

УДК 517.98

## О КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЕ КОМПОЗИЦИИ

Е. К. Басаева, А. Г. Кусраев

Устанавливается, что композиция квазидифференцируемых отображений квазидифференцируема и выводится явная формула для вычисления квазидифференциала композиции. Используя технику дезинтегрирования, установлено, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов. Получены следствия для вычисления квазидифференциалов супремума, инфимума и интегрального оператора.

Отображение называют квазидифференцируемым во внутренней точке области определения, если в этой точке существует производная по направлениям, которая представляет собой разность двух сублинейных операторов. Квазидифференцируемые функции и операторы введены в работах [2, 3]. Квазидифференциальное исчисление, построенное в работах Л. В. Васильева, В. Ф. Демьянова, Л. Н. Поляковой, А. М. Рубинова [1–5] и др. авторов, достаточно хорошо разработано для скалярных функций. В [5] показано как методы квазидифференциального исчисления могут быть применены к отображениям, действующим в банаховы  $K$ -пространства. В [6] введено понятие квазидифференциала отображения со значениями в произвольном  $K$ -пространстве и получены новые формулы для вычисления квазидифференциала произведения, супремума и инфимума.

Настоящая работа посвящена вычислению квазидифференциала композиции операторов, действующих в  $K$ -пространства. Устанавливается, что композиция квазидифференцируемых отображений квазидифференцируема и выводится явная формула для вычисления квазидифференциала композиции. Используя технику дезинтегрирования, установлено, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов. Получены следствия для вычисления квазидифференциалов супремума, инфимума и интегрального оператора.

В статье использованы обозначения и терминология из [6–8].

### 1. Предварительные сведения

Пусть  $E$  — векторная решетка, а  $F$  — произвольное  $K$ -пространство. Сублинейный оператор  $p : E \rightarrow F$  назовем *мажорируемым*, если существует линейный положительный оператор  $\Lambda : E \rightarrow F$  такой, что  $|p(x)| \leq \Lambda(|x|)$  для всех  $x \in E$ . При этом  $\Lambda$  именуют *мажорантой* оператора  $p$ . Множество операторов  $\mathcal{U} \subset L^{\sim}(E, F)$  назовем *равномерно мажорируемым* (с *равномерной мажорантой*  $\Lambda$ ), если  $|Tx| \leq \Lambda(|x|)$  для всех  $x \in E$  и  $T \in \mathcal{U}$ . Для  $x \in E^+$  обозначим

$$C(x, p) := \left\{ \sum_{k=1}^n p(x_k) : x_1, \dots, x_n \in E, \sum_{k=1}^n |x_k| \leq x, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**1.1.** Для произвольного сублинейного оператора  $p : E \rightarrow F$  равносильны следующие утверждения:

- (1) оператор  $p$  мажорируем;
- (2) существуют такие операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\sim(E, F)$ , что  $\Lambda_1(e) \leq -p(-e) \leq p(e) \leq \Lambda_2(e)$  для всех  $e \in E^+$ ;
- (3) опорное множество  $\partial p$  порядково ограничено в  $K$ -пространстве  $L^\sim(E, F)$ ;
- (4) опорное множество  $\partial p$  равномерно мажорируемо;
- (5) для любого  $x \in E^+$  множество  $C(x, p)$  порядково ограничено в  $E$ .

$\triangleleft$  (1)  $\rightarrow$  (2): Если  $\Lambda$  — мажоранта оператора  $p$ , то  $p$  удовлетворяет условию (2) с операторами  $\Lambda_1 := -\Lambda$  и  $\Lambda_2 := \Lambda$ .

(2)  $\rightarrow$  (3): Если выполнено (2), то  $\partial p$  содержится в порядковом отрезке  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ .

(3)  $\rightarrow$  (4): Если выполнено (3), то оператор  $\Lambda := \sup\{|T| : T \in \partial p\}$ , где супремум вычисляется в  $L^\sim(E, F)$ , будет равномерной мажорантой множества  $\partial p$ .

(4)  $\rightarrow$  (5): Пусть  $\Lambda \in L^+(E, F)$  — равномерная мажоранта множества  $\partial p$ . Возьмем такие элементы  $x \in E^+$ ,  $x_1, \dots, x_n \in E$ , что  $|x_1| + \dots + |x_n| \leq x$ . Привлекая теорему Хана — Банаха — Канторовича, для каждого  $x_k$  подберем оператор  $T_k \in \partial p$  так, чтобы  $T_k x_k = p(x_k)$  (см. [7; 1.4.14 (1)]). Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^n T_k x_k \leq \sum_{k=1}^n \Lambda(|x_k|) \leq \Lambda(x),$$

что и доказывает порядковую ограниченность множества  $C(x, p)$ .

(5)  $\rightarrow$  (1): Для каждого  $x \in E^+$  положим  $\Lambda(x) := \sup C(x, p)$ . Покажем, что  $\Lambda$  — аддитивный оператор из  $E^+$  в  $F$ . В самом деле, пусть  $x = y + z$ , где  $y, z \in E^+$ . Возьмем такие  $y_1, \dots, y_n \in E$  и  $z_1, \dots, z_m \in E$ , что  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq y$  и  $|z_1| + \dots + |z_m| \leq z$ . Тогда  $|y_1| + \dots + |y_n| + |z_1| + \dots + |z_m| \leq x$ ,

$$\sum_{k=1}^n p(y_k) + \sum_{l=1}^m p(z_l) \leq \Lambda(x).$$

Переход к супремуму в этом соотношении по указанным  $y_k$  и  $z_l$  дает  $\Lambda(y) + \Lambda(z) \leq \Lambda(x)$ .

Рассмотрим теперь произвольные элементы  $x_1, \dots, x_n \in E$ , для которых  $|x_1| + \dots + |x_n| \leq x = y + z$ . В силу леммы о двойном разбиении существуют такие  $y_1, \dots, y_n \in E$  и  $z_1, \dots, z_n \in E$ , что  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq y$ ,  $|z_1| + \dots + |z_n| \leq z$  и  $x_k = y_k + z_k$  для всех  $k = 1, \dots, n$ . Учитывая определение  $\Lambda$ , можем написать

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^n p(y_k + z_k) \leq \sum_{k=1}^n p(y_k) + \sum_{k=1}^n p(z_k) \leq \Lambda(y) + \Lambda(z).$$

Тем самым  $\Lambda x \leq \Lambda y + \Lambda z$ . Очевидно, что оператор  $\Lambda$  также и положительно однороден, т. е.  $\Lambda(\lambda x) = \lambda \Lambda(x)$  при  $x \in E^+$  и  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Таким образом, существует положительный оператор из  $E$  в  $F$ , совпадающий с  $\Lambda$  на конусе  $E^+$ , который обозначим той же буквой  $\Lambda$ . Из определения  $\Lambda$  видно, что  $p(x) \leq \Lambda(|x|)$  для произвольного  $x \in E$ . При замене  $x$  на  $-x$  получим  $p(-x) \leq \Lambda(|x|)$ , поэтому,  $|p(x)| \leq p(x) \vee p(-x) \leq \Lambda(|x|)$  ( $x \in E$ ).  $\triangleright$

**1.2.** Покажем теперь, что при некоторых условиях композиция квазилинейных операторов будет квазилинейной. В случае банаховых пространств это утверждение доказано в [5], см. также [4; Прил. 3].

Пусть  $X$  — векторное пространство,  $E$  — векторная решетка, а  $F$  —  $K$ -пространство. Рассмотрим сублинейные операторы  $P, Q \in \text{Sbl}(X, E)$  и  $p, q \in \text{Sbl}(E, F)$ , причем предположим, что  $p$  и  $q$  мажорируемы. Тогда оператор  $R = (p - q) \circ (P - Q)$  представим в виде разности двух сублинейных операторов.

◁ Рассмотрим сублинейный оператор  $P \times Q : X \rightarrow E \times E$  и линейный оператор  $\pi : E \times E \rightarrow E$ , определенные формулами

$$(P \times Q)(x) = (P(x), Q(x)); \quad \pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2.$$

Декартовы произведения  $E \times E$  и  $F \times F$  рассматриваются, как обычно, с покомпонентными операциями и порядком. Как видно, имеет место представление  $R = p\pi(P \times Q) - q\pi(P \times Q)$ .

Это соотношение не дает нам требуемого представления в виде разности сублинейных операторов, так как  $p\pi$  и  $q\pi$  не являются возрастающими операторами. Следовательно, нужно последние заменить на возрастающие операторы  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  так, чтобы сохранить представление  $R = \tilde{p}(P \times Q) - \tilde{q}(P \times Q)$ . Сначала заметим, что сублинейный оператор  $r$  из предпорядоченного векторного пространства  $Z$  в  $F$  будет возрастающим в том и только в том случае, если  $r(z) \leq 0$  при  $z \leq 0$ . В самом деле, последнее условие, очевидно, необходимо. Если же оно выполнено, то всякий оператор  $T \in \partial r$  положителен, так как  $-Tz \leq p(-z) \leq 0$  для  $z \in Z^+$ , см. [7; 2.1.1 (2)].

Пусть теперь регулярные операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\sim(E, F)$  таковы, что для каждого из операторов  $p$  и  $q$  выполнено условие 1.1 (2). Тогда для  $e_1, e_2 \in E^+$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} p(e_2 - e_1) &\leq p(e_2) + p(-e_1) \leq \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1), \\ q(e_2 - e_1) &\leq q(e_2) + q(-e_1) \leq \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1). \end{aligned}$$

Эти неравенства можно переписать в виде

$$p\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leq 0, \quad q\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leq 0,$$

где оператор  $\Lambda : E \times E \rightarrow F$  определяется формулой  $\Lambda(a_1, a_2) := \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$  ( $a_1, a_2 \in E$ ). Последние соотношения показывают, что сублинейные операторы  $\tilde{p} = p\pi - \Lambda$  и  $\tilde{q} = q\pi - \Lambda$  возрастающие. Кроме того, очевидным образом выполняется равенство  $R = \tilde{p}(P \times Q) - \tilde{q}(P \times Q)$ . ▸

## 2. Дифференцируемость по Адамару

**2.1.** Пусть  $E$  и  $F$  — некоторые  $K$ -пространства. Рассмотрим отображение  $g : E \rightarrow F$ , дифференцируемое по направлениям в точке  $e_0 \in \text{core}(\text{dom } g)$ . Возьмем направление  $u \in E$  и элемент  $d \in F$ . Предположим, что для любой последовательности  $(e_n) \subset E$ ,  $e_n \downarrow 0$  имеет место соотношение

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{0 < \alpha < 1/m, |u' - u| \leq e_m} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - d \right| = 0.$$

Тогда  $d$  называют *производной Адамара  $g$  в точке  $e_0$  по направлению  $u$*  и обозначают  $g'(e_0)u := d$ . Такое обозначение оправдано тем очевидным наблюдением, что если существует производная Адамара, то существует и производная Дини (в той же точке по

тому же направлению) и их значения совпадают. Таким образом, производную Адамара  $g$  в точке  $e_0$  по направлению  $u$  можно определить формулами

$$g'(e_0)u := \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{0 < \alpha < 1/m, \\ |u' - u| \leq e_m}} \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{0 < \alpha < 1/m, \\ |u' - u| \leq e_m}} \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha}.$$

Если производная Адамара  $g'(e_0)u$  существует для каждого направления  $u \in E$ , то говорят, что отображение  $g$  дифференцируемо по Адамару в точке  $e_0$ .

Определение производной Адамара упрощается, если  $F$  — регулярное  $K$ -пространство. Напомним, что  $K$ -пространство  $F$  называют *регулярным*, если для любой последовательности вложенных подмножеств  $F \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  таких, что  $a = \inf_n \sup(A_n)$ , существуют конечные подмножества  $A'_n \subset A_n$ , для которых  $o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(A'_n) = a$ . Можно показать, что  $K$ -пространство  $F$  будет регулярным, если оно удовлетворяет двум требованиям: 1)  $F$  имеет *счетный тип*, т. е. любое подмножество, состоящее из попарно дизъюнктивных множеств, не более чем счетно; 2) в  $F$  выполняется *принцип диагонали*, т. е. для любой двойной последовательности  $(e_{n,k}) \subset F$ , имеющей пределы  $e_n := o\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} e_{n,k}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и  $e := o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$ , существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $(k_n)$  такая, что  $e = o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e_{n,k_n}$ . (подробности см., например, в [8]).

**2.2.** Пусть  $F$  — регулярное  $K$ -пространство. Элемент  $d \in F$  будет производной Адамара отображения  $g : E \rightarrow F$  в точке  $e_0 \in \text{core}(\text{dom } g)$  по направлению  $u \in E$  в том и только в том случае, если для любых последовательностей  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$  и  $(u_n) \subset E$  таких, что  $\alpha_n \downarrow 0$  и  $u_n \xrightarrow{(o)} u$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} d &= o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

◁ Необходимость очевидна и верна даже без предположения о регулярности  $F$ . Докажем достаточность. Предположим, что для  $d$  выполняется указанное в формулировке условие. Возьмем последовательность  $(e_n) \subset E$ ,  $e_n \downarrow 0$ , и обозначим

$$c_m := \sup_{0 < \alpha < 1/m, |u' - u| \leq e_m} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - d \right|.$$

Нужно доказать, что  $c := \inf_m c_m = 0$ . В силу регулярности  $F$  для каждого  $m \in \mathbb{N}$  существуют конечные подмножества  $\{\alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,l(m)}\} \subset (0, 1/m)$  и  $\{u_{m,1}, \dots, u_{m,l(m)}\} \subset [u - e_m, u + e_m]$  такие, что

$$c'_m := \sup_{0 \leq l \leq l(m)} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{m,l} u_{m,l}) - g(e_0)}{\alpha_{m,l}} - d \right| \xrightarrow{(o)} c.$$

Построим новую последовательность  $(u_n) \subset E$ , занумеровав подряд сначала группу  $\{u_{1,1}, \dots, u_{1,l(1)}\}$ , затем  $\{u_{2,1}, \dots, u_{2,l(2)}\}$  и т. д. Точнее, полагаем  $u_n := u_{m,k}$  при  $n = l(m-1) + k$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq l(m)$  и  $l(0) := 0$ . Очевидно, что последовательность  $(u_n)$   $o$ -сходится к  $u$ . Прделаав то же самое с последовательностью конечных множеств  $(\{\alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,l(m)}\})_{m \in \mathbb{N}}$ , получим сходящуюся к нулю числовую последовательность  $(\alpha_n)$ . Если при этом  $(\alpha_n)$  не является убывающей, то заменим  $\alpha_n$  на  $\sup_{k \geq n} \alpha_k$ .

Итак,  $\alpha_n \downarrow 0$  и  $u_n \xrightarrow{(o)} u$ , поэтому в соответствии с нашим предположением

$$0 = o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} - d \right| = o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = c. \triangleright$$

**2.3.** В рассматриваемой ситуации дифференцируемость по Адамару отображения  $g$  не гарантирует непрерывности производной по направлениям  $g'(e_0)(\cdot)$  в отличие от случая, когда  $E = \mathbb{R}^n$  и  $F = \mathbb{R}$  [4]. Рассмотрим два случая, когда дифференцируемое по Адамару отображение имеет производную по направлениям, непрерывную в следующем смысле. Отображение  $\varphi : E \rightarrow F$  назовем *то-непрерывным* в точке  $u_0 \in E$ , если для любой последовательности  $(e_n) \subset E$ ,  $e_n \downarrow 0$  выполняется

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{|u - u_0| \leq e_n} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| = 0.$$

Из соображений, сходных с 2.2 можно получить, что если  $F$  — регулярное  $K$ -пространство, то *то-непрерывность* означает секвенциальную *о-непрерывность*. Напомним, что множество  $U \subset E$  называют *нормальным*, если для любых  $u_1, u_2 \in U$ ,  $e \in E$  из  $u_1 \leq e \leq u_2$  следует  $e \in U$ .

Пусть отображение  $g : E \rightarrow F$  дифференцируемо по Дини в точке  $e_0 \in \text{core}(\text{dom } g)$ . Предположим, что существуют нормальное множество  $U \subset E$  и *то-непрерывный* сублинейный оператор  $p : E \rightarrow F$  такие, что  $e_0 \in \text{core}(U)$  и

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq p(u_1 - u_2) \quad (u_1, u_2 \in U).$$

Тогда  $g$  дифференцируемо по Адамару в точке  $e_0$  и производная по направлениям  $g'(e_0)(\cdot)$  *то-непрерывна*.

◁ Возьмем направление  $u \in E$ , последовательности  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$  и  $(e_n) \subset E$ , для которых  $\alpha_n \downarrow 0$  и  $e_n \downarrow 0$ . Легко видеть справедливость соотношений

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \alpha < 1/n, |u' - u| \leq e_n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| \\ & \leq \sup_{0 < \alpha < 1/n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \sup_{0 < \alpha < 1/n, |u' - u| \leq e_n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0 + \alpha u)}{\alpha} \right| \\ & \leq \sup_{0 < \alpha < 1/n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \sup_{|u' - u| \leq e_n} p(u' - u) \xrightarrow{(o)} 0, \end{aligned}$$

из которых видна дифференцируемость по Адамару отображения  $g$  в точке  $e_0$  по направлению  $u$ .

По условию  $e_0 \in \text{core}(U)$ , стало быть, существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $e_0 + \varepsilon(u \pm e_1) \in U$  для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Если  $|u' - u| \leq e_n$ , то с учетом нормальности  $U$  для тех же  $\varepsilon$  можем написать  $e_0 + \varepsilon u' \in e_0 + \varepsilon[u - e_n, u + e_n] \subset e_0 + [\varepsilon(u - e_1), \varepsilon(u + e_1)] \subset U$ . Итак, если  $0 < \alpha < 1/m < \varepsilon_0$  и  $|u' - u| \leq e_n$ , то  $e_0 + \alpha u' \in U$  и справедливы оценки, показывающие *то-непрерывность*  $g'(e_0)$ :

$$\begin{aligned} |g'(e_0)u' - g'(e_0)u| & \leq \sup_{0 < \alpha < 1/m} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} \right| \\ & \leq p(u' - u) \leq \sup_{|u' - u| \leq e_n} p(u' - u) \xrightarrow{(o)} 0. \triangleright \end{aligned}$$

**2.4.** Пусть  $K$ -пространство  $F$  регулярно. Если отображение  $g : E \rightarrow F$  дифференцируемо по Адамару в точке  $e_0 \in \text{core}(\text{dom } g)$ , то производная по направлениям  $g'(e_0)(\cdot)$  секвенциально  $o$ -непрерывна.

◁ Воспользуемся установленным в 2.2 вариантом дифференцируемости по Адамару в случае регулярного  $K$ -пространства  $F$ . Возьмем последовательности  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$  и  $(u_n) \subset E$ , для которых  $\alpha_n \downarrow 0$  и  $u_n \xrightarrow{(o)} u$ . Положим

$$d_{k,n} := \sup_{m \geq n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_m u_k) - g(e_0)}{\alpha_m} - g'(e_0)u_k \right|.$$

По определению производной по направлениям  $o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} d_{k,n} = 0$  для каждого фиксированного  $k \in \mathbb{N}$ . В силу предположения о регулярности  $F$  существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $(n_k)$  такая, что  $o\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} d_{k,n_k} = 0$ . Отсюда выводим

$$\begin{aligned} |g'(e_0)u_k - g'(e_0)u| &\leq \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{n_k} u_k) - g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u_k \right| \\ &\quad + \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{n_k} u_k) - g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u \right| \leq d_{k,n_k} + w_k \xrightarrow{(o)} 0, \end{aligned}$$

где  $w_k := \sup_{m \geq k} |\alpha_{n_m}^{-1}(g(e_0 + \alpha_{n_m} u_m) - g(e_0)) - g'(e_0)u| \xrightarrow{(o)} 0$  по определению производной Адамара. ▷

### 3. Квазидифференциал композиции

Квазидифференцируемость композиции (теоремы 3.1 и 3.2) отображений действующих из банахова пространства в банахово  $K$ -пространство установлена в работе В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [5]. Ниже этот результат обобщен на отображения действующие в произвольные  $K$ -пространства.

Квазидифференцируемость супремума и инфимума получена как следствие теоремы о композиции, независимое доказательство этого факта имеется в [6]. Скалярный вариант теоремы 3.5 имеется, например, в [3, 4].

**3.1. Теорема.** Пусть  $X$  — векторное пространство,  $E, F$  —  $K$ -пространства. Пусть отображение  $f : X \rightarrow E$  дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f)$ , а отображение  $g : E \rightarrow F$  дифференцируемо по Адамару в точке  $f(x_0) \in \text{core}(\text{dom } g)$ , причем  $g'(f(x_0))(\cdot)$  —  $to$ -непрерывное отображение. Тогда отображение  $g \circ f$  дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

◁ Возьмем произвольное направление  $h \in X$  и для  $\alpha > 0$  обозначим

$$\begin{aligned} v(\alpha, h) &:= \alpha^{-1}(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)h), \\ w(\alpha, u) &:= \alpha^{-1}(g(f(x_0) + \alpha u) - g(f(x_0)) - \alpha g'(f(x_0))u). \end{aligned}$$

Так как отображение  $f$  дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$ , то  $o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} v(\alpha, h) = 0$  и, значит,  $u(\alpha, h) := f'(x_0)h + v(\alpha, h) \xrightarrow{(o)} f'(x_0)h$  при  $\alpha \downarrow 0$ . Последнее

означает, что  $e_n := \sup_{0 < \alpha < 1/n} |u(\alpha, h) - f'(x_0)h| \downarrow 0$ . Используя введенные обозначения можем написать

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + \alpha h) &= g(f(x_0 + \alpha h)) = g(f(x_0) + \alpha f'(x_0)h + \alpha v(\alpha, h)) \\ &= g(f(x_0) + \alpha u(\alpha, h)) = g(f(x_0)) + \alpha g'(f(x_0))u(\alpha, h) + \alpha w(\alpha, u(\alpha, h)). \end{aligned}$$

Учитывая только что установленное соотношение,  $mo$ -непрерывность  $g'(e_0)(\cdot)$  и определение дифференцируемости по Адамару, выводим

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < \alpha < 1/n} \left| \frac{(g \circ f)(x_0 + \alpha h) - (g \circ f)(x_0)}{\alpha} - g'(f(x_0))(f'(x_0)h) \right| \\ &\leq \sup_{0 < \alpha < 1/n} \left( |g'(f(x_0))u(\alpha, h) - g'(f(x_0))(f'(x_0)h)| + |w(\alpha, u(\alpha, h))| \right) \\ &\leq \sup_{|u - f'(x_0)h| \leq e_n} |g'(f(x_0))u - g'(f(x_0))(f'(x_0)h)| + \sup_{\substack{0 < \alpha < 1/n, \\ |u - f'(x_0)h| \leq e_n}} |w(\alpha, u)| \xrightarrow{(o)} 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование производной  $(g \circ f)(x_0)(h)$  и справедливость равенства  $(g \circ f)(x_0)(h) = g'(f(x_0))(f'(x_0)(h))$ .  $\triangleright$

**3.2. Теорема.** Пусть  $X$  — векторное пространство,  $E$  и  $F$  —  $K$ -пространства. Пусть отображение  $f : X \rightarrow E$  квазидифференцируемо в точке  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f)$ , а отображение  $g : E \rightarrow F$  квазидифференцируемо и одновременно дифференцируемо по Адамару в точке  $e_0 := f(x_0) \in \text{core}(\text{dom } g)$ , причем производная  $g'(e_0)(\cdot)$   $mo$ -непрерывна. Предположим, сверх того, что квазидифференциал  $\mathcal{D}g(e_0)$  определяется парой порядково ограниченных в  $L^\sim(E, F)$  опорных множеств  $\underline{\partial}g(e_0)$  и  $\overline{\partial}g(e_0)$ . Тогда отображение  $g \circ f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ . Если  $\underline{\partial}g(e_0) \cup \overline{\partial}g(e_0) \subset [\Lambda_1, \Lambda_2]$  для некоторых  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\sim(E, F)$ , то квазидифференциал  $\mathcal{D}(g \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(g \circ f)(x_0), \overline{\partial}(g \circ f)(x_0)]$  может быть вычислен по следующим формулам:

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \bigcup_{C \in \underline{\partial}g(e_0)} \partial(P_C), \quad \overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \bigcup_{C \in \overline{\partial}g(e_0)} \partial(P_C),$$

где

$$P_C(x_0) := (C - \Lambda_1) \sup_{S \in \underline{\partial}f(x_0)} S(x_0) + (\Lambda_2 - C) \sup_{T \in \overline{\partial}f(x_0)} T(x_0).$$

$\triangleleft$  Согласно 1.2 и теореме 3.1 отображение  $g \circ f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и справедливо равенство

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) = (p - q) \circ (P - Q),$$

где операторы  $P, Q \in \text{Sbl}(X, E)$  и  $p, q \in \text{Sbl}(E, F)$  удовлетворяют соотношениям

$$\partial p = \underline{\partial}g(e_0), \quad \partial q = \overline{\partial}g(e_0), \quad \partial P = \underline{\partial}f(x_0), \quad \partial Q = \overline{\partial}f(x_0),$$

а операторы  $p$  и  $q$  можно выбрать еще и мажорируемыми. Так же, как и в 1.2, положим  $\Lambda := (\Lambda_1, -\Lambda_2)$  ( $\Lambda : (a_1, a_2) \mapsto \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$ ),  $\tilde{p} = p\pi - \Lambda$ ,  $\tilde{q} = q\pi - \Lambda$ ,  $\pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2$ . В соответствии с 1.2  $(g \circ f)'(x_0) = \tilde{p}(P \times Q) - \tilde{q}(P \times Q)$ , следовательно,  $\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial p_1$  и  $\overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial q_1$ , где  $p_1 := \tilde{p}(P \times Q)$  и  $q_1 := \tilde{q}(P \times Q)$ . Здесь как и в 1.2 ( $P \times$

$Q)(x) = (P(x), Q(x))$ . Так как  $\tilde{p}$  — возрастающий сублинейный оператор, то справедливо равенство (см. [7; 2.1.6 (3)])

$$\partial p_1 = \bigcup_{S \in \partial \tilde{p}} \underline{\partial}(S(P \times Q)).$$

Применим теперь формулу [7; 1.4.14 (4)]:

$$\partial \tilde{p} = \partial(p\pi - \Lambda) = \{(C \circ \pi - \Lambda) : C \in \partial p\}.$$

Таким образом, справедливо представление

$$\partial p_1 = \bigcup_{C \in \partial p} \partial((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q).$$

Аналогично устанавливается представление

$$\partial q_1 = \bigcup_{C \in \partial q} \partial((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q).$$

Остается обозначить

$$P_C(x_0) := (C - \Lambda_1) \sup_{S \in \underline{\partial} f(x_0)} S(x_0) + (\Lambda_2 - C) \sup_{T \in \overline{\partial} f(x_0)} T(x_0). \triangleright$$

**3.3.** Пусть отображения  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow E$  дифференцируемы по направлениям в точке  $x_0$ . Тогда отображение  $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$  также дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f'_i(x_0)h \right\},$$

где

$$\Gamma_n(x_0) := \Gamma_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_k \in \text{Orth}^+(E), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x_0) = f(x_0) \right\}.$$

$\triangleleft$  Конечнопорожденный канонический сублинейный оператор  $\varepsilon_n : E^n \rightarrow E$ , очевидно,  $mo$ -непрерывен и удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_n(u) - \varepsilon_n(u')| \leq p(u - u') \quad (u, u' \in E^n),$$

где  $p(u) := \varepsilon_n|u|$  (см. [7; 2.1.1]). В соответствии с 2.3  $\varepsilon_n$  дифференцируем по Адамару в любой точке, а его производная по направлениям  $mo$ -непрерывна. Для  $x \in X$  положим  $\varphi(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , считая  $\varphi(x) = +\infty$ , если  $f_k(x) = +\infty$  хотябы для одного  $k$ . Ясно, что полученное отображение  $\varphi : X \rightarrow (E^n)^+$  дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и  $\varphi'(x_0)h = (f'_1(x_0)h, \dots, f'_n(x_0)h)$  для всех  $h \in X$ . Таким образом, к композиции  $\varepsilon_n \circ \varphi$  применима теорема 3.1. Так как  $f = \varepsilon_n \circ \varphi$ , то получим формулу

$$f'(x_0)h = \varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ \varphi'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Остается заметить, что  $\partial(\varepsilon'_n(\varphi(x_0))) = \Gamma_n(x_0)$ , следовательно,

$$\varepsilon'_n(\varphi(x_0))u = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad (u = (e_1, \dots, e_n) \in E^n). \triangleright$$

**3.4.** Пусть отображения  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow E$  дифференцируемы по направлениям в точке  $x_0$ . Тогда отображение  $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$  также дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$g'(x_0)h = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f'_i(x_0)h \right\},$$

где

$$\Delta_n(x_0) := \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_k \in \text{Orth}^+(E), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x_0) = g(x_0) \right\}.$$

$\triangleleft$  Доказательство проводится так же, как и в 3.3, но с той разницей, что формула дифференцирования по направлениям из 3.1 применяется к композиции  $\psi \circ \varphi$ , где  $\psi(u) := -\varepsilon_n(-u) = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  ( $u = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ ).  $\triangleright$

**3.5. Теорема.** Пусть отображения  $f_1, \dots, f_m : X \rightarrow E$  квазидифференцируемы в точке  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f)$ . Положим  $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$  и  $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ . Тогда отображения  $f$  и  $g$  квазидифференцируемы в точке  $x_0$  и для квазидифференциалов  $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \bar{\partial}f(x_0)]$  и  $\mathcal{D}g(x_0) = [\underline{\partial}g(x_0), \bar{\partial}g(x_0)]$  имеют место представления

$$\underline{\partial}f(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \underline{\partial}f_k(x_0) + \sum_{l \neq k} \bar{\partial}f_l(x_0) \right), \quad \bar{\partial}f(x_0) = \sum_{k=1}^n \bar{\partial}f_k(x_0), \\ \underline{\partial}g(x_0) = \sum_{k=1}^n \underline{\partial}f_k(x_0), \quad \bar{\partial}g(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0)} \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \bar{\partial}f_k(x_0) + \sum_{l \neq k} \underline{\partial}f_l(x_0) \right).$$

$\triangleleft$  Ограничимся доказательством для отображения  $f$ ; отображение  $g$  рассматривается аналогично. Из предложения 3.3 следует дифференцируемость по направлениям отображения  $f$  в точке  $x_0$ , причем

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f'_i(x_0)h \right\} \quad (h \in X).$$

В силу квазидифференцируемости отображений  $f_i$  в точке  $x_0$  имеют место представления  $f'_k(x_0)h = p_k(h) - q_k(h)$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $h \in X$ ), где  $p_k, q_k$  — сублинейные операторы. Введем следующие обозначения:

$$Q(h) := \sum_{k=1}^n q_k(h), \quad p'_k(h) := p_k(h) + \sum_{l \neq k} q_l(h), \quad P(h) := (p'_1(h), \dots, p'_n(h)) \in E^n \quad (h \in X).$$

Как видно,  $P : X \rightarrow E^n$  и  $Q : X \rightarrow E$  — сублинейные операторы. Учитывая введенные обозначения, напомним следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0)h &= \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i(h) - q_i(h)) \right\} \\
 &= \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i(h) - q_i(h)) \right\} + \sum_{i=1}^n q_i(h) - Q(h) \\
 &= \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i p_i(h) - \alpha_i q_i(h) + q_i(h)) \right\} - Q(h) \\
 &= \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i p_i(h) + \sum_{j \neq i} \alpha_j q_j(h) \right) \right\} - Q(h) \\
 &= \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i p'_i(h) - Q(h) = \varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ P(h) - Q(h),
 \end{aligned}$$

где  $\varphi(x_0) := (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$ . Итак,  $f'(x_0) = \varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ P - Q$ , следовательно, отображение  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ , причем  $\underline{\partial}f(x_0) = \partial(\varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ P)$  и  $\overline{\partial}f(x_0) = \partial Q$ . Остается вычислить соответствующие субдифференциалы  $\partial(\varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ P)$  и  $\partial Q$ , что несложно сделать привлекая формулы 2.1.6 (3) и 1.4.12 (1) из [7]:

$$\begin{aligned}
 \partial(\varepsilon'_n(\varphi(x_0)) \circ P) &= \bigcup_{A \in \varepsilon'_n(\varphi(x_0))} \partial(A \circ P) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \partial p_i + \sum_{j \neq i} \partial q_j \right), \\
 \partial Q &= \partial \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \partial q_i.
 \end{aligned}$$

Полученные соотношения совпадают с требуемыми с точностью до обозначений.  $\triangleright$

#### 4. Дезинтегрирование квазидифференциалов

В текущем параграфе техника дезинтегрирования применяется к квазидифференциалам. Устанавливается, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» исчисления — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов.

**4.1. Теорема.** Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и, сверх того, общая нижняя граница  $\Lambda_1$  и общая верхняя граница  $\Lambda_2$  множеств  $\underline{\partial}g(e_0)$  и  $\overline{\partial}g(e_0)$  входят в полосу, порожденную оператором Магарам. Тогда квазидифференциал  $\mathcal{D}\varphi(x_0) = [\underline{\partial}\varphi(x_0), \overline{\partial}\varphi(x_0)]$  может быть вычислен по формулам

$$\begin{aligned}
 \underline{\partial}(g \circ f)(x_0) &= (\underline{\partial}g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial}f(x_0) \times \overline{\partial}f(x_0)), \\
 \overline{\partial}(g \circ f)(x_0) &= (\overline{\partial}g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial}f(x_0) \times \overline{\partial}f(x_0)).
 \end{aligned}$$

$\triangleleft$  В 3.2 было установлено представление  $(g \circ f)'(x_0) = \tilde{p} \circ (P \times Q) - \tilde{q} \circ (P \times Q)$ . Отсюда видно, что если  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  — сублинейные операторы Магарам, то в силу теоремы 4.5.2 из [7] имеют место формулы

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial \tilde{p} \circ \partial(P \times Q) - \partial \tilde{q} \circ \partial(P \times Q) = \partial \tilde{p} \circ (\partial P \times \partial Q) - \partial \tilde{q} \circ (\partial P \times \partial Q).$$

Вспомним, что  $\tilde{p} = p \circ \pi - \Lambda$  и  $\tilde{q} = q \circ \pi - \Lambda$ , где  $\Lambda((a_1, a_2)) = \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$  и  $\pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2$ . Поэтому, учитывая линейность  $\pi : E^2 \rightarrow E$  и  $\Lambda : E^2 \rightarrow F$  и привлекая формулу [7; 1.4.14 (4)], получим  $\partial\tilde{p} = (\partial p) \circ \pi - \Lambda$  и  $\partial\tilde{q} = (\partial q) \circ \pi - \Lambda$ . Тем самым, приходим к соотношениям

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\partial p \circ \pi - \Lambda) \circ (\partial P \times \partial T), \quad \overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\partial q \circ \pi - \Lambda) \circ (\partial P \times \partial T),$$

эквивалентным требуемым. Итак, остается показать, что  $\tilde{p}$  — оператор Магарам, так как магарамовость оператора  $\tilde{q}$  устанавливается точно так же. Но согласно теореме [7; 4.4.7] нужно лишь показать, что опорное множество  $\partial\tilde{p}$  состоит из операторов Магарам.

В силу наших предположений  $S_0 := |\Lambda_1| + |\Lambda_2|$  — оператор Магарам. Так как  $\partial p \subset [-S_0, S_0]$ , то в силу теоремы [7; 4.4.7]  $p$  — также оператор Магарам. Рассмотрим оператор  $\tilde{P} = P\pi - (\Lambda_1, -\Lambda_2)$ . Так как  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  операторы Магарам, то  $P$  — сублинейный оператор Магарам.

Субдифференциал  $\partial\tilde{p}$  в более подробной записи имеет вид

$$\partial\tilde{p} = \{\mathcal{T} := (T_1, T_2) \in L^+(E \times E \rightarrow E) : \mathcal{T} = S \circ \pi - (\Lambda_1, -\Lambda_2), S \in \partial p\},$$

причем  $\mathcal{T}(e_1, e_2) = T(e_1) + T(e_2)$ . Отсюда видно, что  $T_1 = S - \Lambda_1$  и  $T_2 = \Lambda_2 - S$ . Таким образом,

$$|T_i| \leq |S| + |\Lambda_i| \leq 2S_0 \quad (i = 1, 2),$$

и, следовательно,  $T_1$  и  $T_2$  — операторы Магарам.

Возьмем теперь элементы  $d \in F$  и  $e_1, e_2 \in E^+$  такие, что  $0 \leq d \leq \mathcal{T}(e_1, e_2) = T_1 e_1 + T_2 e_2$ . Тогда  $d = d_1 + d_2$  для некоторых  $0 \leq d_i \leq T_i e_i$  ( $i = 1, 2$ ). Так как  $T_i$  — операторы Магарам, то существуют  $e'_i \in E$  такие, что  $T_i(e'_i) = d_i$  и, следовательно,  $\mathcal{T}(e'_1, e'_2) = d$ .  $\triangleright$

**4.2.** Для дальнейшего необходимо придать смысл выражениям вида  $\sum_{\xi} Df_{\xi}(x_0)$  в том случае, если  $(f_{\xi})$  — бесконечное семейство квазидифференцируемых в точке  $x_0$  отображений. Воспользуемся тем, что оператор суммирования является оператором Магарам на  $K$ -пространстве  $l_{\infty}(A, E)$  (см. [7; 4.4.2 (3)]). Пусть, как обычно,  $X$  — векторное пространства, а  $E$  и  $F$  — некоторые  $K$ -пространства.

(1) Возьмем такой регулярный оператор  $T : E \rightarrow F$ , что  $S := |T|$  — оператор Магарам. Обозначим символом  $A_0$   $f$ -алгебру  $Z(F_T)$ , где  $F_T := T(E)^{dd}$ . Тогда  $[\text{CS}_c(X, E)]$  и  $[\text{CS}_c(X, F)]$  можно снабдить структурой решеточно упорядоченного  $A_0$ -модуля. Более того, существует единственное  $A_0$ -линейное регулярное отображение  $[h_T] : [\text{CS}_c(X, E)] \rightarrow [\text{CS}_c(X, F)]$ , для которого  $[h_T](\mathcal{U}, \{0\}) = [T^+ \circ \mathcal{U}, T^- \circ \mathcal{U}]$  при всех  $\mathcal{U} \in \text{CS}_c(X, E)$ .

$\triangleleft$  Пусть сначала оператор Магарам  $T = S$  положителен. Для опорного множества  $\mathcal{U} \in \text{CS}_c(X, E)$ ,  $\mathcal{U} = \partial p$ , множество  $T \circ \mathcal{U} := \{S \circ U : U \in \mathcal{U}\}$  также будет опорным, поскольку  $S \circ \mathcal{U} = S \circ \partial p = \partial(S \circ p)$  в силу [7; теорема 4.5.2]. Тем самым возникает отображение  $h := h_S : \text{CS}_c(X, E) \rightarrow \text{CS}_c(X, F)$ , действующее по правилу  $h_S(\mathcal{U}) = S \circ \mathcal{U}$ . Несомненно, что это отображение аддитивно. Кроме того, оно будет и  $A_0^+$ -однородно, где  $A_0 := Z(F_S)$ . В самом деле, согласно [7; 4.4.3 (2, 3)] существует кольцевой и решеточный изоморфизм  $h'$  из  $f$ -алгебры  $Z(F_S)$  на правильную подрешетку и подкольцо в  $Z(E_S)$  такой, что  $\pi \circ S = S \circ h(\pi)$  для всех  $\alpha \in Z(F_S)$ . Таким образом оператор  $S$  будет  $A_0$ -линейным, если рассматривать  $E$  и  $F$  с естественной структурой  $A_0$ -модуля. Так как  $A_0 \subset A := \text{Orth}(F)$ , то  $A$ -коническая решетка  $\text{CS}_c(X, F)$  будет также и  $A_0$ -конической решеткой. В то же время, структуру  $A_0$ -конической решетки в  $\text{CS}_c(X, E)$  можно определить, полагая  $\alpha\mathcal{U} := h'(\alpha)\mathcal{U}$  для всех  $\pi \in Z(F_S)$ . При этом  $h_S$  станет  $A_0$ -полулинейным отображением.

Можно построить  $A_0$ -модуль  $[\text{CS}_c(X, E)]_{A_0}$  и  $\text{Orth}(E)$ -модуль  $[\text{CS}_c(X, E)]$  так, что эти два модуля будут совпадать по запасу элементов, а модульные структуры согласованы, т. е. умножение на элементы  $A_0$  индуцируется умножением на элементы  $\text{Orth}(E)$  (см. [7; теорема 1.5.6]). То же самое справедливо и относительно  $A_0$ -конической решетки  $\text{CS}_c(X, F)$ . Согласно теореме [7; 1.5.6] существует единственное  $A_0$ -линейное отображение  $[h_S] : [\text{CS}_c(X, E)] \rightarrow [\text{CS}_c(X, F)]$ , для которого  $[h_S](\mathcal{U}, \{0\}) = [S \circ \mathcal{U}, \{0\}]$  при всех  $\mathcal{U} \in \text{CS}_c(X, E)$ .

Возьмем теперь регулярный оператор  $T : E \rightarrow F$  такой, что  $S := |T|$  — оператор Магарам. Вновь по теореме [7; 4.4.3] операторы  $T^+$  и  $T^-$  также будут  $A_0$ -линейными. В соответствии со сказанным выше существуют  $A_0$ -линейные положительные операторы  $[h_{T^+}], [h_{T^-}] : [\text{CS}_c(X, E)] \rightarrow [\text{CS}_c(X, F)]$ . Положив  $[h_T] := [h_{T^+}] - [h_{T^-}]$ , получим  $A_0$ -линейный регулярный оператор из  $[\text{CS}_c(X, E)]$  в  $[\text{CS}_c(X, F)]$ .  $\triangleright$

(2) Пусть  $T, S, A_0$  — те же, что и в (1). Тогда  $\text{QL}(X, E)$  и  $\text{QL}(X, F)$  можно снабдить структурой решеточно упорядоченного  $A_0$ -модуля. Более того, существует единственное  $A_0$ -линейное регулярное отображение  $[h^T] : \text{QL}(X, E) \rightarrow \text{QL}(X, F)$ , для которого  $[h^T](p) = T^+ \circ p - T^- \circ p$  при всех  $p \in \text{Sbl}(X, E)$ .

$\triangleleft$  Если  $T = S$ , то очевидно, что отображение  $[h^S] : \text{QL}(X, E) \rightarrow \text{QL}(X, F)$ , действующее по правилу  $l \mapsto S \circ l$ , является  $A_0$ -линейным и положительным. В общем случае полагаем  $[h^T] := [h^{T^+}] - [h^{T^-}]$ .  $\triangleright$

Оператор  $\mathcal{D}$ , действующий на  $\text{QL}(X, E)$  и  $\text{QL}(X, F)$  обозначим соответственно символами  $\mathcal{D}_E$  и  $\mathcal{D}_F$ .

(3) Пусть  $T : E \rightarrow F$  — регулярный оператор, причем  $|T|$  — оператор Магарам. Тогда

$$\mathcal{D}_F \circ [h^T] = [h_T] \circ \mathcal{D}_E.$$

$\triangleleft$  Возьмем квазилинейный оператор  $l := p - q$ , где  $p, q \in \text{Sbl}(X, E)$ . Тогда, используя (1), (2) и [7; 4.5.3], последовательно выводим:

$$\begin{aligned} \circ \mathcal{D}_E(l) &= [h_T](\partial p, \partial q) = [h_T](\partial p, \{0\}) - [h_T](\partial q, \{0\}) \\ &= [T^+ \circ \partial p, T^- \circ \partial p] - [T^+ \circ \partial q, T^- \circ \partial q] \\ &= [\partial(T^+ \circ p), \partial(T^- \circ p)] - [\partial(T^+ \circ q), \partial(T^- \circ q)] \\ &= \mathcal{D}_F(T^+ \circ p - T^- \circ p) - \mathcal{D}_F(T^+ \circ q - T^- \circ q) \\ &= \mathcal{D}_F(T^+(p - q)) - \mathcal{D}_F(T^-(p - q)) = \mathcal{D}_F \circ [h^T]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты и выразительности обозначений пишем  $\mathcal{D}$  вместо  $\mathcal{D}_E$  и  $\mathcal{D}_F$ , а также  $T \circ \mathcal{D}$  вместо  $[h_T] \circ \mathcal{D}_E$  и  $\mathcal{D} \circ T$  вместо  $\mathcal{D}_F \circ [h^T]$ .

**4.3. Теорема.** Пусть  $f : X \rightarrow E$  квазидифференцируемое в точке  $x_0$  отображение и  $T : E \rightarrow F$  регулярный порядково непрерывный оператор такой, что  $|T|$  — оператор Магарам. Тогда  $T \circ f$  также квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = T \circ \mathcal{D}f(x_0).$$

Иначе говоря, для квазидифференциала  $\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \bar{\partial}(T \circ f)(x_0)]$  имеют место представления

$$\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T^+ \circ \underline{\partial}f(x_0) + T^- \circ \bar{\partial}f(x_0), \quad \bar{\partial}(T \circ f)(x_0) = T^+ \circ \bar{\partial}f(x_0) + T^- \circ \underline{\partial}f(x_0).$$

$\triangleleft$  Из теоремы 3.1 немедленно следует справедливость формулы  $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$ ; требуемые при этом условия выполняются тривиальным образом, так как

$T$  линеен, регулярен и порядково непрерывен. По условию  $f'(x_0) \in \text{QL}(X, E)$ , а ввиду 4.2 (2)  $T \circ f'(x_0) \in \text{QL}(X, F)$ . таким образом, отображение  $T \circ f'$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ . Остается применить оператор  $\mathcal{D}$  к равенству  $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$  и воспользоваться предложением 4.2 (3).  $\triangleright$

(2) Стоит выделить частный случай формул квазидифференцирования из (1), когда  $T : E \rightarrow F$  — линейный оператор Магарам. В этом случае формулы для вычисления  $\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \bar{\partial}(T \circ f)(x_0)]$  упрощаются:

$$\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \underline{\partial}f(x_0), \quad \bar{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \bar{\partial}f(x_0).$$

**4.4.** Рассмотрим вопрос о квазидифференцируемости бесконечной суммы. Зафиксируем непустое множество  $A$ . Символом  $l_1(A, E)$ , как обычно, обозначим совокупность всех  $o$ -суммируемых семейств элементов  $E$ , индексированных посредством  $A$ . Возьмем семейство отображений  $f_\alpha : X \rightarrow E$  ( $\alpha \in A$ ) и пусть  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f_\alpha)$  для всех ( $\alpha \in A$ ). Будем говорить, что это семейство *равностепенно квазидифференцируемо* в точке  $x_0$  по направлению  $h \in X$ , если существует убывающая к нулю последовательность  $(c_n(\cdot)) \subset l_1(A, E)$  такая, что

$$\sup_{0 < t < 1/n} \left| \frac{f_\alpha(x_0 + th) - f_\alpha(x_0)}{t} \right| \leq c_n(\alpha)$$

для всех  $\alpha \in A$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

В следующей теореме выражение  $o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \mathcal{D}f_\alpha(x_0)$  следует понимать в соответствии с 4.2. Точнее, если

$$o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \mathcal{D}f_\alpha = \left[ o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \underline{\partial}f_\alpha(x_0), o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \bar{\partial}f_\alpha(x_0) \right],$$

причем  $o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$  — множество линейных операторов  $T \in L(X, E)$ , представимых в виде  $Tx = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} T_\alpha x$  ( $x \in X$ ), где  $T_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$  для всех  $\alpha \in A$ .

**Теорема.** Пусть  $X$  — векторное пространство,  $E$  — произвольное  $K$ -пространство,  $A$  — произвольное множество. Пусть  $f_\alpha : X \rightarrow E$  ( $\alpha \in A$ ) —  $o$ -суммируемое семейство отображений и определим отображение  $f : X \rightarrow E$  равенством

$$f(x) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \quad (x \in X).$$

Предположим, что  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f_\alpha)$  для всех  $\alpha \in A$  и семейство  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  равностепенно квазидифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$ . Если для любого  $\alpha \in A$  существуют  $p_\alpha, q_\alpha \in \text{Sbl}(X, E)$  такие, что  $f'_\alpha(x_0) = p_\alpha - q_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) и при этом  $(p_\alpha(h))_{\alpha \in A}, (q_\alpha(h))_{\alpha \in A} \in l_1(A, E)$ , то отображение  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и справедлива формула

$$\mathcal{D}f(x_0) = \mathcal{D}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in A} f_\alpha\right)(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \mathcal{D}f_\alpha(x_0).$$

Таким образом, если  $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \bar{\partial}f(x_0)]$ , то

$$\underline{\partial}f(x_0) = \underline{\partial}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x_0)\right) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \underline{\partial}f_\alpha(x_0), \quad \bar{\partial}f(x_0) = \bar{\partial}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x_0)\right) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \bar{\partial}f_\alpha(x_0).$$

◁ Рассмотрим оператор Магарам  $\Sigma$  из  $l_1(A, E)$  в  $E$ , определяемый формулой

$$\Sigma : (e_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto o\text{-}\sum_{\alpha \in A} e_\alpha.$$

Определим оператор  $\varphi : X \rightarrow l_1(A, E)$  равенством

$$\varphi(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}.$$

Ясно, что дифференцируемость  $\varphi$  по направлениям в точке  $x_0$  вытекает из предположения о равностепенной дифференцируемости по направлениям в силу следующей оценки:

$$\sup_{0 < t < 1/n} \left| \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} \right| \leq (c_n(\alpha))_{\alpha \in A} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

При этом производная по направлениям имеет вид

$$\varphi'(x_0)h = \left( f'_\alpha(x_0)h \right)_{\alpha \in A} = P(h) - Q(h),$$

где  $P : h \mapsto (p_\alpha(h))_{\alpha \in A}$  и  $Q : h \mapsto (q_\alpha(h))_{\alpha \in A}$ . Ввиду наших предположений последние соотношения корректно определяют сублинейные операторы  $P, Q : X \rightarrow l_1(A, E)$ , следовательно,  $\varphi$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ . Так как  $f := \Sigma \circ \varphi$ , то согласно 4.3 отображение  $f$  также квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и его квазидифференциал вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \underline{\partial}f(x_0) &= \underline{\partial}(\Sigma \circ F)(x_0) = \Sigma \circ \underline{\partial}F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \underline{\partial}f_\alpha(x_0), \\ \overline{\partial}f(x_0) &= \overline{\partial}(\Sigma \circ F)(x_0) = \Sigma \circ \overline{\partial}F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \overline{\partial}f_\alpha(x_0). \triangleright \end{aligned}$$

**4.5.** В заключение параграфа займемся условиями квазидифференцируемости интегрального оператора. Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — вероятностное пространство,  $X$  — сепарабельное банахово пространство, а  $E$  — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Рассмотрим семейство  $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$  отображений  $f_\omega : X \rightarrow E^*$  квазидифференцируемых в точке  $x_0 \in \text{core}(\text{dom } f_\omega)$ . Предположим, что при любом  $x$  из некоторого множества  $U \subset X$  отображение  $\omega \mapsto f_\omega(x)$  почти всюду принимает значения из  $E$  и интегрируемо по Бохнеру. Тогда можно определить отображение  $f : X \rightarrow E^*$ , полагая

$$f(x) := \int_{\Omega} f_\omega(x) d\mu(\omega)$$

при  $x \in U$  и  $f(x) = +\infty$  при  $x \notin U$ . Выясним при каких условиях отображение  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0 \in \text{core}(U)$ . Пусть  $f'_\omega(x_0)h$  производная  $f_\omega$  в точке  $x_0$  по направлению  $h$ . В силу квазидифференцируемости  $f_\omega$  справедливо представление

$$f'_\omega(x_0)h = p_\omega - q_\omega,$$

где  $p_\omega, q_\omega : X \rightarrow E$  — сублинейные операторы при любом  $\omega \in \Omega$ .

Семейство  $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$  назовем *равностепенно квазидифференцируемым* в точке  $x_0$  по направлению  $h \in X$ , если существует последовательность интегрируемых отображений

$(\psi_n)$ ,  $\psi : \Omega \rightarrow E$ , убывающая и  $o$ -сходящаяся к нулю почти всюду, для которой выполнена оценка

$$\sup_{0 < t < 1/n} \left| \frac{f_\omega(x_0 + th) - f_\omega(x_0)}{t} \right| \leq \psi_n(\omega)$$

для всех  $\omega \in \Omega$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема.** Пусть  $X$  — банахово пространство, а  $E$  — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Пусть  $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$  и  $f$  — те же, что и выше. Отображение  $\varphi : X \rightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)$  определим сопоставив  $x \in U$  класс эквивалентности интегрируемой вектор-функции  $\omega \mapsto f_\omega(x)$  и положив  $\varphi(x) = +\infty$  при  $x \notin U$ . Предположим, что семейство  $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$  равностепенно дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и для любого  $\omega \in \Omega$  производная по направлениям  $f'_\omega(x_0)$  допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов  $f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega$ , что отображения  $\omega \mapsto p_\omega(h)$  и  $\omega \mapsto q_\omega(h)$  интегрируемы по Бохнеру при всех  $h \in X$ . Тогда отображение  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и имеет место представление

$$\mathcal{D}f(x_0) = \int_{\Omega} \mathcal{D}\varphi(x_0) d\mu.$$

Точнее, квазидифференциал  $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \bar{\partial}f(x_0)]$  описывается следующим образом:

$$\underline{\partial}f(x_0) = \int_{\Omega} \underline{\partial}\varphi(x_0) d\mu, \quad \bar{\partial}f(x_0) = \int_{\Omega} \bar{\partial}\varphi(x_0) d\mu.$$

◁ При сделанных допущениях оператор  $I_\mu : L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E) \rightarrow E$ , определяемый интегралом Бохнера

$$I_\mu(u) := \int_{\Omega} u(\omega) d\mu(\omega) \quad (u \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)),$$

является линейным оператором Магарам (см. [7; 4.4.2 (5)]). Введем два новых оператора  $P, Q : X \rightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)$  посредством формул

$$P(h) : \omega \mapsto p_\omega(h), \quad Q(h) : \omega \mapsto q_\omega(h) \quad (h \in X).$$

Из условия равностепенной дифференцируемости по направлениям следует

$$\sup_{0 < t < 1/n} \left| \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} \right| \leq \psi_n \xrightarrow{(o)} 0,$$

откуда видно, что  $\varphi$  дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и при этом для любого  $h \in X$  производная по направлению  $\varphi'(x_0)h$  представляет собой отображение  $\omega \mapsto f'_\omega(x_0)h$ . Но это влечет справедливость представления  $\varphi'(x_0) = P - Q$ , означающего квазидифференцируемость отображения  $\varphi$  в точке  $x_0$ . Так как  $f = I_\mu \circ \varphi$ , то применима теорема 4.3 (1), в соответствии с которой  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$\mathcal{D}f(x_0) = I_\mu \circ \mathcal{D}\varphi(x_0) = I_\mu \circ [\partial P, \partial Q],$$

что и требовалось. ▷

**4.6.** В случае сепарабельного  $X$  установленную теорему удастся уточнить с помощью теоремы Штрассена. Если  $(\mathcal{U}_\omega)_{\omega \in \Omega}$  — семейство опорных множеств  $\mathcal{U}_\omega \in \text{CS}_c(X, E)$ , то

символом  $\int_{\Omega} \mathcal{U}_{\omega} d\mu(\omega)$  обозначаем множество всех линейных операторов  $T \in L(X, E)$ , представимых в виде

$$Tx = \int_{\Omega} T_{\omega}(x) d\mu(\omega) \quad (x \in X),$$

где  $(T_{\omega})_{\omega \in \Omega}$  — такое семейство линейных операторов из  $X$  в  $E$ , что  $T_{\omega} \in \mathcal{U}_{\omega}$  для почти всех  $\omega \in \Omega$  и для любого  $x \in X$  отображение  $\omega \mapsto T_{\omega}(x)$  интегрируемо по Бохнеру.

**Теорема.** Пусть  $(f_{\omega})_{\omega \in \Omega}$  и  $f$  — те же, что и выше. Предположим, что семейство  $(f_{\omega})$  равномерно дифференцируемо по направлениям в точке  $x_0$  и для любого  $\omega \in \Omega$  производная по направлениям  $f'_{\omega}(x_0)$  допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов  $f'_{\omega}(x_0) = p_{\omega} - q_{\omega}$ , что отображения  $\omega \mapsto p_{\omega}(h)$  и  $\omega \mapsto q_{\omega}(h)$  интегрируемы по Бохнеру при всех  $h \in X$ . Тогда отображение  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$  и имеет место представление

$$\mathcal{D}f(x_0) = \int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\omega}(x_0) d\mu(\omega).$$

Точнее, квазидифференциал  $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \bar{\partial}f(x_0)]$  описывается следующим образом:

$$\underline{\partial}f(x_0) = \int_{\Omega} \underline{\partial}f_{\omega}(x_0) d\mu(\omega), \quad \bar{\partial}f(x_0) = \int_{\Omega} \bar{\partial}f_{\omega}(x_0) d\mu(\omega).$$

◁ Так как выполнены все условия теоремы 3.6, то  $\mathcal{D}f(x_0) = I_{\mu} \circ (x_0) = [\partial P, \partial Q] = [\partial(I_{\mu} \circ P), \partial(I_{\mu} \circ Q)]$ . Остается привлечь теорему Штрассена о дезинтегрировании [7; 4.5.8]. ▷

## Литература

1. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М. Об одном обобщении понятия субдифференциала // В кн.: Тез. всес. конф. по динамическому управлению. Свердловск.—1979.—С. 79–84.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 250, № 1.—С. 21–25.
3. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука.—1981.—384 с.
4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука.—1990.—432 с.
5. Demjanov V. F., Rubinov A. M. On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14.—P. 3–21.
6. Басаева Е. К. Квазидифференциалы в  $K$ -пространствах // Владикавказ. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 3.—С. 14–30.
7. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
8. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.

*Статья поступила 7 сентября 2003 г.*

БАСАЕВА ЕЛЕНА КАЗБЕКОВНА  
г. Владикавказ, Институт прикладной математики  
и информатики ВНИЦ РАН  
E-mail: helen@alanianet.ru

КУСРАЕВ АНАТОЛИЙ ГЕОРГИЕВИЧ, д.ф.-м.н.  
г. Владикавказ, Институт прикладной математики  
и информатики ВНИЦ РАН  
E-mail: kusraev@alanianet.ru