УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 1 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 5–25 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 512

О КРАТНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ КАПЕЛЛИ

С.Ю. Антонов, А.В. Антонова

Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия

Аннотация

В работе рассмотрен класс многочленов типа Капелли в свободной ассоциативной алгебре $F\{Z\}$, где F – произвольное поле, Z – счетное множество, обобщающий конструкцию кратных многочленов Капелли. Приведены основные свойства введенных многочленов. В частности, указано их разложение через многочлены того же вида и установлены некоторые соотношения между их T-идеалами. Кроме того, установлена связь между двойными многочленами Капелли и квазимногочленами Капелли.

Ключевые слова: матричная алгебра, многочлен Капелли, полиномиальное тождество, свободная ассоциативная алгебра, симметрическая группа, стандартный многочлен, T-идеал

Введение

Пусть F – произвольное поле, $F\{X\}$ – свободная ассоциативная алгебра, порожденная счетным множеством $X = \{x_n\}_{n\in N}$. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{X\}$ называется T-идеалом, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{X\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Хорошо известно, что между T-идеалами алгебры $F\{X\}$ и многообразиями ассоциативных PI-алгебр существует взаимно однозначное соответствие.

Большое значение при изучении идеала тождеств многообразия алгебр имеют стандартный многочлен $S_n^-(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}$ и многочлены Капелли $K_{2n-1}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_{n-1}) = \sum\limits_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(1)}y_1x_{\pi(2)}\cdots y_{n-1}x_{\pi(n)}$, введенные Размысловым в [1] и обобщенные Ченгом [2] до двойных многочленов Капелли $C_{2n}(\bar{x},\bar{y})$. Дальнейшее развитие идей Ченга было продолжено в работах [3–7].

В настоящей статье максимально обобщена конструкция кратных многочленов Капелли, введенных в [4], установлены свойства этих многочленов и приведены некоторые соотношения между их T-идеалами. Кроме этого, указаны конкретные тождества, которые выполняются в алгебрах, T-идеалы которых содержат как кратные, так и классические многочлены Капелли, что особенно актуально в связи с нахождением базиса Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$. В частности, авторы нашли минимальную степень четных квазимногочленов Капелли, являющихся тождествами матричной алгебры $M_m(F)$, а значит, и нечетной компоненты $M_1^{(m,m)}(F)$ из Z_2-градуированной алгебры $M^{(m,m)}(F)$, что, в свою очередь, приводит к гипотезе дальнейшего «дробления» минимального тождества подпространства $M_1^{(m,m)}(F)$, найденного в [8].

1. Основные свойства многочленов Капелли типа $(k,n,s;e)$

Пусть $n>1$, k – произвольные натуральные числа, s, i, a – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0\le s\le k-1$, $0\le i\le k$, $0\le a\le k$, $I_k^a=\{a,a+1,\dots,k\}$, $e=\{e_1,\dots,e_i\}$, $(i>0)$, – какое-либо подмножество I_k^1, считаем, что $e_1<\dots<e_i$; при $i=0$ полагаем $e=\emptyset$; $\widehat{e}$ означает, что любые элементы с индексами из множества e, содержащиеся в выражениях, будут отсутствовать; $X=\bigcup\limits_{r=1}^{k}X^{(r)}$, где $X^{(1)}=\{x_j^{(1)}\}_{j\in N},\dots,X^{(k)}=\{x_j^{(k)}\}_{j\in N}$ – счетные попарно непересекающиеся множества, S_n – симметрическая группа степени n.

Определение 1. Многочлен $C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)})\in F\{X\}$ степени $kn-s$ называется многочленом Капелли типа $(k,n,s;e)$, или кратным многочленом Капелли, если он имеет вид

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)})=C_{kn-s,e}(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)};\dots;x_1^{(k-s)},\dots,x_n^{(k-s)};x_1^{(k-s+1)},\dots,$$
$$x_{n-1}^{(k-s+1)};\dots;x_1^{(k)},\dots,x_{n-1}^{(k)})=\sum_{\pi_1\in S_n}\cdots\sum_{\pi_{k-s}\in S_n}\sum_{\pi_{k-s+1}\in S_{n-1}}\cdots\sum_{\pi_k\in S_{n-1}}\operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_k)_{\hat{e}}\times$$
$$\times\left(\prod_{r=1}^{n-1}x_{\pi_1(r)}^{(1)}\cdots x_{\pi_k(r)}^{(k)}\right)x_{\pi_1(n)}^{(1)}\cdots x_{\pi_{k-s}(n)}^{(k-s)}.$$

Пусть $\varphi:I_n^1\to N$, $\psi:I_{n-1}^1\to N$ – произвольные отображения, r – любой элемент из I_{k-s}^1, m – какой-либо элемент из I_s^1, при $s>0$. Положим

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(r-1)},\varphi\bar{x}^{(r)},\bar{x}^{(r+1)},\dots,\bar{x}^{(k-s+m-1)},\psi\bar{x}^{(k-s+m)},\bar{x}^{(k-s+m+1)},\dots,\bar{x}^{(k)})=$$
$$=C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(r-1)},x_{\varphi(1)}^{(r)},\dots,x_{\varphi(n)}^{(r)},\bar{x}^{(r+1)},\dots,\bar{x}^{(k-s+m-1)},$$
$$x_{\psi(1)}^{(k-s+m)},\dots,x_{\psi(n-1)}^{(k-s+m)},\bar{x}^{(k-s+m+1)},\dots,\bar{x}^{(k)}).$$

Кроме того, пусть l – произвольное натуральное число, $B_1,\dots,B_l$ – какие-нибудь подмножества группы S_n, $B_{n,l}=(B_1,\dots,B_l)$, $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_l)$. По определению положим $\sum\limits_{\pi\in B_{n,l}}=\sum\limits_{\pi_1\in B_1}\cdots\sum\limits_{\pi_l\in B_l}$, в частности, если $B_1=\ldots=B_l=S_n$, то мы пишем $\sum\limits_{\pi\in S_{n,l}}=\sum\limits_{\pi_1\in S_n}\cdots\sum\limits_{\pi_l\in S_n}$. Наконец, будем считать, что $\operatorname{sgn}\pi=\operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_l)$, $\operatorname{sgn}\pi_{\hat{e}}=\operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_l)_{\hat{e}}$. Заметим, что при $l\le k$ и $e=I_k^1\setminus I_l^1$ справедливо равенство $\operatorname{sgn}\pi_{\hat{e}}=\operatorname{sgn}\pi$.

Предложение 1. *Многочлен $C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)})$ обладает следующими свойствами:*

1) *Если отображение $\varphi:I_n^1\to N$ не является инъективным, то*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\varphi\bar{x}^{(m)},\dots,\bar{x}^{(k)})=0$$

для любого $m\in I_{k-s}^1\setminus e$.
В случае, когда $\operatorname{char}F=0$, $e\ne\emptyset$, $a\in I_{k-s}^1\bigcap e$, справедливо неравенство

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\varphi\bar{x}^{(a)},\dots,\bar{x}^{(k)})\ne 0.$$

2) *Если отображение $\psi:I_{n-1}^1\to N$ не является инъективным, то*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\psi\bar{x}^{(k-s+a)},\dots,\bar{x}^{(k)})=0$$

для любого $a \in I_s^1$ *при* $s > 0$ *и* $k - s + a \notin e$.
В случае, когда $\mathrm{char}\, F = 0$, $e \neq \emptyset$, $a > k - s$ *и* $a \in e$, *справедливо неравенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \psi\bar{x}^{(a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) \neq 0.$$

3) *Для всякой подстановки* $\sigma \in S_n$ *и произвольного индекса* $m \in I_{k-s}^1 \setminus e$ *справедливо равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \sigma\bar{x}^{(m)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \mathrm{sgn}\, \sigma\, C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)});$$

при $e \neq \emptyset$ *и* $a \in I_{k-s}^1 \bigcap e$ *имеет место равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \sigma\bar{x}^{(a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)});$$

4) *Для всякой подстановки* $\tau \in S_{n-1}$ *и произвольного индекса* $a \in I_s^1$ $(s > 0)$, *для которого* $k - s + a \notin e$, *справедливо равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \tau\bar{x}^{(k-s+a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \mathrm{sgn}\, \tau\, C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)});$$

при $e \neq \emptyset$, $a > k - s$ *и* $a \in e$ *имеет место равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \tau\bar{x}^{(a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}).$$

Доказательство. 1) Для любого отображения φ справедливо равенство

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \varphi\bar{x}^{(m)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{\pi \in S_{n,k-s}} \sum_{\tau \in S_{n-1,s}} \mathrm{sgn}\, \pi_{\hat{e}}\, \mathrm{sgn}\, \tau_{\hat{e}} \times$$
$$\times \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(m-1)}_{\pi_{m-1}(r)} \cdot x^{(m)}_{\varphi(\pi_m(r))} x^{(m+1)}_{\pi_{m+1}(r)} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(r)} x^{(k-s+1)}_{\tau_{k-s+1}(r)} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) \times$$
$$\times\, x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(m-1)}_{\pi_{m-1}(n)} x^{(m)}_{\varphi(\pi_m(n))} x^{(m+1)}_{\pi_{m+1}(n)} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)}.$$

Допустим, что φ не инъективно, тогда существуют $p,\, j \in I_n^1$ такие, что $\varphi(p) = \varphi(j)$. Пусть π_m – произвольный элемент группы S_n. Тогда для некоторых $a,\, b \in I_n^1$ $\pi_m(a) = p$, $\pi_m(b) = j$. Совместно с π_m рассмотрим подстановку $\pi'_m \in S_n$, определяемую равенствами

$$\pi'_m(l) = \begin{cases} \pi_m(l), & \text{если } l \notin \{a, b\}; \\ j, & \text{если } l = a; \\ p, & \text{если } l = b. \end{cases}$$

Обозначим $\pi' = (\pi_1, \ldots, \pi_{m-1}, \pi'_m, \pi_{m+1}, \ldots, \pi_{k-s})$. Поскольку $\mathrm{sgn}\, \pi_{\hat{e}}\, \mathrm{sgn}\, \tau_{\hat{e}} = -\mathrm{sgn}\, \pi'_{\hat{e}}\, \mathrm{sgn}\, \tau_{\hat{e}}$, то

$$\mathrm{sgn}\, \pi_{\hat{e}}\, \mathrm{sgn}\, \tau_{\hat{e}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(m)}_{\varphi(\pi_m(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(m)}_{\varphi(\pi_m(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} +$$
$$+\mathrm{sgn}\, \pi'_{\hat{e}}\, \mathrm{sgn}\, \tau_{\hat{e}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(m)}_{\varphi(\pi'_m(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(m)}_{\varphi(\pi'_m(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} = 0.$$

Отсюда следует, что $C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \varphi\bar{x}^{(m)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = 0$.

Пусть теперь $\operatorname{char} F = 0$, $e \neq \emptyset$ и $a \in I^1_{k-s} \bigcap e$, тогда при тех же обозначениях имеем $\operatorname{sgn} \pi_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}} = \operatorname{sgn} \pi'_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}}$, и значит,

$$\operatorname{sgn} \pi_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(a)}_{\varphi(\pi_a(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(a)}_{\varphi(\pi_a(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} +$$
$$+ \operatorname{sgn} \pi'_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}} \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(a)}_{\varphi(\pi'_a(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(a)}_{\varphi(\pi'_a(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что $C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \varphi\bar{x}^{(a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) \neq 0$.

2) Доказывается так же, как и 1).

3) Полагая в утверждении 1) настоящего предложения $\varphi = \sigma$, имеем

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \sigma\bar{x}^{(m)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{\pi \in S_{n,k-s}} \sum_{\tau \in S_{n-1,s}} \operatorname{sgn} \pi_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}} \times$$
$$\times \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(m)}_{\sigma(\pi_m(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(m)}_{\sigma(\pi_m(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} =$$
$$= |\text{ полагаем } \pi_m = \sigma^{-1}\mu_m, \quad \pi' = (\pi_1, \ldots, \pi_{m-1}, \mu_m, \pi_{m+1}, \ldots, \pi_{k-s})| =$$
$$= \sum_{\pi' \in S_{n,k-s}} \sum_{\tau \in S_{n-1,s}} \operatorname{sgn} (\pi_1 \cdots \pi_{m-1} \sigma^{-1} \mu_m \pi_{m+1} \cdots \pi_{k-s})_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \tau_{\hat{e}} \times$$
$$\times \left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(m)}_{\sigma(\sigma^{-1}\mu_m(r))} \cdots x^{(k)}_{\tau_k(r)} \right) x^{(1)}_{\pi_1(n)} \cdots x^{(m)}_{\sigma(\sigma^{-1}\mu_m(n))} \cdots x^{(k-s)}_{\pi_{k-s}(n)} =$$
$$= \operatorname{sgn} \sigma \, C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}).$$

Проводя аналогичные рассуждения для индекса a, придем к равенству

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \sigma\bar{x}^{(a)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}).$$

4) Доказывается так же, как и 3). Предложение доказано. □

Пусть q – произвольное натуральное число такое, что $1 \leq q \leq n-1$, m – любой элемент множества I^1_{k-s};

$$t^{(1)} = \{t^{(1)}_1, \ldots, t^{(1)}_q\}, \ldots, t^{(m)} = \{t^{(m)}_1, \ldots, t^{(m)}_q\}$$

– произвольные подмножества I^1_n;

$$d^{(u)} = I^1_n \backslash t^{(u)} = \{d^{(u)}_1, \ldots, d^{(u)}_{n-q}\}, \quad u \in I^1_m,$$

$$l^{(m+1)} = \{l^{(m+1)}_1, \ldots, l^{(m+1)}_{q-1}\}, \ldots, l^{(k-s)} = \{l^{(k-s)}_1, \ldots, l^{(k-s)}_{q-1}\}, \quad m < k-s, \quad q > 1,$$

– какие-либо подмножества I^1_n;

$$h^{(v)} = I^1_n \backslash l^{(v)} = \{h^{(v)}_1, \ldots, h^{(v)}_{n-q+1}\}, \quad v \in I^{m+1}_{k-s},$$

$$b^{(k-s+1)} = \{b^{(k-s+1)}_1, \ldots, b^{(k-s+1)}_{q-1}\}, \ldots, b^{(k)} = \{b^{(k)}_1, \ldots, b^{(k)}_{q-1}\}, \quad q > 1,$$

– какие-нибудь подмножества I^1_{n-1};

$$f^{(a)} = I_{n-1} \backslash b^{(a)} = \{f^{(a)}_1, \ldots, f^{(a)}_{n-q}\}, \quad a \in I^{k-s+1}_k, \quad p = n - q.$$

Кроме этого, будем считать, что

$$t_1^{(u)} < \dots < t_q^{(u)}, \quad d_1^{(u)} < \dots < d_p^{(u)}, \quad u \in I_m^1,$$

$$l_1^{(v)} < \dots < l_{q-1}^{(v)}, \quad h_1^{(v)} < \dots < h_{p+1}^{(v)}, \quad v \in I_{k-s}^{m+1},$$

$$b_1^{(a)} < \dots < b_{q-1}^{(a)}, \quad f_1^{(a)} < \dots < f_p^{(a)}, \quad a \in I_k^{k-s+1}.$$

Далее, пусть

$$\bar t = (t^{(1)}, \dots, t^{(m)}), \quad \bar l = (l^{(m+1)}, \dots, l^{(k-s)}), \quad \bar b = (b^{(k-s+1)}, \dots, b^{(k)}),$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m), \quad \omega = (\omega_{m+1}, \dots, \omega_{k-s}), \quad \rho = (\rho_{k-s+1}, \dots, \rho_k),$$

где $\mu_1, \dots, \omega_{k-s} \in S_n$, $\rho_{k-s+1}, \dots, \rho_k \in S_{n-1}$,

$$\sum_{\bar t} = \sum_{t_1^{(1)} < \dots < t_q^{(1)}} \cdots \sum_{t_1^{(m)} < \dots < t_q^{(m)}}, \quad \sum_{\mu \bar t} = \sum_{\mu_1 \in S_n(t^{(1)})} \cdots \sum_{\mu_m \in S_n(t^{(m)})},$$

Здесь $S_n(t^{(1)}), \dots, S_n(t^{(m)})$ – заданные подмножества группы S_n. Аналогично определим суммы $\sum\limits_{\bar l}, \sum\limits_{\bar b}, \sum\limits_{\omega \bar l}, \sum\limits_{\rho \bar b}$.

Наконец, пусть $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_m)$, $\omega' = (\omega'_{m+1}, \dots, \omega'_{k-s})$, $\rho' = (\rho'_{k-s+1}, \dots, \rho'_k)$. По определению положим

$$\sum_{(\mu,\mu')} = \sum_{\mu_1 \in C_1} \sum_{\mu'_1 \in D_1} \sum_{\mu_2 \in C_2} \sum_{\mu'_2 \in D_2} \cdots \sum_{\mu_m \in C_m} \sum_{\mu'_m \in D_m},$$

где $C_1, D_1, \dots, C_m, D_m$ – заданные подмножества группы S_n. Аналогично определим суммы $\sum\limits_{(\omega,\omega')}, \sum\limits_{(\rho,\rho')}$.

Предложение 2. *Пусть $n > 2$, $1 < q \le n-1$, $m \in I_{k-s}^1$. Тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
C_{kn-s,e}(\bar x^{(1)}, \dots, \bar x^{(k)}) = \sum_{\bar t} \sum_{\bar l} \sum_{\bar b} \operatorname{sgn} \alpha_{\bar t, \hat e} \operatorname{sgn} \gamma_{\bar l, \hat e} \operatorname{sgn} \eta_{\bar b, \hat e} \times \\
\times C_{kq-(k-m),e}(\bar x^{(1)}_{\hat d^{(1)}}, \dots, \bar x^{(m)}_{\hat d^{(m)}}, \bar x^{(m+1)}_{\hat h^{(m+1)}}, \dots, \bar x^{(k-s)}_{\hat h^{(k-s)}}, \bar x^{(k-s+1)}_{\hat f^{(k-s+1)}}, \dots, \bar x^{(k)}_{\hat f^{(k)}}) \times \\
\times C_{k(p+1)-(s+m),e}(\bar x^{(m+1)}_{\hat l^{(m+1)}}, \dots, \bar x^{(k-s)}_{\hat l^{(k-s)}}, \bar x^{(k-s+1)}_{\hat b^{(k-s+1)}}, \dots, \bar x^{(k)}_{\hat b^{(k)}}, \bar x^{(1)}_{\hat t^{(1)}}, \dots, \bar x^{(m)}_{\hat t^{(m)}}),
\end{aligned}$$

где запись $\alpha_{\bar t, \hat e} = (\alpha_{t^{(1)}}, \dots, \alpha_{t^{(m)}})_{\hat e}$, $\gamma_{\bar l, \hat e} = (\gamma_{l^{(m+1)}}, \dots, \gamma_{l^{(k-s)}})_{\hat e}$, $\eta_{\bar b, \hat e} = (\eta_{b^{(k-s+1)}}, \dots, \eta_{b^{(k)}})_{\hat e}$ означает, что из соответствующих строк удалены подстановки, индексы которых в круглых скобках принадлежат множеству e,

$$\alpha_{t^{(u)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+p \\ t_1^{(u)} & \dots & t_q^{(u)} & d_1^{(u)} & \dots & d_p^{(u)} \end{pmatrix} \in S_n, \quad u \in I_m^1,$$

$$\gamma_{l^{(v)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+p \\ l_1^{(v)} & \dots & l_{q-1}^{(v)} & h_1^{(v)} & \dots & h_{p+1}^{(v)} \end{pmatrix} \in S_n, \quad v \in I_{k-s}^{m+1},$$

$$\eta_{b^{(a)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+p-1 \\ b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \end{pmatrix} \in S_{n-1}, \quad a \in I_k^{k-s+1},$$

$$C_{kq-(k-m),e}(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(m)}_{\hat{d}^{(m)}},\bar{x}^{(m+1)}_{\hat{h}^{(m+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{h}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{f}^{(k-s+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{f}^{(k)}})=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_{q,m}}\sum_{\delta\in S_{q-1,k-s-m}}\sum_{\varepsilon\in S_{q-1,s}}\operatorname{sgn}\sigma_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\delta_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\varepsilon_{\hat{e}}\left(\prod_{r=1}^{q-1}x^{(1)}_{t^{(1)}_{\sigma_1(r)}}\cdots x^{(m)}_{t^{(m)}_{\sigma_m(r)}}\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(m+1)}_{l^{(m+1)}_{\delta_{m+1}(r)}}\cdots x^{(k-s)}_{l^{(k-s)}_{\delta_{k-s}(r)}}x^{(k-s+1)}_{b^{(k-s+1)}_{\varepsilon_{k-s+1}(r)}}\cdots x^{(k)}_{b^{(k)}_{\varepsilon_k(r)}}\right)x^{(1)}_{t^{(1)}_{\sigma_1(q)}}\cdots x^{(m)}_{t^{(m)}_{\sigma_m(q)}},$$

$$C_{k(p+1)-(s+m),e}(\bar{x}^{(m+1)}_{\hat{l}^{(m+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{l}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{b}^{(k-s+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{b}^{(k)}},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(m)}_{\hat{t}^{(m)}})=$$
$$=\sum_{\tau\in S_{p+1,k-s-m}}\sum_{\xi\in S_{p,s}}\sum_{\pi\in S_{p,m}}\operatorname{sgn}\tau_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\xi_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\pi_{\hat{e}}\left(\prod_{r=1}^{p}x^{(m+1)}_{h^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(r)}}\cdots x^{(k-s)}_{h^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(r)}}\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(k-s+1)}_{f^{(k-s+1)}_{\xi_{k-s+1}(r)}}\cdots x^{(k)}_{f^{(k)}_{\xi_k(r)}}x^{(1)}_{d^{(1)}_{\pi_1(r)}}\cdots x^{(m)}_{d^{(m)}_{\pi_m(r)}}\right)x^{(m+1)}_{h^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(p+1)}}\cdots x^{(k-s)}_{h^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(p+1)}}.$$

Доказательство. Представим многочлен $C_{kn-s,e}$ в виде

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)})=\sum_{\bar{t}}\sum_{\bar{l}}\sum_{\bar{b}}F_{\bar{t}\bar{l}\bar{b}}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}),$$

где

$$F_{\bar{t}\bar{l}\bar{b}}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)})=\sum_{\mu\bar{t}}\sum_{\omega\bar{l}}\sum_{\rho\bar{b}}\operatorname{sgn}\mu_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\omega_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\rho_{\hat{e}}\times$$
$$\times\left(\left(\prod_{r=1}^{q-1}x^{(1)}_{\mu_1(r)}\cdots x^{(m)}_{\mu_m(r)}x^{(m+1)}_{\omega_{m+1}(r)}\cdots x^{(k-s)}_{\omega_{k-s}(r)}x^{(k-s+1)}_{\rho_{k-s+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\rho_k(r)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(1)}_{\mu_1(q)}\cdots x^{(m)}_{\mu_m(q)}\right)\left(x^{(m+1)}_{\omega_{m+1}(q)}\cdots x^{(k-s)}_{\omega_{k-s}(q)}x^{(k-s+1)}_{\rho_{k-s+1}(q)}\cdots x^{(k)}_{\rho_k(q)}\times\right.$$
$$\times\left(\prod_{r=q+1}^{n-1}x^{(1)}_{\mu_1(r)}\cdots x^{(m)}_{\mu_m(r)}x^{(m+1)}_{\omega_{m+1}(r)}x^{(k-s)}_{\omega_{k-s}(r)}x^{(k-s+1)}_{\rho_{k-s+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\rho_k(r)}\right)\times$$
$$\left.\times x^{(1)}_{\mu_1(n)}\cdots x^{(m)}_{\mu_m(n)}x^{(m+1)}_{\omega_{m+1}(n)}\cdots x^{(k-s)}_{\omega_{k-s}(n)}\right),$$

$$S_n(t^{(u)})=\{\mu_u\in S_n\,|\,\mu_u(I^1_q)=t^{(u)},\mu_u\{q+1,\ldots,n\}=d^{(u)}\},\quad u\in I^1_m,$$
$$S_n(l^{(v)})=\{\omega_v\in S_n\,|\,\omega_v(I^1_{q-1})=l^{(v)},\omega_v\{q,\ldots,n\}=h^{(v)}\},\quad v\in I^{m+1}_{k-s},$$
$$S_{n-1}(b^{(a)})=\{\rho_a\in S_{n-1}\,|\,\rho_a(I^1_{q-1})=b^{(a)},\rho_a\{q,\ldots,n-1\}=f^{(a)}\},\quad a\in I^{k-s+1}_k.$$

Нетрудно видеть, что для любых подстановок $\mu_1\in S_n(t^{(1)}),\ldots,\mu_m\in S_n(t^{(m)})$, $\omega_{m+1}\in S_n(l^{(m+1)}),\ldots,\omega_{k-s}\in S_n(l^{(k-s)})$, $\rho_{k-s+1}\in S_{n-1}(b^{(k-s+1)}),\ldots,\rho_k\in S_{n-1}(b^{(k)})$ справедливы равенства $\mu_u=\sigma_{\mu_u}\pi_{\mu_u}\alpha_{t^{(u)}}$, $\omega_v=\delta_{\omega_v}\tau_{\omega_v}\gamma_{l^{(v)}}$, $\rho_a=\varepsilon_{\rho_a}\xi_{\rho_a}\eta_{b^{(a)}}$, где

$$\alpha_{t^{(u)}}=\begin{pmatrix}1&\ldots&q&q+1&\ldots&q+p\\ t^{(u)}_1&\ldots&t^{(u)}_q&d^{(u)}_1&\ldots&d^{(u)}_p\end{pmatrix},$$
$$\pi_{\mu_u}=\begin{pmatrix}t^{(u)}_1&\ldots&t^{(u)}_q&d^{(u)}_1&\ldots&d^{(u)}_p\\ t^{(u)}_1&\ldots&t^{(u)}_q&\mu_u(d^{(u)}_1)&\ldots&\mu_u(d^{(u)}_p)\end{pmatrix},$$
$$\sigma_{\mu_u}=\begin{pmatrix}t^{(u)}_1&\ldots&t^{(u)}_q&d^{(u)}_1&\ldots&d^{(u)}_p\\ \mu_u(t^{(u)}_1)&\ldots&\mu_u(t^{(u)}_q)&d^{(u)}_1&\ldots&d^{(u)}_p\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{l^{(v)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+p \\ l_1^{(v)} & \dots & l_{q-1}^{(v)} & h_1^{(v)} & \dots & h_{p+1}^{(v)} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{\omega_v} = \begin{pmatrix} l_1^{(v)} & \dots & l_{q-1}^{(v)} & h_1^{(v)} & \dots & h_{p+1}^{(v)} \\ l_1^{(v)} & \dots & l_{q-1}^{(v)} & \omega_v(h_1^{(v)}) & \dots & \omega_v(h_{p+1}^{(v)}) \end{pmatrix},$$

$$\delta_{\omega_v} = \begin{pmatrix} l_1^{(v)} & \dots & l_{q-1}^{(v)} & h_1^{(v)} & \dots & h_{p+1}^{(v)} \\ \omega_v(l_1^{(v)}) & \dots & \omega_v(l_{q-1}^{(v)}) & h_1^{(v)} & \dots & h_{p+1}^{(v)} \end{pmatrix},$$

$$\eta_{b^{(a)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+p-1 \\ b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{\rho_a} = \begin{pmatrix} b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \\ b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & \rho_a(f_1^{(a)}) & \dots & \rho_a(f_p^{(a)}) \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{\rho_a} = \begin{pmatrix} b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \\ \rho_a(b_1^{(a)}) & \dots & \rho_a(b_{q-1}^{(a)}) & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \end{pmatrix},$$

$$u \in I_m^1, \quad v \in I_{k-s}^{m+1}, \quad a \in I_k^{k-s+1}.$$

Положим

$$B_n(d^{(u)}) = \{\pi_u \in S_n \,|\, \pi_u|_{t^{(u)}} = id\}, \quad C_n(t^{(u)}) = \{\sigma_u \in S_n \,|\, \sigma_u|_{d^{(u)}} = id\},$$

$$D_n(h^{(v)}) = \{\tau_v \in S_n \,|\, \tau_v|_{l^{(v)}} = id\}, \quad E_n(l^{(v)}) = \{\delta_v \in S_n \,|\, \delta_v|_{h^{(v)}} = id\},$$

$$P_{n-1}(f^{(a)}) = \{\xi_a \in S_{n-1} \,|\, \xi_a|_{b^{(a)}} = id\}, \quad T_{n-1}(b^{(a)}) = \{\varepsilon_a \in S_{n-1} \,|\, \varepsilon_a|_{f^{(a)}} = id\},$$

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m), \quad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_m), \quad \delta = (\delta_{m+1}, \dots, \delta_{k-s}),$$

$$\tau = (\tau_{m+1}, \dots, \tau_{k-s}), \quad \varepsilon = (\varepsilon_{k-s+1}, \dots, \varepsilon_k), \quad \xi = (\xi_{k-s+1}, \dots, \xi_k).$$

Очевидно, что

$$B_n(d^{(u)}) \cong S_p, \quad C_n(t^{(u)}) \cong S_q, \quad u \in I_m^1,$$

$$D_n(h^{(v)}) \cong S_{p+1}, \quad E_n(l^{(v)}) \cong S_{q-1}, \quad v \in I_{k-s}^{m+1}),$$

$$P_{n-1}(f^{(a)}) \cong S_p, \quad T_{n-1}(b^{(a)}) \cong S_{q-1}, \quad a \in I_k^{k-s+1}.$$

Тогда

$$F_{\overline{t}\overline{l}\overline{b}}(\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{(\sigma,\pi)} \sum_{(\delta,\tau)} \sum_{(\varepsilon,\xi)} \operatorname{sgn}\left(\prod_{u=1}^{m} \sigma_u \pi_u \alpha_{t^{(u)}}\right)_{\hat{e}} \operatorname{sgn}\left(\prod_{v=m+1}^{k-s} \delta_v \tau_v \gamma_{l^{(v)}}\right)_{\hat{e}} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}\left(\prod_{a=k-s+1}^{k} \varepsilon_a \xi_a \eta_{b^{(a)}}\right)_{\hat{e}} \left(\left(\prod_{r=1}^{q-1} x^{(1)}_{\sigma_1\pi_1\alpha_{t^{(1)}}(r)} \cdots x^{(k)}_{\varepsilon_k\xi_k\eta_{b^{(k)}}(r)}\right) \times\right.$$

$$\left.\times x^{(1)}_{\sigma_1\pi_1\alpha_{t^{(1)}}(q)} \cdots x^{(m)}_{\sigma_m\pi_m\alpha_{t^{(m)}}(q)}\right)\left(x^{(m+1)}_{\delta_{m+1}\tau_{m+1}\gamma_{l^{(m+1)}}(q)} \cdots x^{(k)}_{\varepsilon_k\xi_k\eta_{b^{(k)}}(q)} \times\right.$$

$$\times \left(\prod_{r=q+1}^{n-1} x^{(1)}_{\sigma_1\pi_1\alpha_{t^{(1)}}(r)} \cdots x^{(k)}_{\varepsilon_k\xi_k\eta_{b^{(k)}}(r)}\right) x^{(1)}_{\sigma_1\pi_1\alpha_{t^{(1)}}(n)} \cdots x^{(m)}_{\sigma_m\pi_m\alpha_{t^{(m)}}(n)} \times$$

$$\left.\times x^{(m+1)}_{\delta_{m+1}\tau_{m+1}\gamma_{l^{(m+1)}}(n)} \cdots x^{(k-s)}_{\delta_{k-s}\tau_{k-s}\gamma_{l^{(k-s)}}(n)}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\bar t}\sum_{\delta\bar l}\sum_{\varepsilon\bar b}\sum_{\tau\bar h}\sum_{\xi\bar f}\sum_{\pi\bar d}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{u=1}^{m}\alpha_{t^{(u)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{u=1}^{m}\sigma_u\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{v=m+1}^{k-s}\delta_v\Bigg)_{\hat e}\times\\
&\times\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{a=k-s+1}^{k}\varepsilon_a\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{v=m+1}^{k-s}\gamma_{l^{(v)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{a=k-s+1}^{k}\eta_{b^{(a)}}\Bigg)_{\hat e}\times\\
&\times\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{u=1}^{m}\pi_u\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{v=m+1}^{k-s}\tau_v\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{a=k-s+1}^{k}\xi_a\Bigg)_{\hat e}\times\\
&\times\Bigg(\Bigg(\prod_{r=1}^{q-1}x^{(1)}_{\sigma_1(t_r^{(1)})}\cdots x^{(m)}_{\sigma_m(t_r^{(m)})}x^{(m+1)}_{\delta_{m+1}(l_r^{(m+1)})}\cdots x^{(k-s)}_{\delta_{k-s}(l_r^{(k-s)})}x^{(k-s+1)}_{\varepsilon_{k-s+1}(b_r^{(k-s+1)})}\cdots x^{(k)}_{\varepsilon_k(b_r^{(k)})}\Bigg)\times\\
&\times x^{(1)}_{\sigma_1(t_q^{(1)})}\cdots x^{(m)}_{\sigma_m(t_q^{(m)})}\Bigg)\Bigg(x^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(h_1^{(m+1)})}\cdots x^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(h_1^{(k-s)})}x^{(k-s+1)}_{\xi_{k-s+1}(f_1^{(k-s+1)})}\cdots x^{(k)}_{\xi_k(f_1^{(k)})}\times\\
&\times x^{(1)}_{\pi_1(d_1^{(1)})}\cdots x^{(m)}_{\pi_m(d_1^{(m)})}\Bigg(\prod_{r=2}^{p}x^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(h_r^{(m+1)})}\cdots x^{(m)}_{\pi_m(d_r^{(m)})}\Bigg)x^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(h_{p+1}^{(m+1)})}\cdots x^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(h_{p+1}^{(k-s)})}\Bigg)=\\
&=\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{u=1}^{m}\alpha_{t^{(u)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{v=m+1}^{k-s}\gamma_{l^{(v)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{a=k-s+1}^{k}\eta_{b^{(a)}}\Bigg)_{\hat e}\times\\
&\times\Bigg(\sum_{\sigma\in S_{q,m}}\ \sum_{\delta\in S_{q-1,k-s-m}}\ \sum_{\varepsilon\in S_{q-1,s}}\operatorname{sgn}\sigma_{\hat e}\operatorname{sgn}\delta_{\hat e}\operatorname{sgn}\varepsilon_{\hat e}\times\\
&\times\Bigg(\prod_{r=1}^{q-1}x^{(1)}_{t^{(1)}_{\sigma_1(r)}}\cdots x^{(m)}_{t^{(m)}_{\sigma_m(r)}}x^{(m+1)}_{l^{(m+1)}_{\delta_{m+1}(r)}}\cdots x^{(k-s)}_{l^{(k-s)}_{\delta_{k-s}(r)}}x^{(k-s+1)}_{b^{(k-s+1)}_{\varepsilon_{k-s+1}(r)}}\cdots x^{(k)}_{b^{(k)}_{\varepsilon_k(r)}}\Bigg)x^{(1)}_{t^{(1)}_{\sigma_1(q)}}\cdots x^{(m)}_{t^{(m)}_{\sigma_m(q)}}\Bigg)\times\\
&\times\Bigg(\sum_{\tau\in S_{p+1,k-s-m}}\ \sum_{\xi\in S_{p,s}}\ \sum_{\pi\in S_{p,m}}\operatorname{sgn}\tau_{\hat e}\operatorname{sgn}\xi_{\hat e}\operatorname{sgn}\pi_{\hat e}\times\\
&\times\Bigg(\prod_{r=1}^{p}x^{(m+1)}_{h^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(r)}}\cdots x^{(k-s)}_{h^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(r)}}x^{(k-s+1)}_{f^{(k-s+1)}_{\xi_{k-s+1}(r)}}\cdots x^{(k)}_{f^{(k)}_{\xi_k(r)}}x^{(1)}_{d^{(1)}_{\pi_1(r)}}\cdots x^{(m)}_{d^{(m)}_{\pi_m(r)}}\Bigg)\times\\
&\times x^{(m+1)}_{h^{(m+1)}_{\tau_{m+1}(p+1)}}\cdots x^{(k-s)}_{h^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(p+1)}}\Bigg)=\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{u=1}^{m}\alpha_{t^{(u)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{v=m+1}^{k-s}\gamma_{l^{(v)}}\Bigg)_{\hat e}\operatorname{sgn}\Bigg(\prod_{a=k-s+1}^{k}\eta_{b^{(a)}}\Bigg)_{\hat e}\times\\
&\times C_{kq-(k-m),e}\Big(\bar x^{(1)}_{\hat d^{(1)}},\ldots,\bar x^{(m)}_{\hat d^{(m)}},\bar x^{(m+1)}_{\hat h^{(m+1)}},\ldots,\bar x^{(k-s)}_{\hat h^{(k-s)}},\bar x^{(k-s+1)}_{\hat f^{(k-s+1)}},\ldots,\bar x^{(k)}_{\hat f^{(k)}}\Big)\times\\
&\times C_{k(p+1)-(s+m),\,e}\Big(\bar x^{(m+1)}_{\hat l^{(m+1)}},\ldots,\bar x^{(k-s)}_{\hat l^{(k-s)}},\bar x^{(k-s+1)}_{\hat b^{(k-s+1)}},\ldots,\bar x^{(k)}_{\hat b^{(k)}},\bar x^{(1)}_{\hat t^{(1)}},\ldots,\bar x^{(m)}_{\hat t^{(m)}}\Big).
\end{aligned}$$

Полагая

$$\alpha_{\bar t,\hat e}=(\alpha_{t^{(1)}},\ldots,\alpha_{t^{(m)}})_{\hat e},\quad \gamma_{\bar l,\hat e}=(\gamma_{l^{(m+1)}},\ldots,\gamma_{l^{(k-s)}})_{\hat e},\quad \eta_{\bar b,\hat e}=(\eta_{b^{(k-s+1)}},\ldots,\eta_{b^{(k)}})_{\hat e},$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned}
&C_{kn-s,e}(\bar x^{(1)},\ldots,\bar x^{(k)})=\sum_{\bar t}\sum_{\bar l}\sum_{\bar b}\operatorname{sgn}\alpha_{\bar t,\hat e}\operatorname{sgn}\gamma_{\bar l,\hat e}\operatorname{sgn}\eta_{\bar b,\hat e}\times\\
&\quad\times C_{kq-(k-m),e}\Big(\bar x^{(1)}_{\hat d^{(1)}},\ldots,\bar x^{(m)}_{\hat d^{(m)}},\bar x^{(m+1)}_{\hat h^{(m+1)}},\ldots,\bar x^{(k-s)}_{\hat h^{(k-s)}},\bar x^{(k-s+1)}_{\hat f^{(k-s+1)}},\ldots,\bar x^{(k)}_{\hat f^{(k)}}\Big)\times\\
&\qquad\times C_{k(p+1)-(s+m),e}\Big(\bar x^{(m+1)}_{\hat l^{(m+1)}},\ldots,\bar x^{(k-s)}_{\hat l^{(k-s)}},\bar x^{(k-s+1)}_{\hat b^{(k-s+1)}},\ldots,\bar x^{(k)}_{\hat b^{(k)}},\bar x^{(1)}_{\hat t^{(1)}},\ldots,\bar x^{(m)}_{\hat t^{(m)}}\Big).
\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Следствие 1. *При* $m = k - s$ *верно равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}}\sum_{\bar{b}} \operatorname{sgn}\alpha_{\bar{t},\hat{e}} \operatorname{sgn}\eta_{\bar{b},\hat{e}}\times$$
$$\times C_{kq-s,e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{d}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{f}^{(k-s+1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{f}^{(k)}}\Big)\times$$
$$\times C_{kp,e}\Big(\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{b}^{(k-s+1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{b}^{(k)}},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{t}^{(k-s)}}\Big).$$

Следствие 2. *При* $s = 0$ *верно равенство*

$$C_{kn,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}}\sum_{\bar{l}} \operatorname{sgn}\alpha_{\bar{t},\hat{e}} \operatorname{sgn}\gamma_{\bar{l},\hat{e}}\, C_{kq-(k-m),e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(m)}_{\hat{d}^{(m)}},$$
$$\bar{x}^{(m+1)}_{\hat{h}^{(m+1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{h}^{(k)}}\Big)\, C_{k(p+1)-m,e}\Big(\bar{x}^{(m+1)}_{\hat{l}^{(m+1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{l}^{(k)}},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(m)}_{\hat{t}^{(m)}}\Big).$$

Следствие 3. *При* $s = k - 1$ *верно равенство*

$$C_{kn-(k-1),e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}}\sum_{\bar{b}} \operatorname{sgn}\alpha_{\bar{t},\hat{e}} \operatorname{sgn}\eta_{\bar{b},\hat{e}}\times$$
$$\times C_{kq-(k-1),e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\bar{x}^{(2)}_{\hat{f}^{(2)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{f}^{(k)}}\Big)\, C_{kp,e}\Big(\bar{x}^{(2)}_{\hat{b}^{(2)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{b}^{(k)}},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}}\Big).$$

Следствие 4. *При* $s = 0$, $m = k$ *верно равенство*

$$C_{kn,e}(\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}} \operatorname{sgn}\alpha_{\bar{t},\hat{e}}\, C_{kq,e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{d}^{(k)}}\Big)\cdot C_{kp,e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\dots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{t}^{(k)}}\Big).$$

В частности, полагая $k = 1$, $e = \emptyset$ *и опуская у букв верхний индекс* (1), *получаем*

$$S^-_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{t_1<\dots<t_q} \operatorname{sgn}\alpha_t\, S^-_q(x_{t_1},\dots,x_{t_q})\cdot S^-_{n-q}(x_{d_1},\dots,x_{d_{n-q}}).$$

Заметим, что этот частный результат сам по себе имеет интересное следствие. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $A = \{1,\dots,2n\}^{2n}$, $B_n = \{(j_1,\dots,j_{2n}) \in A \,|\, j_1 < j_2,\ j_3 < < j_4,\dots,j_{2n-1} < j_{2n},\ j_m \neq j_k$ для различных $m, k \in \{1,\dots,2n\}\}$.

Следствие 5. *Справедливо равенство*

$$S^-_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) = \sum_{(j_1\dots j_{2n})\in B_n} \varepsilon_{(j_1\dots j_{2n})}[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]\cdots[x_{j_{2n-1}},x_{j_{2n}}],$$

где $\varepsilon_{(j_1\dots j_{2n})} = \pm 1$, *а число слагаемых* $b_n = (2n)!/2^n$.

Доказательство. Пусть $(j_1\dots j_{2n}) \in B_n$,

$$a_0 = \emptyset,\quad a_k = \{j_{2k-1}, j_{2k}\},\quad c_k \in I^1_{2n} \setminus \textstyle\bigcup_{i=0}^{k-1} a_i,\quad d_k = (j_{2k-1} j_{2k}\dots j_{2n}),$$

где $k \in I^1_n$. Применяя n раз следствие 4 к многочлену $S^-_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$, имеем

$$S^-_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) = \sum_{\substack{j_1<j_2\\(j_1,j_2\in c_1)}}\ \sum_{\substack{j_3<j_4\\(j_3,j_4\in c_2)}}\cdots\sum_{\substack{j_{2n-1}<j_{2n}\\(j_{2n-1},j_{2n}\in c_n)}} \operatorname{sgn}(\alpha_{d_1}\dots\alpha_{d_n})[x_{j_1},x_{j_2}]\times$$
$$\times[x_{j_3},x_{j_4}]\cdots[x_{j_{2n-1}},x_{j_{2n}}] = \sum_{(j_1\dots j_{2n})\in B_n} \operatorname{sgn}(\alpha_{d_1}\dots\alpha_{d_n})[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]\cdots[x_{j_{2n-1}},x_{j_{2n}}].$$

Остается заметить, что

$$b_n = |B_n| = C_{2n}^2 C_{2(n-1)}^2 \cdots C_2^2 = \frac{(2n)!}{2(2(n-1))!} \cdot \frac{(2(n-1))!}{2(2(n-2))!} \cdot \frac{2}{2 \cdot 0!} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Следствие доказано. □

Используя предыдущие обозначения, докажем следующее

Предложение 3. *Пусть* $q = 1$, m, $a \in I_{k-s}^1$. *Тогда справедливы равенства*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{t_1^{(1)}=1}^{n} \cdots \sum_{t_1^{(m)}=1}^{n} \Big((-1)^{t_1^{(1)}-1} \cdots (-1)^{t_1^{(m)}-1}\Big)_{\hat{e}} \, x_{t_1^{(1)}}^{(1)} \cdots x_{t_1^{(m)}}^{(m)} \times$$

$$\times C_{kn-(s+m),e}\Big(\bar{x}^{(m+1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \bar{x}_{\hat{t}^{(1)}}^{(1)}, \ldots, \bar{x}_{\hat{t}^{(m)}}^{(m)}\Big) =$$

$$= \sum_{l_1^{(k-s-a+1)}=1}^{n} \cdots \sum_{l_1^{(k-s)}=1}^{n} \Big((-1)^{n-l_1^{(k-s-a+1)}} \cdots (-1)^{n-l_1^{(k-s)}}\Big)_{\hat{e}} \, C_{kn-(s+a),e}\Big(\bar{x}^{(1)}, \ldots,$$

$$\bar{x}^{(k-s-a)}, \bar{x}_{\hat{l}^{(k-s-a+1)}}^{(k-s-a+1)}, \ldots, \bar{x}_{\hat{l}^{(k-s)}}^{(k-s)}, \bar{x}^{(k-s+1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}\Big) \, x_{l_1^{(k-s-a+1)}}^{(k-s-a+1)} \cdots x_{l_1^{(k-s)}}^{(k-s)}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства левой части требуемого равенства. Заметим, что

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}} F_{\bar{t}}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}),$$

где

$$F_{\bar{t}}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{\mu \bar{t}} \sum_{\omega \in S_{n,k-s-m}} \sum_{\rho \in S_{n-1,s}} \operatorname{sgn} \mu_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \omega_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \rho_{\hat{e}} \, x_{\mu_1(1)}^{(1)} \cdots x_{\mu_m(1)}^{(m)} \times$$

$$\times \left(x_{\omega_{m+1}(1)}^{(m+1)} \cdots x_{\omega_{k-s}(1)}^{(k-s)} x_{\rho_{k-s+1}(1)}^{(k-s+1)} \cdots x_{\rho_k(1)}^{(k)} \left(\prod_{r=2}^{n-1} x_{\mu_1(r)}^{(1)} \cdots x_{\rho_k(r)}^{(k)} \right) x_{\mu_1(n)}^{(1)} \cdots x_{\omega_{k-s}(n)}^{(k-s)} \right),$$

$$S_n(t^{(u)}) = \{\mu_u \in S_n \mid \mu_u(1) = t_1^{(u)}, \ \mu_u\{2, \ldots, n\} = d^{(u)}\}, \quad u \in I_m^1.$$

Нетрудно видеть, что для любого $\mu_u \in S_n(t^{(u)})$ верно равенство $\mu_u = \pi_{\mu_u} \alpha_{t^{(u)}}$, где

$$\alpha_{t^{(u)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & t_1^{(u)} & t_1^{(u)}+1 & \ldots & n \\ t_1^{(u)} & 1 & \ldots & t_1^{(u)}-1 & t_1^{(u)}+1 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

$$\pi_{\mu_u} = \begin{pmatrix} t_1^{(u)} & d_1^{(u)} & \ldots & d_{n-1}^{(u)} \\ t_1^{(u)} & \mu_u(d_1^{(u)}) & \ldots & \mu_u(d_{n-1}^{(u)}) \end{pmatrix}.$$

Полагая $B_n(d^{(u)}) = \{\pi_u \in S_n \mid \pi_u(t_1^{(u)}) = t_1^{(u)}\}$ и замечая, что $B_n(d^{(u)}) \cong S_{n-1}$, $\operatorname{sgn} \alpha_{t^{(u)}} = (-1)^{t_1^{(u)}-1}$, получаем

$$F_{\bar{t}}(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}) = \Big((-1)^{t_1^{(1)}-1} \cdots (-1)^{t_1^{(m)}-1}\Big)_{\hat{e}} \cdot x_{t_1^{(1)}}^{(1)} \cdots x_{t_1^{(m)}}^{(m)} \times$$

$$\times \sum_{\omega \in S_{n,k-s-m}} \sum_{\rho \in S_{n-1,s}} \sum_{\pi \in S_{n-1,m}} \operatorname{sgn} \omega_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \rho_{\hat{e}} \operatorname{sgn} \pi_{\hat{e}} \times$$

$$\times \left(\prod_{r=1}^{n-1} x_{\omega_{m+1}(r)}^{(m+1)} \cdots x_{\omega_{k-s}(r)}^{(k-s)} x_{\rho_{k-s+1}(r)}^{(k-s+1)} \cdots x_{\rho_k(r)}^{(k)} x_{d_{\pi_1(r)}^{(1)}}^{(1)} \cdots x_{d_{\pi_m(r)}^{(m)}}^{(m)} \right) x_{\omega_{m+1}(n)}^{(m+1)} \cdots x_{\omega_{k-s}(n)}^{(k-s)} =$$

$$= \Big((-1)^{t_1^{(1)}-1} \cdots (-1)^{t_1^{(m)}-1}\Big)_{\hat{e}} \, x_{t_1^{(1)}}^{(1)} \cdots x_{t_1^{(m)}}^{(m)} C_{kn-(s+m),e}\Big(\bar{x}^{(m+1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \bar{x}_{\hat{t}^{(1)}}^{(1)}, \ldots, \bar{x}_{\hat{t}^{(m)}}^{(m)}\Big).$$

Следовательно,

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{t_1^{(1)}=1}^{n}\cdots\sum_{t_1^{(m)}=1}^{n}\Big((-1)^{t_1^{(1)}-1}\cdots(-1)^{t_1^{(m)}-1}\Big)_{\hat{e}}\, x^{(1)}_{t_1^{(1)}}\cdots x^{(m)}_{t_1^{(m)}}\times$$
$$\times\, C_{kn-(s+m),e}\Big(\bar{x}^{(m+1)},\ldots,\bar{x}^{(k)},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(m)}_{\hat{t}^{(m)}}\Big).$$

Докажем правую часть требуемого равенства. Заметим, что

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{l}} G_{\bar{l}}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}),$$

где

$$G_{\bar{l}}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\pi\in S_{n,k-s-a}}\ \sum_{\tau\bar{l}}\ \sum_{\rho\in S_{n-1,s}} \operatorname{sgn}\pi_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\tau_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\rho_{\hat{e}}\times$$
$$\times\left(\left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(k-s-a)}_{\pi_{k-s-a}(r)} x^{(k-s-a+1)}_{\tau_{k-s-a+1}(r)}\cdots x^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(r)} x^{(k-s+1)}_{\rho_{k-s+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\rho_k(r)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(1)}_{\pi_1(n)}\cdots x^{(k-s-a)}_{\pi_{k-s-a}(n)}\right) x^{(k-s-a+1)}_{\tau_{k-s-a+1}(n)}\cdots x^{(k-s)}_{\tau_{k-s}(n)},$$

где $S_n(l^{(v)}) = \{\tau_v\in S_n \,|\, \tau_v(n) = l_1^{(v)}, \tau_v(I^1_{n-1}) = h^{(v)}\},\ v\in I^{k-s-a+1}_{k-s}$.

Нетрудно видеть, что для любого $\tau_v\in S_n(l^{(v)})$ справедливо равенство

$$\tau_v = \ = \delta_{\tau_v}\gamma_{l^{(v)}},$$

где

$$\gamma_{l^{(v)}} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l_1^{(v)} & \ldots & n-1 & n\\ 1 & \ldots & l_1^{(v)}+1 & \ldots & n & l_1^{(v)}\end{pmatrix},$$
$$\delta_{\tau_v} = \begin{pmatrix} l_1^{(v)} & h_1^{(v)} & \ldots & h_{n-1}^{(v)}\\ l_1^{(v)} & \tau_v(h_1^{(v)}) & \ldots & \tau_v(h_{n-1}^{(v)})\end{pmatrix}).$$

Полагая $D_n(h^{(v)}) = \{\delta_v \in S_n \,|\, \delta_v(l_1^{(v)}) = l_1^{(v)}\}$ и учитывая соотношения $D_n(h^{(v)}) \cong S_{n-1}$, $\operatorname{sgn}\gamma_{l^{(v)}} = (-1)^{n-l_1^{(v)}}$, получаем

$$G_{\bar{l}}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \Big((-1)^{n-l_1^{(k-s-a+1)}}\cdots(-1)^{n-l_1^{(k-s)}}\Big)_{\hat{e}}\times$$
$$\times\sum_{\pi\in S_{n,k-s-a}}\ \sum_{\delta\in S_{n-1,a}}\ \sum_{\rho\in S_{n-1,s}} \operatorname{sgn}\pi_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\delta_{\hat{e}}\operatorname{sgn}\rho_{\hat{e}}\times$$
$$\times\left(\left(\prod_{r=1}^{n-1} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(k-s-a)}_{\pi_{k-s-a}(r)} x^{(k-s-a+1)}_{h^{(k-s-a+1)}_{\delta_{k-s-a+1}(r)}}\cdots x^{(k-s)}_{h^{(k-s)}_{\delta_{k-s}(r)}} x^{(k-s+1)}_{\rho_{k-s+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\rho_k(r)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(1)}_{\pi_1(n)}\cdots x^{(k-s-a)}_{\pi_{k-s-a}(n)}\right) x^{(k-s-a+1)}_{l_1^{(k-s-a+1)}}\cdots x^{(k-s)}_{l_1^{(k-s)}} =$$
$$= \Big((-1)^{n-l_1^{(k-s-a+1)}}\cdots(-1)^{n-l_1^{(k-s)}}\Big)_{\hat{e}}\cdot C_{kn-(s+a),e}\Big(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k-s-a)},$$
$$\bar{x}^{(k-s-a+1)}_{\hat{l}^{(k-s-a+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{l}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}\Big)\, x^{(k-s-a+1)}_{l_1^{(k-s-a+1)}}\cdots x^{(k-s)}_{l_1^{(k-s)}}.$$

Следовательно,

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{l_1^{(k-s-a+1)}=1}^{n} \cdots \sum_{l_1^{(k-s)}=1}^{n} \Big((-1)^{n-l_1^{(k-s-a+1)}} \cdots (-1)^{n-l_1^{(k-s)}}\Big)_{\hat{e}} \times$$

$$\times\; C_{kn-(s+a),e}\Big(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k-s-a)},\bar{x}^{(k-s-a+1)}_{\hat{l}^{(k-s-a+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{l}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}\Big)\times$$

$$\times\; x^{(k-s-a+1)}_{l_1^{(k-s-a+1)}} \cdots x^{(k-s)}_{l_1^{(k-s)}}.$$

Предложение доказано. □

Следствие 6. *Пусть* $m = a = k - s$, $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \frac{1}{2}\sum_{t_1^{(1)}=1}^{n} \cdots \sum_{t_1^{(k-s)}=1}^{n} \Big((-1)^{t_1^{(1)}-1} \cdots (-1)^{t_1^{(k-s)}-1}\Big)_{\hat{e}} \times$$

$$\times \Big\{ x^{(1)}_{t_1^{(1)}} \cdots x^{(k-s)}_{t_1^{(k-s)}} \cdot C_{k(n-1),e}\Big(\bar{x}^{(k-s+1)},\ldots,\bar{x}^{(k)},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{t}^{(k-s)}}\Big) +$$

$$+(-1)^{(n-1)[(k-s)-|I^1_{k-s}\cap e|]} C_{k(n-1),e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{t}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}\Big) x^{(1)}_{t_1^{(1)}} \cdots x^{(k-s)}_{t_1^{(k-s)}} \Big\}.$$

В частности, полагая $s = 0$, $k = 1$, $e = \emptyset$, $n = 2r$ *и опуская у букв верхний индекс* (1), *получаем*

$$S_n^-(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{t_1=1}^{n} (-1)^{t_1} [S^-_{n-1}(x_1,\ldots,x_{\hat{t}_1},\ldots,x_n), x_{t_1}].$$

Пусть $q \in I^1_{n-1}$, $m \in I^1_s$ $(s > 0)$, $t^{(u)} = \{t_1^{(u)},\ldots,t_q^{(u)}\}$ – произвольное подмножество I^1_n, $d^{(u)} = I^1_n \setminus t^{(u)} = \{d_1^{(u)},\ldots,d_{n-q}^{(u)}\}$ $(u \in I^1_{k-s})$, $l^{(v)} = \{l_1^{(v)},\ldots,l_q^{(v)}\}$ – какое-либо подмножество I^1_{n-1}, $h^{(v)} = I^1_{n-1} \setminus l^{(v)} = \{h_1^{(v)},\ldots,h_{n-1-q}^{(v)}\}$ $(v \in I^{k-s+1}_{k-s+m})$, $b^{(a)} = \{b_1^{(a)},\ldots,b_{q-1}^{(a)}\}$ $(q>1)$ – какое-нибудь подмножество I^1_{n-1}, $f^{(a)} = I^1_{n-1} \setminus b^{(a)} = \{f_1^{(a)},\ldots,f_{n-q}^{(a)}\}$ $(a \in I^{k-s+m+1}_k)$. Напомним, что числа, входящие в рассматриваемые множества, возрастают с увеличением нижнего индекса. Кроме того, мы сохраняем смысл введенных выше обозначений. Тогда по аналогии с доказательством предложения 2 можно проверить, что справедливо

Предложение 4. *Пусть* $n > 3$, $1 < q < n - 1$, $m \in I_s$. *Тогда*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}} \sum_{\bar{l}} \sum_{\bar{b}} \operatorname{sgn}\alpha_{\bar{t},\hat{e}} \operatorname{sgn}\gamma_{\bar{l},\hat{e}} \operatorname{sgn}\eta_{\bar{b},\hat{e}} \times$$

$$\times\; C_{kq-(s-m),e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{d}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{h}^{(k-s+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s+m)}_{\hat{h}^{(k-s+m)}},\bar{x}^{(k-s+m+1)}_{\hat{f}^{(k-s+m+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{f}^{(k)}}\Big)\times$$

$$\times\; C_{kp-m,e}\Big(\bar{x}^{(k-s+m+1)}_{\hat{b}^{(k-s+m+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k)}_{\hat{b}^{(k)}},\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s)}_{\hat{t}^{(k-s)}},\bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{l}^{(k-s+1)}},\ldots,\bar{x}^{(k-s+m)}_{\hat{l}^{(k-s+m)}}\Big),$$

где

$$\alpha_{\bar{t},\hat{e}} = (\alpha_{t^{(1)}},\ldots,\alpha_{t^{(k-s)}})_{\hat{e}}, \quad \gamma_{\bar{l},\hat{e}} = (\gamma_{l^{(k-s+1)}},\ldots,\gamma_{l^{(k-s+m)}})_{\hat{e}},$$

$$\eta_{\bar{b},\hat{e}} = (\eta_{b^{(k-s+m+1)}},\ldots,\eta_{b^{(k)}})_{\hat{e}},$$

$$\alpha_{t^{(u)}} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & q & q+1 & \ldots & q+p \\ t_1^{(u)} & \ldots & t_q^{(u)} & d_1^{(u)} & \ldots & d_p^{(u)} \end{pmatrix} \in S_n, \quad u \in I^1_{k-s},$$

$$\gamma_{l^{(v)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+p-1 \\ l_1^{(v)} & \dots & l_q^{(v)} & h_1^{(v)} & \dots & h_{p-1}^{(v)} \end{pmatrix} \in S_{n-1}, \quad v \in I_{k-s+m}^{k-s+1},$$

$$\eta_{b^{(a)}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+p-1 \\ b_1^{(a)} & \dots & b_{q-1}^{(a)} & f_1^{(a)} & \dots & f_p^{(a)} \end{pmatrix} \in S_{n-1}, \quad a \in I_k^{k-s+m+1}.$$

Следствие 7. *При $m = s$ верно равенство*

$$C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}) = \sum_{\bar{t}} \sum_{\bar{l}} \operatorname{sgn} \alpha_{\bar{t},\hat{e}} \operatorname{sgn} \gamma_{\bar{l},\hat{e}} \times$$
$$\times C_{kq,e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{d}^{(1)}}, \dots, \bar{x}^{(k-s)}_{\hat{d}^{(k-s)}}, \bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{h}^{(k-s+1)}}, \dots, \bar{x}^{(k)}_{\hat{h}^{(k)}}\Big) \times$$
$$\times C_{kp-s,e}\Big(\bar{x}^{(1)}_{\hat{t}^{(1)}}, \dots, \bar{x}^{(k-s)}_{\hat{t}^{(k-s)}}, \bar{x}^{(k-s+1)}_{\hat{l}^{(k-s+1)}}, \dots, \bar{x}^{(k)}_{\hat{l}^{(k)}}\Big).$$

2. Некоторые соотношения между T-идеалами кратных многочленов Капелли

Пусть $X = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} X^{(r)}$, где $X^{(r)} = \{x_n^{(r)}\}_{n \in N}$, $r = 1, 2, 3, \dots,$ – попарно непересекающиеся счетные множества, $\{C_{kn-s,e}\}^T$ – T-идеал алгебры $F\{X\}$, порожденный кратным многочленом Капелли $C_{kn-s,e}(\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)})$. Далее, если $e = \emptyset$, то вместо $C_{kn-s,\emptyset}$ будем писать C_{kn-s}. Заметим также, что $C_{1\cdot n} = S_n^-(\bar{x}^{(1)})$, $C_{1\cdot n,\{1\}} = S_n^+(\bar{x}^{(1)})$.

Предложение 5. *Для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие утверждения:*
1) *Пусть $s \neq 0$, $r \in I_{s-1}^0$, тогда $\{C_{kn-s,e}\}^T \supseteq \{C_{kn-r,e}\}^T$.*
2) *Пусть $s = 0$, $r \in I_{k-1}^0$, тогда $\{C_{kn,e}\}^T \supseteq \{C_{k(n+1)-r,e}\}^T$.*
3) *Пусть $m > n+1$, $r \in I_{k-1}^1$, тогда $\{C_{kn-s,e}\}^T \supseteq \{C_{km-r,e}\}^T$.*

Доказательство этих утверждений следует из определения T-идеала и предложения 3.

Следствие 8. *Для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие серии включений:*
1) $\{[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]\}^T \supseteq \{S_3^-(\bar{x}^{(1)})\}^T \supseteq \dots \supseteq \{S_n^-(\bar{x}^{(1)})\}^T \supseteq \cdots;$
2) $\{\langle x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\rangle\}^T \supseteq \{S_3^+(\bar{x}^{(1)})\}^T \supseteq \dots \supseteq \{S_n^+(\bar{x}^{(1)})\}^T \supseteq \cdots,$
где $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}] = x_1^{(1)} x_2^{(1)} - x_2^{(1)} x_1^{(1)}$, $\langle x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\rangle = x_1^{(1)} x_2^{(1)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)}$.

Следствие 9. *Для любого натурального числа $k > 1$ и произвольного подмножества $e \subseteq I_k^1$ для алгебры $F\{X\}$ справедливы включения*

$$\{C_{k\cdot 2-1,e}\}^T \supseteq \{C_{k\cdot 2,e}\}^T \supseteq \{C_{k\cdot 3-(k-1),e}\}^T \supseteq \dots \supseteq \{C_{k\cdot 3-1,e}\}^T \supseteq \{C_{k\cdot 3,e}\}^T \supseteq \cdots$$

Теорема 1. *Для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *Пусть $1 \le l < k$, $a \subseteq I_l^1$, $u \subseteq I_k^{l+1}$, $e = a \bigcup u$, $k - l - |u| = 2c$, тогда если $m = n$, то $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn,e}\}^T$, а если $m < n$, то $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$.*

2) *Пусть $1 \le l < k$, $a \subseteq I_{l-1}^1$ (при $l = 1$ $a = \emptyset$), $u \subseteq I_k^{l+1}$, $e = a \bigcup \{l\} \bigcup u$, $k - l - |u| = 2c - 1$, тогда если $m = n$, то $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn,e}\}^T$, а если $m < n$, то $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$.*

Доказательство. Для эндоморфизма φ_l алгебры $F\{X\}$, определенного по формуле

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} x_j^{(l)} x_j^{(l+1)} \cdots x_j^{(k)}, & \text{если } x = x_j^{(l)}, j \in I_m^1; \\ x, & \text{если } x \notin \{x_1^{(l)}, \dots, x_m^{(l)}\}, \end{cases}$$

справедливо равенство

$$\varphi_l(C_{lm,a}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(l)})) = \sum_{\pi\in S_{m,l}} \operatorname{sgn}\pi_{\hat{a}}\cdot\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(l)}_{\pi_l(r)}x^{(l+1)}_{\pi_l(r)}\cdots x^{(k)}_{\pi_l(r)}.$$

Пусть $\sigma_{l+1},\ldots,\sigma_k$ – произвольные элементы группы S_m, $\sigma = (\sigma_{l+1},\ldots,\sigma_k)$. Определим эндоморфизм $\zeta_{\sigma,u}$ алгебры $F\{X\}$ по формуле

$$\zeta_{\sigma,u}(x) = \begin{cases} x^{(v)}_{\sigma_v(j)}, & \text{если } \ x = x^{(v)}_j, j\in I^1_{m-1}, v\in I^{l+1}_k;\\ \operatorname{sgn}\sigma_{v,\hat{u}}x^{(v)}_{\sigma_v(m)}, & \text{если } \ x = x^{(v)}_m, v\in I^{l+1}_k;\\ x, & \text{если } x\notin\{x^{(l+1)}_1,\ldots,x^{(l+1)}_m,\ldots,x^{(k)}_m\}, \end{cases}$$

где $\operatorname{sgn}\sigma_{v,\hat{u}} = \begin{cases}\operatorname{sgn}\sigma_v & \text{при } \ v\notin u;\\ \emptyset & \text{при } \ v\in u.\end{cases}$ Тогда

$$\Delta = \zeta_{\sigma,u}\varphi_l(C_{lm,a}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(l)})) = \sum_{\pi\in S_{m,l}} \operatorname{sgn}\pi_{\hat{a}}\operatorname{sgn}\sigma_{\hat{u}}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(l)}_{\pi_l(r)}x^{(l+1)}_{\sigma_{l+1}\pi_l(r)}\cdots x^{(k)}_{\sigma_k\pi_l(r)} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_{m,l-1}}\sum_{i=1}^{m!} \operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_{l-1}\pi_{i\,l})_{\hat{a}}\operatorname{sgn}\sigma_{\hat{u}}\cdot\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(l)}_{\pi_{i\,l}(r)}x^{(l+1)}_{\sigma_{l+1}\pi_{i\,l}(r)}\cdots x^{(k)}_{\sigma_k\pi_{i\,l}(r)}.$$

Полагая $\sigma_v = \pi_{i\,v}\pi^{-1}_{i\,l}$, $v\in I^{l+1}_k$, получаем, что

$$\Delta = \sum_{\pi\in S_{m,l-1}}\sum_{i=1}^{m!} \operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_{l-1}\pi_{i\,l})_{\hat{a}}\times$$

$$\times\ \operatorname{sgn}(\pi_{i\,l+1}\cdots\pi_{i\,k})_{\hat{u}}(\operatorname{sgn}\pi_{i\,l})^{k-l-|u|}\cdot\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(l)}_{\pi_{i\,l}(r)}x^{(l+1)}_{\pi_{i\,l+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\pi_{i\,k}(r)}. \quad (1)$$

Пусть $k-l-|u| = 2c$, тогда

$$\zeta_{\sigma,u}\varphi_l(C_{lm,a}) = \sum_{\pi\in S_{m,l-1}}\sum_{i=1}^{m!} \operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_{l-1}\pi_{i\,l})_{\hat{a}}\operatorname{sgn}(\pi_{i\,l+1}\cdots\pi_{i\,k})_{\hat{u}}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(l)}_{\pi_{i\,l}(r)}x^{(l+1)}_{\pi_{i\,l+1}(r)}\cdots x^{(k)}_{\pi_{i\,k}(r)}.$$

Отсюда

$$\sum_{\sigma_{l+1}\in S_m}\cdots\sum_{\sigma_k\in S_m}\zeta_{\sigma,u}\varphi_l(C_{lm,a}) = \sum_{\pi_{l+1}\in S_m}\cdots\sum_{\pi_k\in S_m}\sum_{\pi\in S_{m,l}} \operatorname{sgn}(\pi_1\cdots\pi_l)_{\hat{a}}\times$$

$$\times\operatorname{sgn}(\pi_{l+1}\cdots\pi_k)_{\hat{u}}\cdot\prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)}\cdots x^{(k)}_{\pi_k(r)} = C_{km,e}(\bar{x}^{(1)},\ldots,\bar{x}^{(k)}),$$

и значит, $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{km,e}\}^T$.

Если $m < n$, то по следствию 9 $\{C_{km,e}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$, отсюда вытекает, что $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$.

Пусть теперь $k - l - |u| = 2c - 1$, $l \notin a$, тогда равенство (1) примет вид

$$\zeta_{\sigma,u}\varphi_l(C_{lm,a}) = \sum_{\pi\in S_{m,l-1}} \sum_{i=1}^{m!} \mathrm{sgn}\,(\pi_1 \cdots \pi_{l-1})_{\hat a}\, \mathrm{sgn}\,\pi_{i\,l}\, \mathrm{sgn}(\pi_{i\,l+1} \cdots \pi_{i\,k})_{\hat u} \mathrm{sgn}\,\pi_{i\,l} \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(l)}_{\pi_{i\,l}(r)} x^{(l+1)}_{\pi_{i\,l+1}(r)} \cdots x^{(k)}_{\pi_{i\,k}(r)} = \sum_{\pi\in S_{m,l-1}} \sum_{i=1}^{m!} \mathrm{sgn}\,(\pi_1 \cdots \pi_{l-1})_{\hat a} \times$$
$$\times\ \mathrm{sgn}(\pi_{i\,l+1} \cdots \pi_{i\,k})_{\hat u} \cdot \prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(l)}_{\pi_{i\,l}(r)} x^{(l+1)}_{\pi_{i\,l+1}(r)} \cdots x^{(k)}_{\pi_{i\,k}(r)}.$$

Отсюда

$$\sum_{\sigma_{l+1}\in S_m} \cdots \sum_{\sigma_k\in S_m} \zeta_{\sigma,u}\varphi_l(C_{lm,a}) = \sum_{\pi_{l+1}\in S_m} \cdots \sum_{\pi_k\in S_m} \sum_{\pi\in S_{m,l}} \mathrm{sgn}\,(\pi_1 \cdots \pi_{l-1})_{\hat a} \times$$
$$\times\, \mathrm{sgn}\,(\pi_{l+1} \cdots \pi_k)_{\hat u} \cdot \prod_{r=1}^{m} x^{(1)}_{\pi_1(r)} \cdots x^{(l)}_{\pi_l(r)}\, x^{(l+1)}_{\pi_{l+1}(r)} \cdots x^{(k)}_{\pi_k(r)} =$$
$$= C_{km,a\cup\{l\}\cup u}(\bar x^{(1)}, \ldots, \bar x^{(k)}) = C_{km,e},$$

и значит, $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{km,e}\}^T$.

Далее, если $m < n$, то по следствию 9 $\{C_{km,e}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$, отсюда вытекает, что $\{C_{lm,a}\}^T \supseteq \{C_{kn-s,e}\}^T$. Теорема доказана. □

Следствие 10. *При любом натуральном $n > 1$ для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие серии включений:*

1) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{3n}\}^T \supseteq \{C_{5n}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{(2r+1)n}\}^T \supseteq \cdots$;
2) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,I_1^1}\}^T \supseteq \{C_{3n,I_2^1}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{kn,I_{k-1}^1}\}^T \supseteq \cdots$;
3) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{kn,I_k^2}\}^T \supseteq \cdots$

Доказательство. 1) В утверждении 1) теоремы 1 положим $m = n$, $a = u = \emptyset$, $c = 1$, $l = 2r - 1$, $r \in N$, тогда $k = l + 2 = 2r + 1$, и мы приходим к серии включений 1).

2) В утверждении 2) теоремы 1 положим $m = n$, $l = 1$, $a = u = \emptyset$, $k = 2$, тогда $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,\{1\}}\}^T$, затем полагаем $l = 2$, $a = \{1\}$, $u = \emptyset$, $k = 3$, получаем $\{C_{2n,\{1\}}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{1\}\cup\{2\}}\}^T$. Повторяя этот процесс, придем к включениям 2).

3) В утверждении 1) теоремы 1 положим $m = n$, $l = 1$, $a = \emptyset$, $k = 2$, $u = \{2\}$, $c = 0$, тогда $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,\{2\}}\}^T$, затем полагаем $l = 2$, $a = \{2\}$, $k = 3$, $u = \{3\}$, получаем $\{C_{2n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T$. Повторяя этот процесс, придем к включениям 3). Следствие доказано. □

Следствие 11. *При любом натуральном $n > 1$ для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие серии включений:*

1) $\{C_{2n}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{(2r)n}\}^T \supseteq \cdots$;
2) $\{C_{2n}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{4n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{kn,I_{k-1}^2)}\}^T \supseteq \cdots$

Доказательство. 1) В утверждении 1) теоремы 1 положим $m = n$, $a = u = \emptyset$, $c = 1$, придем к включениям $\{C_{2n}\}^T \supseteq \{C_{4n}\}^T \supseteq \{C_{6n}\}^T \supseteq \cdots$.

2) Полагая в утверждении 2) теоремы 1 $m = n$, $l = 2$, $a = \emptyset$, $k = 3$, $u = \emptyset$, получим $\{C_{2n}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}}\}^T$, затем полагаем $l = 3$, $a = \{2\}$, $k = 4$, $u = \emptyset$,

получаем $\{C_{3n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{4n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим последовательность

$$\{C_{2n}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{4n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{kn,I^2_{k-1}}\}^T \supseteq \cdots$$

Следствие доказано. □

Предложение 6. *При любом натуральном $n > 1$ для алгебры $F\{X\}$ справедливы следующие серии включений:*
1) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{(2r)n}\}^T \supseteq \cdots$;
2) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n}\}^T \supseteq \{C_{3n,\{2\}}\}^T \supseteq \{C_{4n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T \supseteq \cdots \supseteq \{C_{kn,I^2_{k-1}}\}^T \supseteq \cdots$

Доказательство. Включение $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n}\}^T$ следует из теоремы Ченга [2], остальное – из следствия 11. Предложение доказано. □

Пусть $A_n^+ = \{\pi \in S_n \,|\, \operatorname{sgn}\pi = 1\}$, $A_n^- = \{\tau \in S_n \,|\, \operatorname{sgn}\tau = -1\}$. Рассмотрим четные квазимногочлены Капелли:

$$f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in A_n^+}\sum_{\tau\in A_n^+}\prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)}x^{(2)}_{\tau(r)} - \sum_{\pi\in A_n^-}\sum_{\tau\in A_n^-}\prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)}x^{(2)}_{\tau(r)},$$

$$g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in A_n^+}\sum_{\tau\in A_n^-}\prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)}x^{(2)}_{\tau(r)} - \sum_{\pi\in A_n^-}\sum_{\tau\in A_n^+}\prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)}x^{(2)}_{\tau(r)},$$

$$b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A_n^+} \operatorname{sgn}\pi\, x^{(1)}_{\pi(1)}x^{(2)}_{\tau(1)}x^{(1)}_{\pi(2)}\cdots x^{(1)}_{\pi(n)}x^{(2)}_{\tau(n)},$$

$$h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A_n^-} \operatorname{sgn}\pi\, x^{(1)}_{\pi(1)}x^{(2)}_{\tau(1)}x^{(1)}_{\pi(2)}\cdots x^{(1)}_{\pi(n)}x^{(2)}_{\tau(n)},$$

$$a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in A_n^+}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau\, x^{(1)}_{\pi(1)}x^{(2)}_{\tau(1)}x^{(1)}_{\pi(2)}\cdots x^{(1)}_{\pi(n)}x^{(2)}_{\tau(n)},$$

$$c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{\pi\in A_n^-}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau\, x^{(1)}_{\pi(1)}x^{(2)}_{\tau(1)}x^{(1)}_{\pi(2)}\cdots x^{(1)}_{\pi(n)}x^{(2)}_{\tau(n)}.$$

Стоит отметить, что квазимногочлены Капелли представляют интерес в связи с задачей нахождения базиса Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$. Основные свойства квазимногочленов Капелли приведены в работах [7, 9]. Связь между введенными объектами устанавливает

Предложение 7. *При любом натуральном $n > 1$ для алгебры $F\{X\}$ справедливы равенства:*

1) $f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{1\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;
$f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{2\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

2) $b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;
$b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{2\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

3) $a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;
$a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{1\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

4) $b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;
$h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

5) $h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

$b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

6) *если* $\operatorname{char} F \neq 2$, *то* $2b_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{2\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$; $2h_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{2\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$;

7) *если* $\operatorname{char} F \neq 2$, *то* $2a_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{1\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) + C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$; $2c_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = C_{2n,\{1\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - C_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$.

Доказательство. Проведем доказательство для первого равенства, поскольку для остальных оно аналогично. Итак,

$$\begin{aligned}
C_{2n,\{1\}}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) &= \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau \prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)} x^{(2)}_{\tau(r)} = \\
&= \sum_{\pi\in A_n^+}\sum_{\tau\in A_n^+} \prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)} x^{(2)}_{\tau(r)} - \sum_{\pi\in A_n^-}\sum_{\tau\in A_n^-} \prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)} x^{(2)}_{\tau(r)} - \\
&- \left(\sum_{\pi\in A_n^+}\sum_{\tau\in A_n^-} \prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)} x^{(2)}_{\tau(r)} - \sum_{\pi\in A_n^-}\sum_{\tau\in A_n^+} \prod_{r=1}^{n} x^{(1)}_{\pi(r)} x^{(2)}_{\tau(r)} \right) = \\
&= f_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) - g_{2n}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}).
\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Предложение 8. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда при любом натуральном* $n > 1$ *для алгебры* $F\{X\}$ *справедливы включения:* $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T$; $\{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$; $\{S_n^-\}^T \supseteq \{b_{2n}\}^T$; $\{S_n^-\}^T \supseteq \{h_{2n}\}^T$; $\{S_n^-\}^T \supseteq \{a_{2n}\}^T$; $\{S_n^-\}^T \supseteq \{c_{2n}\}^T$.

Доказательство. Проведем доказательство для первых двух включений, так как для остальных оно аналогично. В силу следствия 10 $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,\{1\}}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{C_{2n,\{2\}}\}^T$. Отсюда и из утверждения 1) предложения 7 получаем, что $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n} - g_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n} + g_{2n}\}^T$. Из этих включений и из того, что $\operatorname{char} F \neq 2$, вытекает, что $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$. Предложение доказано. □

Предложение 9. *Пусть* $e = \emptyset$ *либо* $e = \{2\}$. *Тогда при любом натуральном* $n > 1$ *для алгебры* $F\{X\}$ *справедливы включения:*

$$\{K_{2n-1}\}^T \supseteq \{C_{2n-1,e}\}^T \supseteq \{C_{2n,e}\}^T \supseteq \{C_{2(n+1)-1,e}\}^T \supseteq \{C_{2(n+1),e}\}^T \supseteq \cdots$$

Доказательство. Пусть τ – произвольный элемент группы S_n. Определим эндоморфизм $\xi_{\tau,e}$ алгебры $F\{X\}$ по формуле

$$\xi_{\tau,e}(x) = \begin{cases} x^{(2)}_{\tau(j)}, & \text{если } x = x^{(2)}_j, j \in I^1_{n-2} \text{ (при } n > 2); \\ \operatorname{sgn}\tau_{\hat{e}}\, x^{(2)}_{\tau(n-1)}, & \text{если } x = x^{(2)}_{n-1}; \\ x, & \text{если } x \notin \{x^{(2)}_1, \ldots, x^{(2)}_{n-1}\}, \end{cases}$$

где $\operatorname{sgn}\tau_{\hat{e}} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\tau, & \text{если } e = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{если } e \neq \emptyset. \end{cases}$ Тогда

$$\xi_{\tau,e}(K_{2n-1}) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau_{\hat{e}}\, x^{(1)}_{\pi(1)} x^{(2)}_{\tau(1)} x^{(1)}_{\pi(2)} \cdots x^{(2)}_{\tau(n-1)} x^{(1)}_{\pi(n)}.$$

Отсюда $\sum\limits_{\tau\in S_{n-1}}\sum\limits_{\pi\in S_n}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau_{\hat e}\, x^{(1)}_{\pi(1)}x^{(2)}_{\tau(1)}x^{(1)}_{\pi(2)}\cdots x^{(2)}_{\tau(n-1)}x^{(1)}_{\pi(n)} \;=\; C_{2n-1,e}(\bar x^{(1)},\bar x^{(2)})$. Следовательно, $\{K_{2n-1}\}^T\supseteq\{C_{2n-1,e}\}^T$. Остается заметить, что оставшаяся часть включений вытекает из следствия 9. Предложение доказано. □

Замечание 1. По аналогии с предложениями 2 и 3 можно доказать, что для любого $1\le q\le n-1$ справедливо равенство

$$K_{2n-1}(\bar x^{(1)},\bar x^{(2)})=\sum_{t_1<\ldots<t_q}\operatorname{sgn}\alpha_t\,K_{2q-1}(x^{(1)}_{t_1},\ldots,$$
$$x^{(1)}_{t_q},x^{(2)}_1,\ldots,x^{(2)}_{q-1})\cdot x^{(2)}_q\times$$
$$\times K_{2(n-q)-1}(x^{(1)}_{d_1},\ldots,x^{(1)}_{d_{n-q}},x^{(2)}_{q+1},\ldots,x^{(2)}_{n-1}).$$

Отсюда следует, что $\{K_{2\cdot 2-1}\}^T\supseteq\{K_{2\cdot 2}\}^T\supseteq\{K_{2\cdot 3-1}\}^T\supseteq\{K_{2\cdot 3}\}^T\supseteq\cdots$, где $K_{2\cdot 2-1}=C_{2\cdot 2-1}=x^{(1)}_1x^{(2)}_1x^{(1)}_2-x^{(1)}_2x^{(2)}_1x^{(1)}_1$.

Замечание 2. Кемер показал [10], что для некоторого числа $m(n)$ справедливо включение $\{S^-_n\}^T\supseteq\{K_{2m-1}\}^T$.

Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра над F, $M_m(F)$ – матричная алгебра с элементами из поля F, $T[A]$ – идеал тождеств A в алгебре $F\{X\}$.

Замечание 3. Применяя полученные выше результаты к алгебрам со стандартным тождеством S^-_m, для любого $n\ge m$ будем иметь следующие цепочки включений

1) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{C_{3n}\}^T\supseteq\{C_{5n}\}^T\supseteq\cdots\supseteq\{C_{(2r+1)n}\}^T\supseteq\cdots$;
2) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{C_{2n,I^1_1}\}^T\supseteq\{C_{3n,I^1_2}\}^T\supseteq\cdots\supseteq\{C_{kn,I^1_{k-1}}\}^T\supseteq\cdots$;
3) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{C_{2n,\{2\}}\}^T\supseteq\{C_{3n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T\supseteq\cdots\supseteq\{C_{kn,I^2_k}\}^T\supseteq\cdots$;
4) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{C_{2n}\}^T\supseteq\{C_{4n}\}^T\supseteq\cdots\supseteq\{C_{(2r)n}\}^T\supseteq\cdots$;
5) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{C_{2n}\}^T\supseteq\{C_{3n,\{2\}}\}^T\supseteq\{C_{4n,\{2\}\cup\{3\}}\}^T\supseteq\cdots\supseteq\{C_{kn,I^2_{k-1}}\}^T\supseteq\cdots$;
6) $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{f_{2n}\}^T$, $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{g_{2n}\}^T$, $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{b_{2n}\}^T$, $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{h_{2n}\}^T$, $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{a_{2n}\}^T$, $T[A]\supseteq\{S^-_n\}^T\supseteq\{c_{2n}\}^T$ при условии, что $\operatorname{char}F\ne 2$.

В частности, если $A=M_m(F)$, то в силу теоремы Амицура–Левицкого [11] цепочки включений будут выполняться при любом $n\ge 2m$.

Замечание 4. Пусть $N(k,m)$ означает наименьшее $n\in N$, при котором $\{C_{kn}\}^T\subseteq T[M_m(F)]$. В работах [4, 5] показано, что $N(k,m)=2m$. Отметим, что случай $k=2$ был впервые исследован Ченгом [2] (см. также [3, 6, 12]). Аналогичную задачу можно рассмотреть и для многочленов f_{2n}, g_{2n}, b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, c_{2n}.

Предложение 10. *Наименьшее $n\in N$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли f_{2n}, g_{2n}, b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, $c_{2n}\in T[M_m(F)]$, равно $2m$.*

Доказательство. Проведем доказательство для многочлена f_{2n}, поскольку для остальных оно аналогично. Пусть $\operatorname{char}F\ne 2$, и $d(m,F)$ означает наименьшее $n\in\mathbf{N}$, при котором $f_{2n}\in T[M_m(F)]$. Тогда из утверждения 6) замечания 3 вытекает, что $d(m,F)\le 2m$, а из теоремы 4 работы [8] следует, что $d(m,F)>2m-1$. Отсюда $d(m,F)=2m$. Так как коэффициенты многочлена f_{2n} равны ±1, то ограничение $\operatorname{char}F\ne 2$ для матричной алгебры $M_m(F)$ становится несущественным, и его можно снять. Предложение доказано. □

Литература

1. *Размыслов Ю.П.* О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13, № 3. – С. 337–360.
2. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 104, No 3. – P. 707–710.
3. *Domokos M.* A generalization of a theorem of Chang // Communications in Algebra. – 1995. – V. 23, No 12. – P. 4333–4342.
4. *Szigeti J., Tuza Z., Revesz G.* Eulerian polynomial identities on matrix rings // J. Algebra. – 1993. – V. 161, No 1. – P. 90–101.
5. *Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z.* Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs // Discrete Math. – 2001. – V. 230, No 1–3. – P. 49–61.
6. *Антонов С.Ю., Антонова А.В.* К теореме Ченга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15, Вып. 3 – С. 247–251.
7. *Антонов С.Ю., Антонова А.В.* О квазимногочленах Капелли // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15, Вып. 4. – С. 371–382.
8. *Антонов С.Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 11. – С. 3–19.
9. *Антонов С.Ю.* Некоторые виды тождеств подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 1. – С. 189–201.
10. *Кемер А.Р.* Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, № 5. – С. 753–757.
11. *Amitsur S.A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 1, No 4. – P. 449–463.
12. *Giambruno A., Sehgal S.K.* On a polynomial identity for $n \times n$ matrices // J. Algebra. – 1989. – V. 126, No 2. – P. 451–453.

Поступила в редакцию
04.02.15

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *antonovst-vm@rambler.ru*

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *antonovakazan@rambler.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25

On Multiple Polynomials of Capelli Type

*S.Y. Antonov**, *A.V. Antonova***

Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia
E-mail: **antonovst-vm@rambler.ru*, ***antonovakazan@rambler.ru*

Received February 4, 2015

Abstract

This paper deals with the class of Capelli polynomials in free associative algebra $F\{Z\}$ (where F is an arbitrary field, Z is a countable set) generalizing the construction of multiple Capelli polynomials. The fundamental properties of the introduced Capelli polynomials are provided. In particular, decomposition of the Capelli polynomials by means of the same type of polynomials is shown. Furthermore, some relations between their T-ideals are revealed. A connection between double Capelli polynomials and Capelli quasi-polynomials is established.

Keywords: matrix algebra, Capelli polynomial, polynomial identity, free associative algebra, symmetric group, standard polynomial, T-ideal

References

1. Razmyslov Yu.P. The Jacobson radical in PI-algebras. *Algebra Logic*, 1974, vol. 13, no. 3, pp. 192–204.
2. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
3. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang. *Commun. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 12, pp. 4333–4342.
4. Szigeti J., Tuza Z., Revesz G. Eulerian polynomial identities on matrix rings. *J. Algebra*, 1993, vol. 161, no. 1, pp. 90–101.
5. Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z. Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs. *Discrete Math.*, 2001, vol. 230, nos. 1–3, pp. 49–61.
6. Antonov S.Yu., Antonova A.V. To Chang theorem. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 247–251. (In Russian)
7. Antonov S.Yu., Antonova A.V. Quasi-polynomials of Capelli. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 371–382. (In Russian)
8. Antonov S.Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. Russ. Math., 2012, vol. 56, no. 11, pp. 1–16.
9. Antonov S.Yu. Some types of identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 189–201. (In Russian)
10. Kemer A.R. Remark on the standard identity. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 414–416.

11. Amitsur S.A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.

12. Giambruno A., Sehgal S.K. On a polynomial identity for $n \times n$ matrices. *J. Algebra*, 1989, vol. 126, no. 2, pp. 451–453.

⟨ ***Для цитирования***: *Антонов С.Ю., Антонова А.В.* О кратных многочленах Капелли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 5–25. ⟩

⟨ ***For citation***: Antonov S.Y., Antonova A.V. On multiple polynomials of Capelli type. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25. (In Russian) ⟩