

3. Бояринов Р.Н. О скорости сходимости к предельному показательному распределению // Чебышевский сборник. 2005. **6**, вып. 1. 50–57.
4. Карацуба А.А., Королев М.А. Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой // Успехи матем. наук. 2006. **61**, № 3(363). 3–92.
5. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
08.02.2010

УДК 515.12

О МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

М. А. Добрынина¹

Строится компакт X , такой, что пространство $\lambda^3(X)$ максимальных 3-сцепленных систем не является нормальным. Доказывается, что для любого произведения бесконечных сепарабельных пространств существует максимальная сцепленная система, носитель которой совпадает с пространством произведения. Также доказывается, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями всюду плотно в суперрасширении $\lambda(X)$, если пространство X связно и сепарабельно. Обсуждаются свойства полунормальных функторов, сохраняющих точки взаимной однозначности.

Ключевые слова: максимальные k -сцепленные системы, носитель, функтор суперрасширения, полунормальные функторы.

The compact space such that the space $\lambda^3(X)$ of maximal 3-linked systems is not normal is constructed. It is proved that for any product of infinite separable spaces there exists a maximal linked system with the support equal to the product space. It is proved that a set of maximal 3-linked systems with continuous supports is everywhere dense in the superextension $\lambda(X)$ if X is connected and separable. The properties of seminormal functors preserving one-to-one points are discussed.

Key words: maximal k -linked systems, support, superextension functor, seminormal functors.

В 1983 г. Я. Ван Милл [1] определил пространство $\lambda^k(X)$ максимальных k -сцепленных систем компакта X и доказал, что при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$ может не быть компактным. А.В. Иванов [2] определил $N^k(X)$ как пространство полных k -сцепленных систем и усилил результат Ван Милла, доказав [3], что $\lambda^k(X)$ всюду плотно в $N^k(X)$ и, следовательно, некомпактно для любого компакта X без изолированных точек. Поскольку всякий компакт является нормальным пространством, естественно возникает вопрос о нормальности пространства $\lambda^k(X)$. Одним из основных результатов настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Существует компакт X , такой, что пространство $\lambda^3(X)$ не нормально.*

Напомним, что k -сцепленной системой называется такая система замкнутых подмножеств компакта X , что любые ее k элементов пересекаются. Максимальной k -сцепленной системой (МкСС) называется такая k -сцепленная система, которая не содержится ни в какой другой k -сцепленной системе. Если ξ — МкСС, то носителем ξ называется замкнутое множество

$$\text{supp}(\xi) = [\cup\{F \in \xi : F \text{ — минимальный по включению элемент } \xi\}].$$

Пространство $\lambda^k(X)$ состоит из МкСС (при $k > 2$ с конечными носителями) с топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида $O(U) = \{\xi \in \lambda^k(X) : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\}$, где U — открытое подмножество X . При $k = 2$ пространство $\lambda^2(X)$ называется суперрасширением пространства X и обозначается через $\lambda(X)$, при этом вместо обозначения М2СС используется МСС.

¹Добрынина Мария Александровна — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mary_dobr@mail.ru.

Полной k -сцепленной системой (ПкСС) называется такая k -сцепленная система, что для любого замкнутого $F \subset X$ условие “любая окрестность F содержит некоторый элемент Φ системы ξ ” влечет $F \in \xi$.

Множество $N^k(X)$ всех ПкСС пространства X наделяется топологией, открытую базу которой образуют множества вида $O(U_1, \dots, U_n)(V_1, \dots, V_m) = \{\xi \in N^k(X) : \text{для любого } i = 1, \dots, n \text{ существует такое множество } F_i \in \xi, \text{ что } F_i \subset U_i; \text{ для любого } j = 1, \dots, m \text{ и любого } F \in \xi \text{ пересечение } V_j \cap F \neq \emptyset\}$, где множества $U_1, \dots, U_n; V_1, \dots, V_m$ открыты в X . Заметим, что $\lambda^k(X) \subset N^k(X)$.

Все остальные необходимые определения можно найти в работах [4–8].

Доказательство теоремы 1. Положим $X = A(\omega_0) \times A(\omega_1)$, где $A(\omega_0), A(\omega_1)$ — александровские компактификации дискретных пространств $D(\omega_0)$ и $D(\omega_1)$; $\{x_0\}, \{y_0\}$ — их наросты. Пусть $B = \{x_0\} \times (A(\omega_1) \setminus \{y_0\})$, $C = (A(\omega_0) \setminus \{x_0\}) \times \{y_0\}$, $z_0 = (x_0, y_0)$. Построим непересекающиеся, замкнутые в $\lambda^3(X)$ множества H_1 и H_2 . Возьмем последовательность точек $x_n = n \in A(\omega_0) \setminus \{x_0\}$. Пусть $z_1^0, z_2^0 \in X \setminus (B \cup C \cup \{z_0\})$, $z_1^0 \neq z_2^0$. Положим $z_n = (x_n, y_0)$, $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_0)$. Пусть $F_n^1 = \{z_1^0, z_2^0, z_n\}$, $F_n^2 = \{z_1^0, z_2^0, z_{n+1}\}$, $F_n^3 = \{z_1^0, z_n, z_{n+1}\}$, $F_n^4 = \{z_2^0, z_n, z_{n+1}\}$. Система $\xi_n^0 = \{F_n^i\}_{i=1}^4$ является 3-сцепленной. Построим ее до некоторой МЗСС ξ_n . Теперь построим ПЗСС ξ следующим образом. Пусть $\Phi_1 = \{z_0, z_1^0\}$, $\Phi_2 = \{z_0, z_2^0\}$ и

$$\xi = \{\Phi_1\} \cup \{\Phi_2\} \cup \{F : \text{для любой окрестности } OF \text{ найдется } \Phi_i, i = 1, 2, \text{ с условием } \Phi_i \subset OF\}.$$

Проверим, что $\xi_n \rightarrow \xi$ в $N^3(X)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $O(U_1, \dots, U_m)(V_1, \dots, V_k)$ — произвольная окрестность ξ . Тогда $z_0 \in \cap_{i=1}^m U_i$. Значит, существует номер n^0 , такой, что для $n \geq n^0$ имеем $z_n, z_{n+1} \in \cap_{i=1}^m U_i$. Кроме того, в каждое множество U_i попадет как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0 . Значит, как минимум одно из множеств F_n^3 или F_n^4 лежит в U_i при $n \geq n^0$. Из того, что $V_j \cap F \neq \emptyset$ для любого j и любого элемента $F \in \xi$, следует, что либо $z_1^0, z_2^0 \in V_j$, либо $z_0 \in V_j$. В первом случае получим $V_j \cap F_n^i \neq \emptyset$ для любых n, i . Для остальных V_j положим их пересечение равным V . Так как $z_0 \in V$, существует номер n^1 , такой, что для $n \geq n^1$ имеем $z_n, z_{n+1} \in V$. Тогда $V \cap F_n^i \neq \emptyset$ для $n \geq n^1$. Взяв $n^2 = \max\{n^0, n^1\}$, получим, что $\xi_n \in O(U_1, \dots, U_m)(V_1, \dots, V_k)$ для $n \geq n^2$.

В качестве H_1 рассмотрим последовательность МЗСС $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$; $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ вместе с пределом ξ — компакт, $\xi \notin \lambda^3(X)$, т.е. H_1 замкнуто. Построим множество H_2 следующим образом. Для произвольных $y_a, y_b \in A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$, $y_a \neq y_b$ положим $z'_a = (x_0, y_a)$, $z'_b = (x_0, y_b)$. Пусть $G_{ab}^1 = \{z_1^0, z_2^0, z'_a\}$, $G_{ab}^2 = \{z_1^0, z_2^0, z'_b\}$, $G_{ab}^3 = \{z_1^0, z'_a, z'_b\}$, $G_{ab}^4 = \{z_2^0, z'_a, z'_b\}$. Система $\eta_{ab}^0 = \{G_{ab}^i : i = 1, 2, 3, 4\}$ является 3-сцепленной. Значит, она может быть построена до МЗСС η_{ab} . Положим $H_2 = [\cup_{z'_a, z'_b \in B} \{\eta_{ab}\}]$. Легко проверяется, что $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

Покажем, что для H_1 и H_2 в $\lambda^3(X)$ не существует непересекающихся окрестностей. Пусть O^1 и O^2 — произвольные окрестности множеств H_1 и H_2 соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $O^1 = \bigcup_{\xi_n \in H_1} O\xi_n$, $O^2 \supseteq \bigcup_{\eta_{ab} \in H_2} O\eta_{ab}$, где $O\xi_n = O(U_1^n, \dots, U_m^n)$, $O\eta_{ab} = (W_1^{ab}, \dots, W_k^{ab})$ — базисные окрестности систем ξ_n и η_{ab} . Заметим, что из построения систем ξ_n следует, что для любой окрестности $O\xi_n$ и для любого фиксированного i выполнено включение $U_i^n \supset \{x_l\} \times (A(\omega_1) \setminus \{y_0\})$, где $l = n$ или $l = n + 1$, K_n — некоторое конечное подмножество $A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в U_i^n для каждого i . Аналогично из построения систем η_{ab} следует, что для любой окрестности $O\eta_{ab}$ и для любого фиксированного j выполнено условие $W_j^{ab} \supset \{y_c\} \times (A(\omega_0) \setminus \{x_0\})$, где $c = a$ или $c = b$, K_c — некоторое конечное подмножество $A(\omega_0) \setminus \{x_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_j^{ab} для каждого j . Далее, для любой системы $\xi_n \in H_1$ положим $Oz_n = \cap \{U_i^n : z_n \in U_i^n\}$; $Oz_{n+1} = \cap \{U_i^n : z_{n+1} \in U_i^n\}$, где множества U_i^n — из определения $O\xi_n$. Аналогично для любой системы $\eta_{ab} \in H_2$ положим $Oz'_a = \cap \{W_j^{ab} : z'_a \in W_j^{ab}\}$, $Oz'_b = \cap \{W_j^{ab} : z'_b \in W_j^{ab}\}$, где W_j^{ab} — из определения $O\eta_{ab}$. Из свойств пространства X и сделанных выше замечаний следует, что существуют такие точки $z'_a, z'_b \in B$ и такие номера n^a, n^b , что для $n \geq \max\{n^a, n^b\}$ верны соотношения $Oz'_a \cap Oz_n \neq \emptyset$, $Oz'_a \cap Oz_{n+1} \neq \emptyset$, $Oz'_b \cap Oz_n \neq \emptyset$, $Oz'_b \cap Oz_{n+1} \neq \emptyset$. В таком случае для данных a, b, n пересечение $O\eta_{ab} \cap O\xi_n \neq \emptyset$. Докажем это. Проверим, что $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$, $U_i^n \cap W_j^{ab} \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$ для любых i, j, h . Рассмотрим первое пересечение. Возможны два случая. Если $U_i^n \cap U_j^n = \{z_1^0, z_2^0\}$, то как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_h^{ab} , значит, $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$. В другом случае $z_l \in U_i^n \cap U_j^n$, где $l = n$ или $l = n + 1$, $z'_c \in W_h^{ab}$, где $c = a$ или $c = b$. При этом $U_i^n \cap U_j^n \supset Oz_l$, $W_h^{ab} \supset Oz'_c$. Тогда, так как $Oz'_c \cap Oz_l \neq \emptyset$, получим $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$. Для второго пересечения проверка полностью аналогична. Следовательно, $O\xi_n \cap O\eta_{ab} = O(U_1^n, \dots, U_m^n, W_1^{ab}, \dots, W_k^{ab}) \neq \emptyset$. Таким образом, $O^1 \cap O^2 \neq \emptyset$ и $\lambda^3(X)$ не нормально. Теорема 1 доказана.

Следующая лемма является усилением одного из результатов статьи [4].

Лемма. Для любого бесконечного сепарабельного пространства X существует МСС ξ , такая, что $\text{supp}(\xi) = X$.

Доказательство. Пусть A — счетное, всюду плотное подмножество X : $A = \{r_0, r_1, \dots\}$. Положим $F_1 = \{r_0, r_1\}$, $F_2 = \{r_0, r_2\}$, $F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$, ..., $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}\}$, $F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \dots, r_{2k}, r_{2k+1}\}$, Сцепленная система, состоящая из множеств F_n , может быть дополнена до некоторой МСС ξ , в которой множества F_n будут являться минимальными по включению элементами. Значит, $\text{supp}(\xi) = X$. Лемма доказана.

Предложение 1. Если в X найдется бесконечное открытое сепарабельное подпространство, то существует МСС ξ , такая, что $\text{supp}(\xi) = X$.

Доказательство. Пусть A — открытое сепарабельное подпространство X , H — счетное, всюду плотное в A подмножество: $H = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$. Определим множества F_n таким образом: $F_1 = \{r_0, r_1\}$, $F_2 = \{r_0, r_2\}$, $F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$, ..., $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}\}$, $F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \dots, r_{2k}, r_{2k+1}\}$, Далее, пусть $B = X \setminus A$. Без ограничения общности можно считать, что $|B| > 1$. В качестве η возьмем систему, состоящую из множеств $F_n \cup \{x\}$, где $x \in B$, и множества B . Система η является сцепленной и может быть дополнена до некоторой МСС ξ . Легко проверить, что множества $F_n \cup \{x\}$ — минимальные по включению элементы системы ξ , а их объединение всюду плотно в X . Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть $f: X \times Y \rightarrow X$ — проекция, пространство Y сепарабельно и существует МСС ξ_X с носителем $\text{supp}(\xi_X) = X$. Тогда существует МСС ξ из $\lambda(X \times Y)$, такая, что $\text{supp}(\xi) = X \times Y$ и $\lambda f(\xi) = \xi_X$.

Доказательство. Так как пространство Y сепарабельно, то по лемме существует МСС ξ_Y , такая, что $\text{supp}(\xi_Y) = Y$. Построим сцепленную систему $\eta = \{F \times G : F \in \xi_X, G \in \xi_Y\}$ и дополним ее до некоторой МСС ξ произвольным образом. Легко проверяется, что элементы вида $F_i \times G_j$ являются минимальными по включению элементами системы ξ , если F_i, G_j — минимальные по включению элементы систем ξ_X и ξ_Y соответственно. Отсюда получаем, что $\text{supp}(\xi) = X \times Y$. Кроме того, из построения системы ξ следует, что $\lambda f(\xi) = \xi_X$. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть пространство X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует МСС $\xi \in \lambda(X^\mu)$, такая, что $\text{supp}(\xi) = X^\mu$.

Доказательство. Пространство X^μ разлагается в обратный спектр $S = \{X^\alpha, p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \mu\}$, где $X^\alpha = \prod_{\gamma < \alpha} X_\gamma$ ($X_\gamma = X$ для любого $\gamma < \alpha$), а $p_\beta^\alpha : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ — естественная проекция произведения на подпроизведение. По лемме для $X^1 = X$ существует МСС ξ , такая, что $\text{supp}(\xi) = X^1$. Полагаем $\xi_1 = \xi$. Для $X^2 = X \times X$ по предложению 2 существует МСС ξ_2 , такая, что $\text{supp}(\xi_2) = X^2$, $\lambda p_1^2(\xi_2) = \xi_1$. Предположим, что для всех γ , которые меньше фиксированного $\beta < \mu$, уже построены МСС ξ_γ , такие, что $\text{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$ и для $\delta < \gamma$ верно $\lambda p_\delta^\gamma(\xi_\gamma) = \xi_\delta$.

Возможны два случая:

1) $\beta = \gamma + 1$ для некоторого $\gamma < \mu$. Тогда, ввиду того что пространство X сепарабельно и существует такая МСС ξ_γ , что $\text{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$, из предложения 2 следует, что существует МСС ξ_β , такая, что $\text{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$ и $\lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\gamma$. А значит, для всех $\alpha < \beta$ выполнено $\lambda p_\alpha^\beta(\xi_\beta) = \lambda p_\alpha^\gamma \circ \lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\alpha$;

2) β — предельное число. Тогда $X^\beta = \lim S_\beta$, где $S_\beta = \{X^\alpha, p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$. Так как функтор суперрасширения непрерывен, пространство $\lambda(X^\beta)$ совпадает с пределом спектра $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$. Ясно, что $\xi_\beta = \{\xi_\alpha : \alpha < \beta\}$ — нить спектра S_λ по построению. Следовательно, $\xi_\beta \in \lambda(X^\beta)$. Докажем, что $\text{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$. Известно, что $p_\alpha^\beta(\text{supp}(\xi_\beta)) \supset \text{supp}(\lambda(f)(\xi_\beta))$, и так как $\lambda(f)(\xi_\beta) = \xi_\alpha$, то $p_\alpha^\beta(\text{supp}(\xi_\beta)) = X_\alpha$ для любого $\alpha < \beta$. Ввиду замкнутости носителя $\text{supp}(\xi_\beta) = \bigcap_\alpha (p_\alpha^\beta)^{-1}(p_\alpha^\beta(\text{supp}(\xi_\beta)))$. Значит, $\text{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$.

Таким образом, для всех α , которые меньше μ , существуют МСС ξ_α , такие, что $\text{supp}(\xi_\alpha) = X^\alpha$ и $\lambda p_\beta^\alpha(\xi_\alpha) = \xi_\beta$ для $\beta < \alpha$.

Рассмотрим обратный спектр $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \mu\}$. Его предел $\lim S$ совпадает с пространством $\lambda(X^\mu)$. В качестве ξ возьмем $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha < \mu\}$ — нить спектра S_λ . Тогда $\xi \in \lambda(X^\mu)$. Аналогично предыдущему случаю получим, что $\text{supp}(\xi) = \lim S = X^\mu$. Предложение 3 доказано.

Теорема 2. Пусть пространство X связно и сепарабельно. Тогда множество МСС со связными носителями всюду плотно в $\lambda(X)$.

Доказательство. Пусть $O(U_1, \dots, U_n)$ — произвольное базисное открытое в $\lambda(X)$ множество. Докажем, что существует МСС ξ со связным носителем, лежащая в $O(U_1, \dots, U_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq 3$ и $\bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset$. Так как X не имеет изолированных точек, в каждом пересечении $U_i \cap U_j$ при $i \neq j$ можно выбрать по точке x_j^i так, чтобы все они были различны. Объединение всех выбранных точек, лежащих в U_i , обозначим через Φ_i . Тогда сцепленную систему $\xi_0 = \{\Phi_i : i = 1, \dots, n\}$

можно дополнить до МСС с конечным носителем так, что она будет лежать в $O(U_1, \dots, U_n)$. Значит, в ней найдутся такие минимальные по включению элементы (обозначим их F_1 и F_2) и такая точка y_0 , что $F_1 \cap F_2 = \{y_0\}$. Остальные минимальные по включению элементы системы ξ обозначим через $F_i, i \geq 3$. Поскольку множество $\text{supp}(\xi)$ конечно, найдется некоторое счетное, всюду плотное в X множество Q , не пересекающее $\text{supp}(\xi)$. Пусть $y_1 \in \cap \{U_i : y_0 \in U_i\} \cap Q$. Занумеруем оставшиеся точки Q в некоторой последовательности начиная с $y_2: y_2, y_3, y_4, \dots$. Построим следующие множества:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= F_1, \quad G_1^0 = F_2 \cup \{y_1\}, \quad G_2^0 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_2\}, \quad G_3^0 = F_2 \cup \{y_2, y_3\}, \\ G_4^0 &= (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_4\}, \quad \dots, \quad G_{2k}^0 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_5, \dots, y_{2k-1}, y_{2k}\}, \\ G_{2k+1}^0 &= F_2 \cup \{y_2, y_4, y_6, \dots, y_{2k}, y_{2k+1}\}. \end{aligned}$$

Для всех i , таких, что $F_i \cap F_1 = y_0$, положим $G_i = F_i \cup \{y_1\}$. Для остальных i положим $G_i = F_i$. Заметим, что в этих обозначениях $G_1 = F_1 = G_0^0$, $G_2 = F_2 \cup \{y_1\} = G_1^0$. Рассмотрим систему η_0 , состоящую из множеств G_i и G_j^0 . Система η_0 будет сцепленной по построению. Она может быть дополнена до некоторой МСС η . Проверим, что все точки множества Q попадут в объединение минимальных по включению элементов МСС η . Пусть это не так. Предположим, что найдется элемент $H \in \eta$, такой, что $H \subset G_i^0$ и $y_j \in G_i^0 \setminus H$ при $j \geq 1$. При $j = i$ положим $k = j + 1$, при $j < i$ положим $k = j$. Из построения множеств G_i^0 будет следовать, что $G_k^0 \cap G_i^0 = \{y_j\}$. Значит, $H \cap G_k^0 = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает, что $\text{supp}(\eta) \supseteq [Q] = X$. Проверим, что $\eta \in O(U_1, \dots, U_n)$. Так как $\xi \in O(U_1, \dots, U_n)$, то для любого $i = 1, \dots, n$ найдутся $F_j \in \xi$, такие, что $F_j \subset U_i$. Если $G_j = F_j$, то $G_j \subset U_i$. Если же $G_j = F_j \cup \{y_1\}$, то $y_0 \in F_j \subset U_i$. Напомним, что точка y_1 принадлежит тем же множествам U_i , что и y_0 . Тогда $y_1 \in U_i$, и $G_j \subset U_i$. Теорема 2 доказана.

В частности, получаем, что множество МСС со связными носителями незамкнуто в суперрасширении $\lambda([0, 1])$ отрезка $[0, 1]$ с интервальной топологией, что и является доказательством невозможности построения подфунктора функтора суперрасширения, являющегося аналогом функтора exr^c . Напомним, что $\text{exr}^c(X)$ является пространством всех непустых замкнутых связных подмножеств пространства X в топологии Вьеториса [7]. Справедливо следующее

Предложение 4. *Существуют непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ и МСС $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем, такие, что носитель МСС $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве Y отрезок $[0, 1]$, в качестве X — произведение $[0, 1] \times [0, 1]$, и пусть $f : X \rightarrow Y$ — проекция. Положим $r_0 = (0, 0)$, $r_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $r_2 = (1, 0)$, $r_3 = (1, 1)$. Далее, занумеруем точки некоторого счетного, всюду плотного подмножества $X \setminus \{r_0, \dots, r_3\}$ начиная с $r_4: r_4, r_5, r_6, \dots$. Пусть $F_1 = \{r_0, r_1\}$, $F_2 = \{r_0, r_2\}$, $F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$, $\dots$, $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}\}$, $F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \dots, r_{2k}, r_{2k+1}\}$ $\dots$. Определим систему $\xi^0 = \{F_i\}_{i=1}^\infty$ и достроим ее до некоторой МСС ξ . Легко проверить, что $\text{supp}(\xi) = X$. Пусть $\eta = \lambda f(\xi)$, $f(F_i) = \Phi_i$. Тогда из построения систем ξ и η следует, что

$$\text{supp}(\eta) = [\bigcup_{i=1,2,3} \Phi_i] = \{f(r_0), f(r_1), f(r_2)\}$$

является несвязным подмножеством Y . Предложение 4 доказано.

Из предложения 4 следует, что операция λ^c не является ковариантным функтором. Кроме того, для несвязных компактов имеет место

Предложение 5. *Пусть пространство X несвязно. Тогда множество МСС со связными носителями не является всюду плотным в $\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть пространство X представимо в виде $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, A, B — открыто замкнутые подмножества X . Возьмем точки $x_1 \in A$, $x_2, x_3 \in B$ и такие их окрестности Ox_i , что $Ox_1 \subset A$, $Ox_2 \subset B$, $Ox_3 \subset B$, $Ox_2 \cap Ox_3 = \emptyset$. Положим $U_1 = Ox_1 \cup Ox_2$, $U_2 = Ox_2 \cup Ox_3$, $U_3 = Ox_1 \cup Ox_3$. Тогда $O(U_1, U_2, U_3) \neq \emptyset$. Кроме того, для любой системы $\gamma \in O(U_1, U_2, U_3)$ верно, что $\text{supp}(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, $\text{supp}(\gamma) \cap B \neq \emptyset$. Предложение 5 доказано.

В работе [9] построен пример неметризуемого компакта, удовлетворяющего следующему условию: для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ со степенным спектром $\text{sp}\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально. В связи с этим возникает вопрос о связи свойства сохранения точек взаимной однозначности полунормальным функтором с его степенным спектром. Данная взаимосвязь отражена в предложениях 6 и 7.

Напомним, что полунормальный функтор $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности, если для любого отображения $f : X \rightarrow Y$ и любой точки $y \in Y$, такой, что $|f^{-1}(y)| = 1$, отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ также взаимно однозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y) : |(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$. Под степенным

спектром функтора будем понимать множество степеней точек всевозможных пространств вида $\mathcal{F}_n(X)$ (см. [6, 8]).

Предложение 6. Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности, и $\text{sp}\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$. Тогда $k \leq 3$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $k \geq 4$. Рассмотрим дискретное пространство X мощности k . Оно представимо в виде $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, $|A| \geq 2$, $|B| \geq 2$. Пусть $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим отображение $f_1 : X \rightarrow A \cup \{b\}$, такое, что $f_1(A) = A$, $f_1(B) = b$, и отображение $f_2 : X \rightarrow B \cup \{a\}$, такое, что $f_2(B) = B$, $f_2(A) = a$. Далее, пусть $Y = \{a, b\}$ и отображение $g_1 : A \cup \{b\} \rightarrow Y$ действует по правилу $g_1(A) = a$, $g_1(b) = b$, а отображение $g_2 : B \cup \{a\} \rightarrow Y$ — по правилу $g_2(B) = b$, $g_2(a) = a$. Таким образом, $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Пусть точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ такова, что $\text{supp}(\xi) = X$. Тогда для $\eta_1 = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$ имеем $|\text{supp}(\eta_1)| = 1$, так как $|A| < k$. При этом $\text{supp}(\eta_1) = \{b\}$, иначе $\mathcal{F}$ не сохраняет точки взаимной однозначности. Положим $\mathcal{F}(g_1)(\eta_1) = \delta_1$, тогда $\text{supp}(\delta_1) = b$, так как $g_1(b) = b$. С другой стороны, для $\eta_2 = \mathcal{F}(f_2)(\xi)$ выполнено $\text{supp}(\eta_2) = \{a\}$, как и в предыдущем случае. Пусть $\mathcal{F}(g_2)(\eta_2) = \delta_2$, тогда $\text{supp}(\delta_2) = \{a\}$. Получим, что $\delta_1 \neq \delta_2$, и, следовательно, $\mathcal{F}(g_1) \circ \mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(g_2) \circ \mathcal{F}(f_2)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор степени ≤ 2 . Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.

Доказательство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $y \in Y$ — произвольная точка, такая, что $f^{-1}(y) = x$. Проверим, что отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ также взаимно однозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y)$. Допустим, что существует точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$, такая, что $\mathcal{F}(f)(\xi) = y$ и $\text{supp}(\xi) = \{z_1, z_2\}$. Ясно, что $z_i = x$ для некоторого i . Очевидно, что $f(z_1) = f(z_2) = f(x) = y$. Значит, $z_1 = z_2 = x$, и точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ совпадает с точкой $x \in \mathcal{F}(X)$. То есть $|(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$. Полунормальный функтор степени 1 является тождественным, и, значит, он автоматически сохраняет точки взаимной однозначности. Предложение 7 доказано.

Заметим, что в случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности (функтор λ), так и несохранение (функтор exp^K , см. [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van Mill J. An almost fixed point theorem for metrizable continua // Arch. Math. 1983. **40**. 159–169.
2. Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сиб. матем. журн. 1986. № 6. 95–110.
3. Иванов А.В. Теорема о почти неподвижной точке для отображений пространства максимальных k -сцепленных систем // Вопросы геометрии и топологии. 1986. Петрозаводск: РИО Петрозаводск. ун-та, 1986. 31–40.
4. Вакулова Е.В. О носителях максимальных сцепленных систем // Тр. Петрозаводск. ун-та. Математика. 2004. Вып. 11. 3–8.
5. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 3. 3–62.
6. Иванов А.В. О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Математика. 2000. Вып. 7. 15–28.
7. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
8. Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors // Topol. and Appl. 1997. **76**. 125–150.
9. Иванов А.В., Кашиба Е.В. О наследственной нормальности пространств вида $\mathcal{F}(X)$ // Сиб. матем. журн. 2008. № 4. 813–824.

Поступила в редакцию
08.02.2010

УДК 517.982.256

О ЗЕРКАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ МЕТРИЧЕСКОЙ 2-ПРОЕКЦИИ

П. А. Бородин¹

Вводится понятие зеркальной выборки из метрической 2-проекции на подпространство (метрическая 2-проекция двух элементов x_1, x_2 банахова пространства на подпространство Y состоит из тех элементов $y \in Y$, для которых длина ломаной $x_1 y x_2$ минимальна). Показывается, что наличие зеркальных выборок из метрических 2-проекций на

¹Бородин Петр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: pborodin@inbox.ru.