гоголя, 25
popov_ip@kurganobl.ru; (3522)429-458

Рассматриваются меры движения в связи с формальным аналогом волновой функции. Показано, что дифференциальные уравнения аналога волновой функции порождают меры движения различных рангов. Установлена связь между различными мерами движения.

Ключевые слова: ранг; мера; масса; скорость; волновая функция.

Величины количество движения и кинетическая энергия содержат одни и те же параметры – массу и скорость и являются мерой движения инертного тела. Далее рассматривается единый формализованный подход к обоснованию этих и других величин.

1. Формальный аналог волновой функции

Уравнение равномерного движения инертного тела может быть последовательно преобразовано следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_0 = -(\mathbf{v}t - \mathbf{r}), \quad \frac{i}{\hbar} m \mathbf{v} \mathbf{r}_0 = -\frac{i}{\hbar} (mv^2 t - m \mathbf{v} \mathbf{r}),$$

$$Ce^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{x}_0} = Ce^{-\frac{i}{\hbar} (mv^2 t - m \mathbf{v} \mathbf{r})} = \Theta(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, определяющий местонахождения тела в $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}$ – скорость тела, m – масса тела, $\mathbf{p}$ – импульс, $\hbar$ – постоянная Планка.

Последняя величина является формальным аналогом волновой функции (ФАВФ). Для нее справедливы выражения:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} mv^2 Ce^{-\frac{i}{\hbar} (mv^2 t - m \mathbf{v} \mathbf{r})} \times i\hbar, \quad (3)$$

$$\Delta \Theta = -\frac{1}{\hbar^2} m^2 v^2 Ce^{-\frac{i}{\hbar} (mv^2 t - m \mathbf{v} \mathbf{r})} \times \frac{-\hbar^2}{m}. \quad (4)$$

Правые части (3) и (4) с учетом множителей равны, поэтому левые образуют следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \Delta \Theta. \quad (5)$$

Это уравнение почти идентично уравнению Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi, \quad (6)$$

где Ψ – волновая функция [1]. Уравнение (6) отличается от уравнения (5) тем, что в знаменателе правой части стоит множитель 2.

ФАВФ (2), прообразом которой является (1), почти идентичен волновой функции

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{mv^2}{2} t - m \mathbf{v} \mathbf{r})}.$$

Построение прообраза волновой функции подобно прообразу ФАВФ дает формулу

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{v}}{2} t.$$

Это выражение существенно не совпадает с (1).

Недостатком уравнения (5) является отсутствие информации о скорости тела. Этот недостаток легко исправим. Вместо (3) и (4)

можно использовать другие производные. Это не должны быть производные одного порядка, иначе теряется информация о массе тела.

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -\frac{1}{\hbar^2} m^2 v^4 C e^{\frac{i}{\hbar}(mv^2 t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \times i\hbar, \quad (7)$$

$$\nabla \Theta = \frac{i}{\hbar} m \mathbf{v} C e^{\frac{i}{\hbar}(mv^2 t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \times (-m v^2 \mathbf{v}).$$

Эти два выражения порождают еще одно дифференциальное уравнение для ФАВФ (ДУФАВФ)

$$i\hbar \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -m v^2 \mathbf{v} \nabla \Theta. \quad (8)$$

Волновой аспект последнего выражения лежит за рамками настоящей работы. В то же время результатом синтеза (8) как ДУФАВФ, учитывающего скорость частицы, является возникновение величины $m v^2 \mathbf{v}$. Ее физический смысл рассмотрен ниже.

2. Движение кинетической энергии

Начало исследования движения энергии положил Н.А. Умов [2]. Кинетическая энергия инертного тела, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$, локализована в самом теле. Это очевидным образом следует из возможности ее преобразования при взаимодействии с другими телами [3–5]. Таким образом, кинетическая энергия движется со скоростью $\mathbf{v}$.

Вектор Умова в дифференциальной форме может быть записан в виде

$$d\mathbf{U} = w d\mathbf{v},$$

где w – объемная плотность энергии.

Применительно к кинетической энергии

$$d\mathbf{U} = \frac{m v^2}{2V} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{U} = \frac{m v^2}{3!V} \mathbf{v}, \quad (9)$$

где V – объем тела.

Таким образом, величина

$$m v^2 \mathbf{v} = 3! \mathbf{U}$$

характеризует движение кинетической энергии, и выражение (8) не лишено физического смысла.

3. Третье ДУФАВФ

Далее для упрощения прямолинейное движение рассматривается в $\mathfrak{R}^1$. Сопоставление выражения

$$\frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} = -\frac{i}{\hbar^3} m^3 v^3 C e^{\frac{i}{\hbar}(mv^2 t - m v x)}$$

и (7) дает уравнение

$$i \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \hbar \frac{v}{m} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3},$$

которое характеризуется появлением величины $m v^{-1}$. Представление о физическом смысле этой величины может быть установлено, в частности, из примера центрального удара двух шаров, один из которых первоначально покоился. При этом

$$m_1 v_{11} = m_1 v_{12} + m_2 v_2,$$

$$\frac{m_1}{v_2} = \frac{m_2}{v_{11} - v_{12}}. \quad (10)$$

При равенстве масс шаров $v_{12} = 0$, $v_2 = v_{11}$, и левая часть (10) равна $m v^{-1}$.

4. Ранги меры движения

Определение. Мера движения ранга n – это величина

$$p^{(n)} = k_n m v^n,$$

где k_n – безразмерный коэффициент.

Мера движения любого ранга определяется соответствующим ДУФАВФ.

В таблице представлены ранги меры движения и порождающие их ДУФАВФ.

Меры движения по рангам	ДУФАВФ
$p^{(n)} = k_n m v^n$	$(-1)^n i\hbar \frac{\partial^{n-1} \Theta}{\partial t^{n-1}} = m v^n \frac{\partial^{n-2} \Theta}{\partial x^{n-2}}$ при $n \geq 2$
$p^{(3)} = k_3 m v^3$	$-i\hbar \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = m v^3 \frac{\partial \Theta}{\partial x}$
$p^{(2)} = k_2 m v^2$	$i\hbar \frac{\partial \Theta}{\partial t} = m v^2 \Theta$
$p^{(1)} = k_1 m v^1$	$-i\hbar \frac{\partial \Theta}{\partial x} = m v \Theta$

Окончание таблицы

$p^{(0)} = k_0 mv^0$	$i\hbar \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = m \frac{\partial \Theta}{\partial t}$
$p^{(-1)} = k_{-1} mv^{-1}$	$-i\hbar \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} = mv^{-1} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$
$p^{(-2)} = k_{-2} mv^{-2}$	$i\hbar \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} = mv^{-2} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial t^3}$
$p^{(-3)} = k_{-3} mv^{-3}$	$-i\hbar \frac{\partial^5 \Theta}{\partial x^5} = mv^{-3} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial t^4}$
$p^{(-n)} = k_{-n} mv^{-n}$	$(-1)^n i\hbar \frac{\partial^{n+2} \Theta}{\partial x^{n+2}} = mv^{-n} \frac{\partial^{n+1} \Theta}{\partial t^{n+1}}$ при $n \geq -1$

5. О мерах движения третьего и произвольного ранга

Мера движения нулевого ранга (масса) является производной по скорости от меры движения первого ранга (количества движения), которая в свою очередь является производной от меры движения второго ранга (кинетической энергии) ($k_0 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1/2$). Индуктивно можно предположить, что мера движения второго ранга является производной от меры движения третьего ранга. Действительно, из уравнения (9) следует:

$$UV = p^{(3)} = \frac{mv^3}{3!}.$$

Обобщение на произвольный неотрицательный ранг имеет вид

$$p^{(n)} = \frac{mv^n}{n!}.$$

$$p^{(n)} = \frac{d}{dv} p^{(n+1)}.$$

Таким образом, ДУФАВФ являются обоснованием не только количества движения и кинетической энергии, но и мер движения других рангов.

Список литературы

1. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
2. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
3. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 546–549.
4. Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1(21). С. 95–103.
5. Попов И.П. Колебательные системы с однородными элементами // Инженерная физика. 2013. № 3. С. 52–56.

About measures of mechanical motion

I. P. Popov

Kurgan State Universitate, Russia, 640669, Kurgan, Gogol st., 25
popov_ip@kurganobl.ru; (3522)429-458

Examines measures movement in connection with the formal analogue of the wave function. It is shown that the differential equation analog wave functions generate measures movement of various ranks. The connection between the various measures of movement.

Key words: rank; measure; mass; velocity; wave function.