МАТЕМАТИКА

УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/49/1

Я.В. Борисова, И.А. Колесников, С.А. Копанев

О МАЛЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ

Одним из основных методов решения экстремальных задач является вариационный метод, главный инструмент которого есть вариационные формулы. Некоторые вариационные формулы были получены с помощью семейства отображений из единичного круга на области, лежащие в единичном круге. Предложен достаточно общий подход получения так называемых малых вариаций. Получен ряд новых малых вариаций. Также на простом примере проиллюстрирован метод П.П. Куфарева нахождения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Ключевые слова: *голоморфное однолистное отображение, вариационная формула, параметры в интеграле Кристоффеля – Шварца, метод Куфарева.*

Пусть S есть множество всех голоморфных однолистных в круге $E = E_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отображений $f : E \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Какова бы ни была односвязная область $D \subset \mathbb{C}$, $0 \in D$, с конформным радиусом относительно $w = 0$ равным единице, в классе S существует единственное отображение f такое, что $f(E) = D$.

Одним из основных методов решения экстремальных задач в классе S является метод внутренних вариаций [1, 2]. В свою очередь, понятие вариационной формулы является базовым инструментом метода внутренних вариаций.

Отображение $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, $w = f^*(z, \varepsilon)$ принято называть вариационной формулой в классе S для отображения f, $f \in S$, если оно удовлетворяет условиям:

1. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ сужение $f^*\big|_{E \times \{\varepsilon\}} \in S$ (для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ отображение $f^*(z, \varepsilon)$ как отображение от z принадлежит классу S.);

2. $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} f^*(z, \varepsilon) = f(z)$ равномерно внутри E_z;

3. Существует правосторонняя производная по ε в точке $\varepsilon = 0$, равномерная относительно z внутри E_z.

Задание отображения $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, $w = f^*(z, \varepsilon)$ равносильно заданию семейства отображений $f_\varepsilon : E \to \mathbb{C}$, $w = f_\varepsilon(z) = f^*(z, \varepsilon)$ от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

При работе с вариационной формулой ее, как правило, раскладывают по формуле Тейлора по параметру ε в полуокрестности точки $\varepsilon = 0$ с нужной степенью точности.

Классическая теорема Г.М. Голузина [1], обобщающая результат Шиффера, позволяет получать вариационные формулы достаточно общего вида (называемые формулами типа Голузина – Шиффера). П.П. Куфарев [3] предложил другой подход к получению таких вариационных формул. Многие математики занимались и занимаются совершенствованием метода внутренних вариаций и поиском приемов получения новых вариационных формул.

В данной работе предлагается достаточно общий подход к получению так называемых малых вариаций с помощью вспомогательного семейства голоморфных однолистных отображений из круга в круг.

Теорема 1. Пусть $g : E_z \times (0,\varepsilon_0) \to E_\zeta$, $\zeta = g(z,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

1) $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ сужение $g|_{E\times\{\varepsilon\}}$ есть голоморфное однолистное отображение;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g(z,\varepsilon) = z$ равномерно внутри E_z;

3) $g(z,\varepsilon)$ и $g'_z(z,\varepsilon)$ дифференцируемы по ε в нуле справа равномерно внутри E_z.

Тогда в классе S для отображения $f \in S$ имеют место вариационные формулы

$$f_1(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\big(f'(z)g'_\varepsilon(z,0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0,0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0) - g'_\varepsilon(0,0)\big) + \\ + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{1}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z;

$$f_2(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0)\Big) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0)\Big) + \\ + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z;

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z,\varepsilon),\quad \varepsilon \in (0,\hat{\varepsilon}), \tag{3}$$

где

$$P_3(z) = f'(z)\Big(g'_\varepsilon(z,0) + z^2\overline{u} - u + itz\Big) - \\ - f(z)\big(f''(0)\big(g'_\varepsilon(0,0) - u\big) + g''_{z\varepsilon}(0,0) + it\big) - g'_\varepsilon(0,0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \dfrac{1}{|u|}\right)$, u, t – константы, $u \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z;

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) + itz\Big) - f(z)\big(g''_{z\varepsilon}(0,0) + it\big)\Big) + \\ + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (0,\hat{\varepsilon}), \tag{4}$$

где t – константа, $t \in \mathbb{R}$, и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z.

Доказательство. Из условия $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g(z,\varepsilon)=z$ равномерно внутри E_z по теореме Вейерштрасса следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g'_z(z,\varepsilon)=1$ равномерно внутри E_z. Отсюда следует равенство $g'_z(0,0)=1$.

Пусть $g(z,\varepsilon)=z+\varepsilon g'_\varepsilon(z,0)+o(z,\varepsilon)$. Тогда $g'_z(z,\varepsilon)=1+\varepsilon g''_{z\varepsilon}(z,0)+o(z,\varepsilon)$.

Докажем первую вариационную формулу.

Если $f\in S$, то $\dfrac{f(g(z,\varepsilon))-f(g(0,\varepsilon))}{f'(g(0,\varepsilon))g'_z(0,\varepsilon)}=f_1(z,\varepsilon)\in S$.

Записывая $f_1(z,\varepsilon)$ относительно ε по формуле Тейлора, получаем формулу (1).

Докажем вторую вариационную формулу.

Если $f\in S$, то $\dfrac{1-|g(0,\varepsilon)|^2}{g'_z(0,\varepsilon)}f\left(\dfrac{g(z,\varepsilon)-g(0,\varepsilon)}{1-\overline{g(0,\varepsilon)}g(z,\varepsilon)}\right)=f_2(z,\varepsilon)\in S$.

Формула (2) теперь следует из разложения $f_2(z,\varepsilon)$ относительно ε по формуле Тейлора.

Докажем третью и четвертую вариационные формулы.

Отображение $\eta(z,\varepsilon)=e^{it\varepsilon}\dfrac{z-u\varepsilon}{1-z\overline{u}\varepsilon}$ при $|u\varepsilon|<1$ переводит единичный круг в единичный круг. Заметив, что отображение $\psi(z,\varepsilon)=g(\eta(z,\varepsilon),\varepsilon)$ удовлетворяет условиям теоремы, и используя формулу (1), получаем формулу (3), а используя формулу (2), получаем формулу (4).

При дополнительных условиях на отображение $g:E_z\times(0,\varepsilon_0)\to E_\zeta$, $\zeta=g(z,\varepsilon)$ можно получить разложение вариационных формул $f_k(z,\varepsilon)$, $k=1,2$, по ε с нужной степенью точности.

Теорема 2. Пусть $g:E_z\times(0,\varepsilon_0)\to E_\zeta$, $\zeta=g(z,\varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ сужение $g\big|_{E\times\{\varepsilon\}}$ есть голоморфное однолистное отображение;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g(z,\varepsilon)=z$ равномерно внутри E_z;

3) $g(z,\varepsilon)$ и $g'_z(z,\varepsilon)$ дважды дифференцируемы по ε в нуле справа равномерно внутри E_z.

Тогда в классе S для отображения $f\in S$ имеют место вариационные формулы:

$$f_1(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\big(f'(z)g'_\varepsilon(z,0)-f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0,0)-f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0)-g'_\varepsilon(0,0)\big)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}Q_1(z)+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

где

$$Q_1(z)=f''(z)g'^2_\varepsilon(z,0)+f'(z)\big(g''_{\varepsilon\varepsilon}(z,0)-2f''(0)g'_\varepsilon(z,0)g'_\varepsilon(0,0)-2g'_\varepsilon(z,0)g''_{z\varepsilon}(0,0)\big)-$$
$$-f(z)\Big(f'''(0)g'^2_\varepsilon(0,0)-2f''^2(0)g'^2_\varepsilon(0,0)+f''(0)g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)-2f''(0)g''_{z\varepsilon}(0,0)g'_\varepsilon(0,0)+$$
$$+g'''_{z\varepsilon\varepsilon}(0,0)-2g''^2_{z\varepsilon}(0,0)\Big)+f''(0)g'^2_\varepsilon(0,0)+g''_{z\varepsilon}(0,0)g'_\varepsilon(0,0)-g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)$$

и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{o(z,\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}=0$ равномерно внутри E_z;

$$f_2(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)}+g'_\varepsilon(z,0)-g'_\varepsilon(0,0)\Big)-f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0)\Big)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}Q_2(z)+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

где
$$Q_2(z)=f''(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)}+g'_\varepsilon(z,0)-g'_\varepsilon(0,0)\Big)^2+$$
$$+f'(z)\Big(2z^3\overline{g'^2_\varepsilon(0,0)}+z^2\overline{g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)}-2z^2g''_{z\varepsilon}(0,0)\overline{g'_\varepsilon(0,0)}+4zg'_\varepsilon(z,0)\overline{g'_\varepsilon(0,0)}-$$
$$-2zg'_\varepsilon(0,0)\overline{g'_\varepsilon(0,0)}+2g''_{z\varepsilon}(0,0)g'_\varepsilon(0,0)-2g''_{z\varepsilon}(0,0)g'_\varepsilon(z,0)+g''_{\varepsilon\varepsilon}(z,0)-g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)\Big)+$$
$$+f(z)\Big(2g''^{\,2}_{z\varepsilon}(0,0)-2g'_\varepsilon(0,0)\overline{g'_\varepsilon(0,0)}-g'''_{z\varepsilon\varepsilon}(0,0)\Big)$$

и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{o(z,\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}=0$ равномерно внутри E_z.

Заметим, если отображение $g:E_z\times(0,\varepsilon_0)\to E_\zeta$, $\zeta=g(z,\varepsilon)$ удовлетворяет условию $g(0,\varepsilon)=0$, то $f_1(z,\varepsilon)=f_2(z,\varepsilon)$.

Выбирая отображение $w=g(z,\varepsilon)$ в конкретном виде, получим малые вариации, как известные, так и новые.

1. Пусть $g:E_z\times[0,1)\to E_\zeta$, $g(z,\varepsilon)=\varepsilon e^{i\beta}+(1-\varepsilon)e^{i\varepsilon}z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f\in S$ следующего вида:

$$f_1(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\Big(e^{i\beta}-(1-i)z\Big)-f(z)f''(0)e^{i\beta}+f(z)(1-i)-e^{i\beta}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2Q_1(z)+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \ \varepsilon\in[0,1),$$

где
$$Q_1(z)=f''(z)\Big(e^{i\beta}-z(1-i)\Big)^2+f'(z)\Big(-2f''(0)e^{i\beta}\Big(e^{i\beta}-z(1-i)\Big)+2\Big(e^{i\beta}-z(1-i)\Big)-z(1-2i)\Big)-$$
$$-f(z)\Big(f'''(0)e^{2i\beta}-2f''^2(0)e^{2i\beta}+2f''(0)e^{i\beta}(1-i)-1+2i\Big)+f''(0)e^{2i\beta}-(1-i)e^{i\beta};$$

$$f_2(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(zf'(z)\Big(e^{-i\beta}z-(1-i)\Big)+f(z)(1-i)\Big)+\frac{1}{2}\varepsilon^2Q_2(z)+o\left(z,\varepsilon^2\right),\varepsilon\in[0,1),$$

где
$$Q_2(z)=z^2f''(z)\Big(ze^{-i\beta}-(1-i)\Big)^2+$$
$$+f'(z)\Big(2z^3e^{-2i\beta}+z^2(1-i)\Big(2e^{i\beta}-4e^{-i\beta}\Big)-z(1+2i)\Big)-f(z)(1-2i);$$

$$f_3(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{u}-z+z(1+t)i+e^{i\beta}-u\Big)-$$
$$-f(z)\Big(f''(0)\Big(e^{i\beta}-u\Big)-1+(1+t)i\Big)-e^{i\beta}+u\Big)+o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon\in[0,1);$$

$$f_4(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2e^{i\beta}-z+z(1+t)i\Big)+f(z)\big(1-(1+t)i\big)\Big)+o(z,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\in[0,1).$$

Отметим частные случаи этой формулы.

1a. Пусть $g:E_z\times[0,1)\to E_\zeta$, $g(z,\varepsilon)=\varepsilon e^{i\beta}+(1-\varepsilon)z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\big(e^{i\beta} - z\big) - f(z)f''(0)e^{i\beta} + f(z) - e^{i\beta}\Big) +$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2 Q_1(z) + o\big(z,\varepsilon^2\big),\ \ \varepsilon \in [0,1),$$

где
$$Q_1(z) = f''(z)\big(e^{i\beta} - z\big)^2 + f'(z)\Big(-2f''(0)e^{i\beta}\big(e^{i\beta} - z\big) + 2\big(e^{i\beta} - z\big)\Big) -$$
$$-f(z)\Big(f'''(0)e^{2i\beta} - 2f''^2(0)e^{2i\beta} + 2f''(0)e^{i\beta} - 2\Big) + f''(0)e^{2i\beta} - e^{i\beta};$$

$$f_2(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(zf'(z)\big(ze^{-i\beta} - 1\big) + f(z)\Big) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q_2(z) + o\big(z,\varepsilon^2\big),\ \ \varepsilon \in [0,1),$$

где
$$Q_2(z) = z^2 f''(z)\big(ze^{-i\beta} - 1\big)^2 + f'(z)\Big(2z^3 e^{-2i\beta} + z^2\big(2e^{i\beta} - 4e^{-i\beta}\big) + 2e^{i\beta}\Big);$$

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\big(z^2\overline{u} - z + itz + e^{i\beta} - z\big) -$$
$$-f(z)\Big(f''(0)\big(e^{i\beta} - u\big) - 1 + it\Big) - e^{i\beta} + u\Big) + o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon \in [0,1);$$

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\big(z^2 e^{-i\beta} - z + it\big) + f(z)(1 - it)\Big) + o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon \in [0,1).$$

1б. Пусть $g : E_z \times [0,1) \to E_\zeta$, $\zeta = g(z,\varepsilon) = (1-\varepsilon)e^{i\varepsilon}z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z,\varepsilon) = f_2(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon(1-i)\big(f(z) - zf'(z)\big) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\left(\frac{1}{2} - i\right)\big(f(z) - zf'(z)\big) - iz^2 f''(z)\right) + o\big(z,\varepsilon^2\big),\ \ \varepsilon \in [0,1);$$

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\big(z^2\overline{u} - z + (1+t)iz - u\big) + f(z)\big(uf''(0) + 1 - (1+t)i\big) + u\Big) +$$
$$+ o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon \in [0,1);$$

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) - \varepsilon\big(1 - (1+t)i\big)\big(zf'(z) - f(z)\big) + o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon \in [0,1).$$

1в. Пусть $g : E_z \times [0,1) \to E_\zeta$, $\zeta = g(z,\varepsilon) = (1-\varepsilon)z$. Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z,\varepsilon) = f_2(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\big(f(z) - zf'(z)\big) + \varepsilon^2\left(f(z) - zf'(z) + \frac{1}{2}z^2 f''(z)\right) +$$
$$+ o\big(z,\varepsilon^2\big),\ \ \varepsilon \in [0,1);$$

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\big(z^2 u - z + itz - u\big) + f(z)\big(uf''(0) + 1 - it\big) + u\Big) +$$
$$+ o(z,\varepsilon),\ \ \varepsilon \in [0,1);$$

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) - \varepsilon(1 - it)\big(zf'(z) - f(z)\big) + o(z,\varepsilon).$$

1г. Пусть $g: E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to E_\zeta$, $\zeta = g(z,\varepsilon) = e^{i\varepsilon} z$. Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z,\varepsilon) = f_2(z,\varepsilon) = f(z) + i\varepsilon(zf'(z) - f(z)) - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(z^2 f''(z) - zf'(z) + f(z)\right) + \\ + o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left(f'(z)\left(z^2\overline{u} + zi(t+1) - u\right) + f(z)(uf''(0) - i(t+1)) + u\right) + \\ + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(t+1)(zf'(z) - f(z)) + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

2. Пусть $g: E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to E_\zeta$,

$$w = g(z,\varepsilon) = \frac{z - \varepsilon e^{i\beta}}{1 - \varepsilon e^{-i\beta} z} = z + \varepsilon\left(z^2 e^{-i\beta} - e^{i\beta}\right) + \varepsilon^2\left(z^3 e^{-2i\beta} - z\right) + \ldots,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left(f'(z)\left(e^{-i\beta} z^2 - e^{i\beta}\right) + f(z) f''(0) e^{i\beta} + e^{i\beta}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q_1(z) + o\left(z,\varepsilon^2\right), \\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

где
$$Q_1(z) = f''(z)\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2\right)^2 + 2f'(z)\left(z - e^{-2i\beta} z^3 - f''(0)\left(e^{2i\beta} - z^2\right)\right) - \\ - f(z)\left(f'''(0) e^{2i\beta} - 2f''^2(0) e^{2i\beta} + 2\right) + f''(0) e^{i\beta};$$

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left(f'(z)\left(\overline{v} z^2 + itz - v\right) + f(z)(vf''(0) - it) + v\right) + o(z,\varepsilon), \\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),\ \text{где}\ v = u + e^{i\beta};$$

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(zf'(z) - f(z)) + o(z,\varepsilon),\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

3. Пусть $g: E \times (0, \varepsilon_0) \to E$, $w = g(z,\varepsilon) = e^{i\beta} \dfrac{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z) - i\varepsilon}{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z)}$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и однозначная ветвь логарифма выбрана условием $\ln 1 = 0$.

Это голоморфное и однолистное отображение из круга в круг $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Образом E относительно этого отображения есть круг $E = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ с выброшенным кругом $\left\{\zeta \in \mathbb{C} : \left|\zeta - (1-r) e^{i\beta}\right| \le r\right\}$, где $r = \dfrac{2\varepsilon}{\pi + 2\varepsilon}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Рассматриваемое отображение имеет следующее разложение по ε:

$$g(z,\varepsilon) = z - \frac{i}{2} z\varepsilon + \frac{z\left(e^{-i\beta} z - 2\right)}{12\left(1 - e^{-i\beta} z\right)}\varepsilon^2 + o\left(z,\varepsilon^2\right),\ g'_z(0,\varepsilon) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + o\left(z,\varepsilon^2\right).$$

Теперь по теоремам 1 и 2 получаем в классе S вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z,\varepsilon)=f_2(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\frac{i}{2}(f(z)-zf'(z))+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(-\frac{z^2}{4}f''(z)+\frac{z\left(1-2e^{-i\beta}z\right)}{6\left(1-e^{-i\beta}z\right)}f'(z)-\frac{1}{6}f(z)\right)+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0);$$

$$f_3(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\left(z^2\overline{u}-zi(1-t)-u\right)+f(z)\left(uf''(0)+i(1-t)\right)+u\Big)+$$
$$+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0);$$

$$f_4(z,\varepsilon)=f(z)-\varepsilon i(1-t)(f'(z)z-f(z))+o\left(z,\varepsilon^2\right),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

4. Этот пункт начнем с нахождения, используя метод П.П. Куфарева [3] определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца, отображения $w=w(\chi,l)$ из верхней полуплоскости $\Pi^+=\{\chi\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\chi>0\}$ на верхнюю полуплоскость с прямолинейным разрезом длины l, выходящим из точки ноль под углом $(1-\alpha)\pi$, к положительной части вещественной оси. Пусть $w(\infty)=\infty$. Выбрав стандартную параметризацию разреза для отображения из полуплоскости, будем иметь семейство отображений $w=w(\chi,\tau)$, удовлетворяющее уравнению Левнера для полуплоскости

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{1}{\chi-\lambda(\tau)}\frac{\partial w}{\partial\chi}=0,\quad \tau\in[0,T],$$

с начальным условием $w(\chi,0)=\chi$, где $\lambda(\tau)$ – прообраз конца разреза.

Обозначим через $a(\tau)$, $b(\tau)$ прообразы вершин с углами $\alpha\pi$, $(1-\alpha)\pi$ соответственно, $a(\tau)<\lambda(\tau)<b(\tau)$, при $0<\tau\le T$. Согласно теореме Кристоффеля – Шварца, отображение $w=w(\chi,\tau)$ можно представить в виде

$$w(\chi,\tau)=c(\tau)\int\limits_{a(\tau)}^{\chi}(z-\lambda(\tau))(z-a(\tau))^{\alpha-1}(z-b(\tau))^{-\alpha}\,dz.$$

В книге [4, гл.6,§3] записан результат П.П. Куфарева для отображений из верхней полуплоскости на многоугольник. Тогда в нашем случае параметры $a(\tau)=a\left(x^2\right)=a_1(x)$, $b(\tau)=b\left(x^2\right)=b_1(x)$, $\lambda(\tau)=\lambda\left(x^2\right)=\lambda_1(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{da_1(x)}{dx}=\dfrac{2x}{a_1(x)-\lambda_1(x)},\\[2mm] \dfrac{db_1(x)}{dx}=\dfrac{2x}{b_1(x)-\lambda_1(x)},\\[2mm] \dfrac{d\lambda_1(x)}{dx}=(1-\alpha)\dfrac{da_1(x)}{dx}+\alpha\dfrac{db_1(x)}{dx},\end{cases}$$

с начальным условием $a_1(0)=b_1(0)=\lambda_1(0)=0$.

Решая систему методом рядов, находим

$$a_1(x) = -x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}},\ b_1(x) = x\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}},\ \lambda_1(x) = x\sqrt{2}\,\frac{2\alpha-1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}.$$

Перейдя в подынтегральном выражении к параметру x, подставив найденные параметры a_1, b_1, λ_1 и выполнив замену $z = \zeta\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, будем иметь

$$w(\zeta, x) = c(x)\int_0^{\zeta}(z-x)z^{\alpha-1}\left(z-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}dz.$$

Из условия $w(\infty)=\infty$ следует, что $c(x)=1$. Проинтегрировав, получим

$$w(\zeta, x) = \zeta^{\alpha}\left(\zeta-\frac{x}{\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Из условия $w(x,x) = le^{i(1-\alpha)\pi}$ имеем $x = l\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, окончательно получим отображение

$$w(\zeta, l) = \zeta^{\alpha}\left(\zeta-\frac{l}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

из полуплоскости на полуплоскость с разрезом длины l; прообразами вершин 0, $le^{i\pi(1-\alpha)}$, 0 при этом отображении являются соответственно точки 0, $l\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, $\frac{l}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$.

Пусть теперь $g : E_z \times [0, \varepsilon_0) \to E_{\xi}$, $\xi = g(z,\varepsilon)$ есть голоморфное и однолистное отображение из единичного круга E_z на единичный круг E_{ξ} с разрезом длины ε, идущим из точки 1 по дуге окружности радиуса r, составляющей угол $(1-\alpha)\pi$, $0<\alpha<1$, с верхней половинкой единичной окружности. Пусть отображение g удовлетворяет условию $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(z,\varepsilon) = z$.

Отображение g можно представить композицией $g(z,\varepsilon) = \xi(w(\zeta(z,\varepsilon)))$, где

$$\xi(w) = e^{i\theta}\,\frac{w-s(\varepsilon)e^{-i\frac{\theta}{2}}}{w-s(\varepsilon)e^{i\frac{\theta}{2}}},\ w(\zeta) = \zeta^{\alpha}\left(\zeta-\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{1-\alpha},\ \zeta(z) = s(0)e^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{z-1}{z-e^{i\theta}},$$

а $s(\varepsilon) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}\frac{\sin\left(\alpha\pi-\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)-r\sin\frac{\varepsilon}{2r}}{\sqrt{1+2r\cos(\alpha\pi)+r^2}}$, $e^{i\theta} = e^{-i2\alpha\pi}\,\frac{r+e^{i\alpha\pi}}{r+e^{-i\alpha\pi}}$.

Отображение g раскладывается по ε_1 в ряд $g(z,\varepsilon_1) = z + \varepsilon_1\left(z-e^{i\theta}\right)^2 + o(\varepsilon_1)$, где ε_1 пропорционально ε. Переобозначив ε_1 через ε, по теореме 1 получаем вариационную формулу

$$f_1(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Big(f'(z)\big(z-e^{i\theta}\big)^2-f(z)\big(f''(0)e^{i2\theta}-2e^{i\theta}\big)-e^{i2\theta}\Big)+o(\varepsilon,z),\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

где $e^{i\theta}=e^{-2i\alpha\pi}\dfrac{r+e^{i\alpha\pi}}{r+e^{-i\alpha\pi}}$ – точка на единичной окружности, через которую проходит продолжение разреза.

5. Рассуждения в этом пункте повторяют доказательства теорем 1 и 2, так как формально их применить нельзя.

Пусть $g:E_z\times[0,\varepsilon_0)\to E_\zeta$, $\zeta=g(z,\varepsilon)$ есть голоморфное однолистное отображение из круга E_z на круг E_ζ с выброшенным отрезком

$$\{\zeta\in\mathbb{C}:\arg\zeta=\beta,1-\varepsilon\le|\zeta|\le1\},\ \beta\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon\in[0,1).$$

Это отображение неявно задается уравнением

$$4(1-\varepsilon)z\left(e^{-i\beta}g^2(z,\varepsilon)+e^{i\beta}\right)=\left(4\left(z^2+1\right)-4\left(z^2+1\right)\varepsilon+(z+1)^2\varepsilon^2\right)g(z,\varepsilon),$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0+}g(z,\varepsilon)=e^{i\beta}z$ равномерно внутри E_z и имеет следующее разложение по ε:

$$g(z,\varepsilon)=e^{i\beta}z+\varepsilon^2e^{i\beta}\frac{z}{4}\frac{z+1}{z-1}+\varepsilon^3e^{i\beta}\frac{z}{4}\frac{z+1}{z-1}+o\left(z,\varepsilon^3\right),$$

$$g_z'(0,\varepsilon)=e^{i\beta}-\frac{1}{4}e^{i\beta}\varepsilon^2-\frac{1}{4}e^{i\beta}\varepsilon^3+o\left(0,\varepsilon^3\right).$$

Раскладывая $\dfrac{f(g(z,\varepsilon))}{g_z'(0,\varepsilon)}$, где $f\in S$, по степеням ε с точностью до ε^3, получим

$$e^{i\beta}f(z,\varepsilon)=e^{i\beta}\frac{f(g(z,\varepsilon))}{g_z'(0,\varepsilon)}=f\left(e^{i\beta}z\right)+\frac{\varepsilon^2}{4}\left(f'\left(e^{i\beta}z\right)e^{i\beta}z\frac{z+1}{z-1}+f\left(e^{i\beta}z\right)\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^3}{4}\left(f'\left(e^{i\beta}z\right)e^{i\beta}z\frac{z+1}{z-1}+f\left(e^{i\beta}z\right)\right)+o\left(z,\varepsilon^3\right).$$

Переобозначая $e^{i\beta}z$ через z и учитывая, что, если $f(z,\varepsilon)\in S$, то $e^{i\beta}f\left(e^{-i\beta}z,\varepsilon\right)=f_1(z,\varepsilon)\in S$, получаем в классе S для отображения f следующую вариационную формулу:

$$f_1(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon^2\frac{1}{4}\left(f(z)+zf'(z)\frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1}\right)+$$
$$+\varepsilon^3\frac{1}{4}\left(f(z)+zf'(z)\frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1}\right)+o\left(z,\varepsilon^3\right),\ \ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0).$$

Малая вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\left(f(z)+zf'(z)\frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1}\right)+o(z,\varepsilon)$$

известна и может быть получена другим способом, например с помощью семейства голоморфных однолистных отображений из E_z на единичный круг с выброшенной луночкой малой площади, пропорциональной ε.

Приведем для полноты еще две известные малые вариационные формулы.

6. В классе S имеет [1] место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{f^2(z)}{f(z)-w_k},\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0),$$

где $A_k\in\mathbb{C}$, $k\in\overline{1,n}$, для отображения f с условием, что у $f(E)$ есть внешние точки w_k, $k\in\overline{1,n}$.

7. В классе S имеет [5] место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\left(2e^{i\beta}-c_2\right)f^2(z)+\varepsilon^2\left(2c_2^2-c_3-4e^{i\beta}+3e^{2i\beta}\right)f^3(z)+o\left(z,\varepsilon^2\right),$$

$$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

где $\beta\in\mathbb{R}$, $c_2\in\mathbb{C}$, $|c_2|\le 2$, $c_3\in\mathbb{C}$, $|c_3|\le 3$, для отображения f с условием, что $f(\partial E_z)$ есть жорданова кривая.

Последнюю формулу называют малой вариацией Шиффера в бесконечности. Отметим, что константы c_2 и c_3, вообще говоря, зависят от отображения *f*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геометрическая* теория функции комплексного переменного. 2-е изд. / под ред. В.И. Смирнова. М.: Наука. 1966. 630 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 219 с.
3. *Труды* П.П. Куфарева: к 100летию со дня рождения / под общ. ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 371 с.
4. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
5. *Schiffer M.* On the coefficient problem for univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. No. 1. P. 95–101.

Статья поступила 12.07.2017 г.

Borisova Ya.V., Kolesnikov I.A., Kopanev S.A. (2017) ON SMALL VARIATION FORMULAS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 49. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/49/1

One of the main methods for solving extremal problems is the variational method. Variational formulas are the main tool of the variational method. Some variational formulas, the so-called small variational formulas, were obtained by means of a family of mappings from the unit disk onto domains lying in the unit disk. There is a theorem in the paper that gives a rather general approach to obtaining small variational formulas.

Theorem. Let the map $g:E_z\times(0,\varepsilon_0)\to E_\zeta$, $\zeta=g(z,\varepsilon)$ satisfy the following conditions:

1) $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, the contraction $g|_{E\times\{\varepsilon\}}$ is a holomorphic univalent mapping;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}g(z,\varepsilon)=z$, locally uniformly in E_z;

3) there exists a partial right derivative of $g(z,\varepsilon)$ and $g'_z(z,\varepsilon)$ with respect to ε at the origin, locally uniformly in E_z.

Then, in the class S for the mapping $f\in S$, the following variational formulas take place:

$$f_1(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left(f'(z)g'_\varepsilon(z,0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0,0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0) - g'_\varepsilon(0,0)\right) + o(z,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{1}$$

where $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z;

$$f_2(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0)\Big) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0,0)\Big) + o(z,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{2}$$

where $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z;

$$f_3(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z,\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,\hat{\varepsilon}), \tag{3}$$

where
$$P_3(z) = f'(z)\Big(g'_\varepsilon(z,0) + z^2\overline{u} - u + itz\Big) -$$
$$-f(z)\big(f''(0)(g'_\varepsilon(0,0) - u) + g''_{z\varepsilon}(0,0) + it\big) - g'_\varepsilon(0,0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \dfrac{1}{|u|}\right)$, u, t are constants, $u \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, and $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z;

$$f_4(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\Big(f'(z)\Big(z^2\overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) + itz\Big) - f(z)\big(g''_{z\varepsilon}(0,0) + it\big)\Big) + o(z,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \in (0,\hat{\varepsilon}), \tag{4}$$

where t is a constant, $t \in \mathbb{R}$, and $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{o(z,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z.

A number of new small variations have been obtained. In adition, the P.P. Kufarev method of finding parameters in the Christoffel–Schwarz integral is illustrated by a simple example.

Keywords: holomorphic univalent mapping, variational formula, parameters in the Christoffel–Schwarz integral, Kufarev method

BORISOVA Yana Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borisova_yana@list.ru

KOLESNIKOV Ivan Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

KOPANEV Sergey Anatolievich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: copanev_d@mail.ru

REFERENCES

1. Goluzin M.G. (1966) *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of a function of a complex variable]. Moscow: Nauka.
2. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric theory of analytic functions]. Tomsk, TSU Publ.
3. *Proceedings of P.P. Kufarev: on the 100th anniversary of his birth* (2009). Tomsk: NTL Publ.
4. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
5. Schiffer M. (1968) On the coefficient problem for univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1). pp. 95–101.