

ХРОНИКА И ИНФОРМАЦИЯ

УДК 519.1

А.Е. Малых, В.И. Данилова

О комбинаторной школе Е.Г. Гонина

A.E. Malykh, V.I. Danilova

About E.G.Gonin's Combinative School



Е.Г. Гонин
(1910 – 1983)

Научную и педагогическую деятельность *Евгений Григорьевич Гонин* начал в 1930 г. ассистентом кафедры математики Пермского государственного педагогического института (ПГПИ). С 1938 г. он – старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии. Руководство вуза, зав. кафедрой проф. А.В. Ланков в характеристиках ученого отмечали его широкую и разностороннюю эрудицию в математике, астрономии, теоретической механике и других дисциплинах.

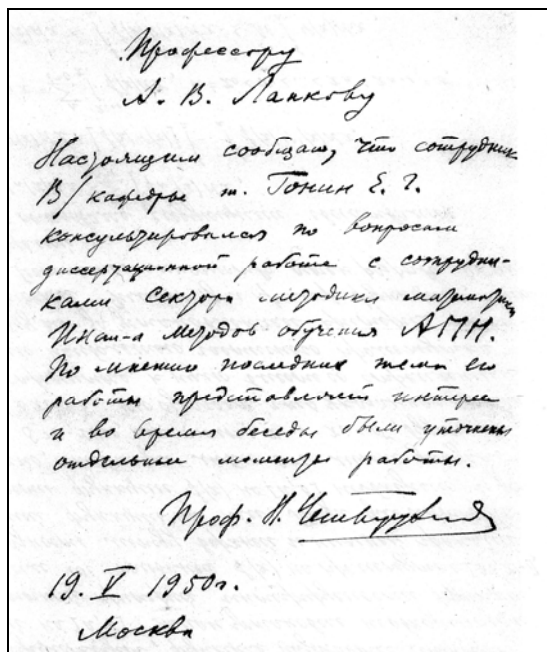
В 1937 г. он успешно сдал кандидатские экзамены, а спустя год стал работать над кандидатской диссертацией «Обобщение непрерывной геометрии Неймана». Тогда же были опубликованы две его научные статьи. Предполагалось, что с 15 апреля 1938 г. он получит длительную командировку в Москву для работы с первоисточниками на иностранных языках, но Великая Отечественная война во многом нарушила эти планы.

Поиски тематики нового исследования начались с 1946 г., когда в журнале «Успехи математических наук» (раздел «Математическая проблематика») академик А.Н. Колмогоров сформулировал проблему обоснования теории вещественных чисел и наметил пути ее решения. При ознакомлении с содержанием заметки Е.Г. Гонин обратил внимание на то, что теория, предложенная ученым, является аналогом *теории бесконечных десятичных дробей*. В связи с этим в январе 1949 г. он выступил на конференции математических кафедр педвузов Уральской зоны с сообщением о получении более общих результатов, содержащих теории А.Н. Колмогорова о бесконечных десятичных дробях.

Евгений Григорьевич Гонин обратился к заведующему сектором методики математики Института методов обучения АПН РСФСР академику, доктору физико-математических наук, профессору Николаю Федоровичу Четверухину с вопросом о диссертационности его научного исследования. В ответе ученого отмечалось, что, по мнению сотрудников сектора, материалы диссертационного исследования Е.Г. Гонина представляют интерес и его теория может служить

основой для построения более совершенных теорий систематических дробей.

Диссертацию «Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова» Евгений Григорьевич защитил в 1952 г. С 1954 г. он стал заведовать кафедрой алгебры и геометрии. С этого же года при кафедре открылась аспирантура под его руководством. Первоначальная тематика диссертационных исследований не была устоявшейся.



Из архива Пермского педуниверситета

Однако широта и глубина научных знаний Евгения Григорьевича, умение видеть актуальность проблемы позволяли ему успешно осуществлять руководство диссертациями по различным научным направлениям. Так, первая его аспирантка Нина Ефимовна Домошницкая защитила диссертацию по алгебраической тематике «Обобщение измерения упорядоченных полугрупп» (Свердловск, 1964). Спустя год под руководством и. о. проф. Е.Г. Гонина и доц. В.У. Грибанова в АПН РСФСР (Москва) была защищена диссертация Владимира Ивановича Рябухина «Теория пределов в русской и общеобразовательной школе», имевшая педагогическую направленность. Еще одно направление исследований – геометрическое – с опорой на алгебраические структуры представлено в диссертации Виктора Алексеевича Ярмоленко «Частичный порядок и геометрические структуры в множестве плоских фигур с бинарным отношением складывания» (Москва, МГПИ, 1969).

В 1957 г. был основан Всесоюзный Институт научной и технической информации (ВИНИТИ), стал выходить ежемесячный реферативный журнал «Математика».



Е. Г. Гонин - референт ВИНИТИ

Е.Г. Гонин был приглашен туда в качестве референта и оставался им почти 27 лет до конца своих дней. Благодаря знакомству с последними научными достижениями в области геометрии, комбинаторного анализа и теории графов он стал основателем школы конечных геометрических структур.

Теория конечных геометрий, изучение которых выполнял, прежде всего, Евгений Григорьевич Гонин, а также преподаватели и аспиранты под его руководством, исторически оформилась в результате слияния трех линий развития: геометрической, комбинаторной и алгебраической. Ее зарождение относится к началу XX в. Тогда же была создана и теория конечных плоских геометрий. Основное внимание было направлено на построение конкретных плоскостей малых порядков, изучение их структуры, установление единственности и дезарговости плоскостей порядков $n = 2 - 5, 7 - 9$. Исследования того периода были тесно связаны с конечными алгебраическими структурами.

Впервые конечное проективное пространство над полем вычетов по модулю p , примеры конечных проективных плоскостей с 7 и 13 точками были построены итальянским математиком J. Fano (1892). Аксиоматику конечного проективного пространства ввели O. Veblen и G. Bussey (1906). Они разработали общий метод построения указанных пространств размерности $n \geq 3$ и, в частности, всех таких плоских геомет-

рий над полями Галуа $GF[p^k]$, где p – простое число, $k \in \mathbb{N}$. Плоскости, построенные над ними, являются *дезарговыми*.

Первые три примера недезарговых проективных плоскостей (ниже ПП) построили О. Veblen и М.Н.Дж. Wedderburn (1907) для $n = 9$. В том же году С.Р. MacInnes дал комбинаторное доказательство единственности проективной плоскости порядка 5, являющейся дезарговой и совпадающей с $PG(2; 5)$. Ему же принадлежит доказательство несуществования ПП с 7 точками на прямой. Аналогичный результат обосновал и Ф.Н. Safford в статье, вышедшей одновременно с работой MacInnes'a. Заметим, что несуществование ПП порядка 6 было доказано еще Г. Таггу (1900) с использованием комбинаторных методов.

Впоследствии интерес ученых был направлен на выяснение условий *существования* разных видов конечных геометрий, поиску *методов описания* и *способов построения*, разработке их *классификации*.

С середины XX в. теория конечных геометрий особенно интенсивно развивается. В их системе ПП занимают центральное положение, находя применение в самых различных по содержанию и формулировке проблемах:

- теории планирования экспериментов;
- при проектировании сложных систем и устройств на ЭВМ;
- большом круге задач, связанных с проблемой экспертных оценок;
- теории информации (построение помехоустойчивых кодов);
- при решении ряда задач теории игр и теории графов;
- оказались они применимыми и для педагогических целей.

С середины прошлого века преподаватели и аспиранты под руководством Е.Г. Гонина активно включились в исследование *конечных геометрий* по следующим направлениям:

1. Изучение внутренней структуры уже полученных ПП порядка 9.
2. Исследование других видов конечных геометрий.
3. Построение ПП порядка 9, отличных от четырех известных, используя *частичные геометрии*.

4. Решение проблемы ортогональности латинских квадратов, связанной с гипотезой Л.Эйлера.

Е.Г. Гонин и его ученики находились, как говорят, на переднем крае исследований в области

конечных геометрий. В Советском Союзе эти вопросы впервые стали изучаться в Перми. Остановимся на каждом из этих направлений подробнее.

1. Выяснение структуры известных ПП порядка 9 осуществлялось по следующей схеме:

- исследование групп коллинеаций в каждой из них;
- подсчет наборов из k точек плоскости: конфигураций, k -дуг, полных дуг, овалов, латинских квадратов, сетей и др;
- отыскание подплоскостей разных порядков, нахождение их числа;
- изучение связей между подплоскостями одного порядка и др.

Сформулированные выше задачи решали многие ученые. Прежде всего, были исследованы все виды и группы коллинеаций во всех ПП, в том числе, четырех плоскостях порядка 9: дезарговой, плоскости трансляций, двойственной ей, называемой сдвиговой, и плоскости Хьюза.

Одним из центральных объектов изучения являлись *дуги, полные дуги, овалы*. В работах В. Quist'a, D.R. Hughes'a, A. Wagner'a, В. Serge, L. Lunelli, M. Sce, G.E. Martin'a и др. были получены частные результаты для дезарговых и недезарговых ПП. Вопрос о дугах в дезарговых плоскостях порядков 2, 3, 4, 5, 7 и 9 был практически решен в работах L. Lombardo-Radice (1962), L. Lunelli (1959), M. Sce (1960). Отдельные примеры полных k -дуг в плоскости трансляций порядка 9 приведены в статье G. Menichetti для $k = 7; 10$. В 1971 г. К.Н.Т. Denniston исследовал такие дуги в недезарговых плоскостях этого порядка для $k = 6, 9, 10$.

В это же время под руководством Е.Г. Гонина Юлия Николаевна Зверева выполнила полное исследование дуг (с точностью до изоморфизма) в плоскости трансляций. Она использовала для этого *метод поэтапных отождествлений, разработанный Евгением Григорьевичем* [2, 3]. По материалам исследования ею была защищена кандидатская диссертация «Дуги в конечных проективных плоскостях малых порядков» (1974).

В 70-х гг. XX в. ученик Евгения Григорьевича Гонина Вадим Иванович Васильков также с помощью *метода поэтапных отождествлений* исследовал с точностью до изоморфизма k -дуги (с $k = 3-5$ и частично $k = 6$ точками) в плоскости Хьюза. Впоследствии, используя модифицированный для ЭВМ метод Е.Г. Гонина, он вместе

со своим учеником Г.В. Масленниковым провел полное исследование k -дуг. При этом результаты были подтверждены ранее полученными В.И. Васильковым и К.Н.Т. Denniston'ом.

Сам Евгений Григорьевич и его ученики изучали 6 -дуги. Так как все полные 6 -дуги в известных ПП порядка 9 были уже получены Еленой Евгеньевной Гониной (1979), то перешли к изучению 6 -дуг, имеющих одну внешнюю точку. Такое исследование Е.Г. Гонин осуществлял с Ольгой Моисеевной Поносовой и Ю.Н. Зверевой. Дуги указанного вида они назвали конфигурациями, состоящими из точек дуги, всех ее секущих и всех точек их пересечения. Они доказали существование 27 таких конфигураций и изучали проблему их вложимости в ПП порядка 9. Аналогичная работа была проделана Е.Г. Гониным со своим учеником Анатолием Дмитриевичем Лумповым. Они рассмотрели 15 типов структур такого рода: 13 из них оказались невлостимыми в ПП порядка 9, а одна, названная ими симметричной, содержалась в дезарговой и хьюзовой плоскостях.

Изучением структуры недезарговых плоскостей и подплоскостей в них занимались J. Andre и G. Zappa. В 1955 г. они опубликовали результаты исследования групп коллинеаций в плоскостях трансляций и Хьюза. Вслед за ними R. Magari (1958) изучил подплоскости плоскости трансляций, провел классификацию и выполнил в них подсчет подплоскостей каждого типа. При этом была допущена ошибка в вычислении подплоскостей порядка 3 одного из видов, найденная В.И. Васильковым.

На основе исследований Zappa Denniston (1968) провел классификацию и выполнил подсчеты подплоскостей каждого типа в плоскости Хьюза. Его метод отличен от использованного Magari. Независимо от них и другим путем аналогичную работу выполнил В.И. Васильков. Он же решил вопрос о подплоскостях в плоскостях трансляций и сдвигов. Результаты его исследований отражены в кандидатской диссертации «О построении проективных плоскостей порядка 9».

2. В научной школе Е.Г. Гонины выполнялись исследования по построению и изучению других видов конечных геометрий, отличных от проективных плоскостей. В числе первых изучались регулярные плоскости, являющиеся конечным аналогом плоскостей Больяи-Лобачевского. Интерес к таким структурам Π_l^k проявился с середины 60-х гг. XX прошлого столетия. L. Szamkolowicz исследовал проблему существо-

вания плоскостей, L. Graves построил пример простейшей Π_l^k , а T.G. Ostrom изучал овалы в них. В то время не были решены вопросы существования для различных типов таких плоскостей, не изучены их свойства. Кроме того, одновременно стали изучаться и нерегулярные плоскости (T.G. Ostrom).

В исследовании Николая Кузьмича Пухарева – первого аспиранта Е.Г. Гонины по конечным геометриям – рассмотрены вопросы существования и некоторые общие свойства отдельных типов Π_l^k . С ними тесно связан специальный класс квазигрупп – A_n^k -алгебры. Их изучали также A. Sade и S. Stein. Результаты были получены одновременно с Н.К. Пухаревым. Последний выяснил возможность вложения некоторых видов Π_l^k в проективные плоскости Π_l^l , а также выполнял построение сложных Π_l^k из более простых. В Π_l^k плоскостях он рассматривал коллинеации, изучал их простейшие свойства. Н.К. Пухарев работал над проблемой координатизации аффинных плоскостей, получив ряд важных фактов. Результаты его исследований нашли отражение в кандидатской диссертации «О регулярных плоскостях и A_n^k -алгебрах» (1965).

Алла Ефимовна Малых построила таблицу инцидентностей для Π_4^3 и интерпретировала ее системой троек Kirkman'a S (2, 3, 15), представляющую широко известную задачу о 15 школьницах.

С начала 70-х гг. XX в. появились и первые общетеоретические результаты. R. Sandler указал метод построения бесконечного класса плоскостей Больяи-Лобачевского. Для проверки однородности регулярной плоскости он рассматривал группы ее коллинеаций. S. Gess построил несколько бесконечных классов однородных регулярных плоскостей и решил вопрос их существования для частных случаев.

С 30-х гг. XX в. получили самостоятельное развитие конечные инверсные плоскости. Один из способов построения состоял в нахождении их элементов путем пересечения овоида плоскостями в трехмерном проективном пространстве V^3 . Однако при этом можно построить не все их типы. Вклад в изучение таких плоскостей внесли W. Benz, P. Dembowski, К.Н.Т. Denniston и др.

Для нахождения *всех типов круговых плоскостей* – одним из видов инверсных – *Евгением Григорьевичем Гониным был предложен другой подход к исследованию*: выбиралась аффинная плоскость того же порядка, дополненная несобственной точкой. Все ее прямые считались проходящими через нее и принимались за окружности. К ним добавлялись новые. Процедура такого дополнения для плоскости нечетного и четного порядков n осуществлялась разными методами. В первом случае новые окружности строились по диаметрам, используя эллиптическую инволюцию на несобственной прямой в проективной плоскости того же порядка. В плоскости четного порядка ввиду нечетного числа точек на несобственной прямой эллиптических инволюций не существует. Поэтому для построения окружностей использовались повороты как результат вращений относительно данного центра, какой-либо точки аффинной плоскости, отличной от него.

Процедуру, предложенную Е.Г. Гониным, использовала его ученица Лидия Ивановна Истомина. Для решения вопроса о числе неизоморфных круговых плоскостей применялись $(n+1)$ -дуги, проходящие через пару точек. Из них комбинаторно-геометрическим путем с использованием ЭВМ составлялись пучки попарно совместимых дуг. Один из найденных неизоморфных между собой пучков таких дуг принимался за пучок окружностей круговой плоскости. Из него аффинными коллинеациями получали пучки с другим центрами и т.д., пока не была построена вся такая плоскость. Л.И. Истоминой выяснены условия существования круговых плоскостей для $n = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 17$ и $n = 8$. Результаты исследования вошли в ее кандидатскую диссертацию «Круговые проективные плоскости порядка 2-7» (1973).

Упорядочением конечных проективных прямых и плоскостей занималась Ольга Моисеевна Поносова. Введение порядка в проективной плоскости, построенной над полем вещественных чисел, связано с его упорядоченностью. В случае конечной плоскости все обычные аксиомы порядка выполняться не могут, поэтому выбирается «ослабленная» система аксиом, не противоречащая конечности плоскости. Такую систему разработал Е.Г. Гонин [1]. С опорой на нее О.М. Поносовой удалось упорядочить отдельные прямые, доказав, в частности теорему о том, что прямая, построенная над конечным полем, может быть проективно упорядочена, если и только ес-

ли поле имеет порядок $n = p^k > 2$, где p – простое число вида $3m-1$, а k – нечетное.

Проективные упорядочения прямой, основанные на использовании значений сложных отношений четверок различных точек прямой, были названы *аналитическими*. О.М. Поносова рассмотрела все возможные такие упорядочения прямых порядков 5, 8, 11, 17 и обратилась к более общей задаче – нахождения всех проективных упорядочений прямой. Она была решена комбинаторными методами для прямых порядков 5, 8, 11, 14.

В работах О.М. Поносовой установлено также, что, аналитически упорядочив конечную прямую порядка n , можно аналитически упорядочить конечную дезаргову плоскость и конечное m -мерное пространство ($m \geq 3$) этого же порядка. Вопросам данной тематики посвящен материал ее кандидатской диссертации «Проективное упорядочение конечных прямых» (1970).

3. К построению конечных проективных плоскостей можно подходить, как отмечалось выше, с алгебраической, геометрической и комбинаторной точек зрения. Они, как правило, строятся над *частичными плоскостями с последующим расширением их до плоскости*. Примерами их служат *трехвершинник* (трехсторонник); *четырёхвершинник* (четырёхсторонник); *полный четырёхвершинник* (четырёхсторонник); *классический четырёхвершинник*, *геометрические конфигурации*; *сети*; *алгебраические структуры*; *k-дуги*, *полные дуги*, *овалы*; *разностные множества*; *латинские квадраты*; *полуплоскости* и др.

При построении конечных ПП в комбинаторной школе Е.Г. Гонина широко использовали *частичные геометрии*. Его ученик *Игорь Петрович Непорожнев* осуществил построение ПП для $n = 6, 8, 10$. Основное внимание уделялось выяснению существования плоскости с *овалом* и нахождению числа неизоморфных плоскостей такого вида. С этой целью применялся *комбинаторно-геометрический метод*, основанный на использовании овала с последующим расширением его до всей плоскости. Все точки плоскости относительно него делились на два класса: точки овала и остальные точки плоскости, а прямые плоскости – на три класса: секущие, касательные и внешние. Для овала в плоскости четного порядка касательные отсутствуют. На основе исследований было получено новое доказательство *несуществования ПП порядка 6*.

Исчерпывающий перебор полной системы секущих овала для $n = 8$ привел И.П. Непорожнева к двум неизоморфным овалам относительно систем секущих прямых. Одна из них не расширяется до ПП порядка 8, а вторая приводит к единственно существующей дезарговой плоскости этого порядка. Для $n = 10$ доказано несуществование ПП с овалом особого вида. Основные результаты работы И.П. Непорожнева нашли отражение в его кандидатской диссертации «Построение конечных проективных плоскостей, содержащих овалы» (1971). Дальнейшие исследования ученого связаны с определением типов секущих овала в ПП порядка 9, конструктивным перечислением систем групп пар и оглавленных систем троек Штейнера порядков 10 и 12.

При рассмотрении конечных ПП ученик Е.Г. Гонина Борис Федорович Харитонов использовал разностные множества. Им изучался вопрос о ПП порядка 10 и 13 с регулярными транзитивными циклическими группами коллинеаций. Такая плоскость может быть задана разностным множеством D , состоящим из k различных элементов $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$, если G рассматривать как аддитивную группу. Б.Ф. Харитоновым было установлено несуществование ПП порядка 10 с регулярной транзитивной нециклической группой коллинеаций; для плоскости порядка 13 регулярная группа коллинеаций имеет порядок 183. С точностью до изоморфизма в полупрямой группе порядка 183 существует лишь одно разностное множество. Проективная плоскость, построенная над ним, является дезарговой. Результаты исследований отражены в его кандидатской диссертации.

Еще одним видом частичных геометрий являются латинские квадраты. Развитие проблемы их ортогональности, идущее от Л.Эйлера (XVIII в.), привело к построению множества попарно ортогональных латинских квадратов. Известно, что R.C. Bose установил взаимную связь между множеством из $n - 1$ взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n и проективными (аффинными) плоскостями того же порядка (1939). В принципе все ПП порядка n можно найти, перебрав все семейства из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов. Получение такого семейства удобно начинать с выбора одного, «опорного» квадрата с последующим составлением $n - 2$ квадратов, ортогональных к нему и между собой. Такой способ описания плоскостей является универсальным.

Зарубежные ученые и одновременно ученики Евгения Григорьевича Гонина вначале расширяли до плоскости те квадраты, которые встречаются в описаниях уже известных плоскостей. Эту работу выполняли M. Hall, J.D. Swift и R. Killgrove, разработавшие процедуру построения семейств таких квадратов. Исходным явилось расширение квадрата, совпадающего с таблицей операции элементарной абелевой группы. Были восстановлены все четыре известные плоскости. Аналогичную работу проделал E.T. Parker над пятью другими квадратами, встречающимися в описаниях известных ПП, но новые плоскости при этом не были открыты. В дальнейшем плоскости строились не только над всеми квадратами из этих описаний, но и над определенными их классами, не входящими в упомянутые описания. Новых плоскостей получено не было.

Ученицы Е.Г. Гонина Людмила Яковлевна Харанен и Лидия Ивановна Пантелеева расширяли до плоскостей квадраты из описаний, не содержащих квадрата элементарной абелевой группы (1968). В результате построения оказались лишь известные плоскости. Так как полного списка неизоморфных латинских квадратов порядка 9 не было, то Е.Г. Гонин предложил изучать специальные классы их: симметричные, составные, состоящие из подквадратов повторяющегося и разного состава, содержащие подквадраты порядка 3, латинские прямоугольники размера 3×9 и др. (Л.И. Пантелеева, Л.Я. Харанен, В.Г. Алябьева, А.Н. Фирсович, Т.М. Соромотина, Л.Б. Бурди и др.).

В дальнейшем, используя метод «клик», созданный Е.Г. Гониным [4], Л.Я. Панкратова (Харанен) доказала ряд теорем, в частности: ПП порядка 9, содержащая подплоскость порядка 3, является одной из четырех известных. Из нее в качестве следствия вытекает результат R.V. Killgrove о том, что каждая недезаргова плоскость представляет расширение некоторого полного четырехвершинника. Кроме того, Л.Я. Панкратова доказала, что в ПП порядка 9 не существует конфигурации 8_3 с коллинеарными диагональными точками и определенным исходным набором точек плоскости на прямых конфигурации (1989).

Имеется и другая возможность построения конечных ПП с применением латинских квадратов. Оказалось, что для этой цели пригодны латинские квадраты порядка $n - 1$, и такая возможность уже была использована. В частности, единственность ПП порядка 8 доказали M. Hall,

J.D. Swift и R.J. Walker путем перебора всех 147 неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 7 (1956). Аналогично, в новом доказательстве несуществования ПП порядка 6, предложенном А.К. Рыбниковым и Н.М. Рыбниковой (1966), использовались латинские квадраты порядка 5. Такой подход имеет то преимущество, что квадратов порядка $n - 1$ значительно меньше, чем квадратов порядка n . Однако такой квадрат несет меньше информации, и построение плоскости на его основе должно приводить к более разветвленным вариантам. Во всяком случае, он заслуживает внимания, тем более, что процедуру полного перебора латинских квадратов порядка 8 осуществил M.B. Wells (1967).

Алла Ефимовна Малых предложила описание проективных плоскостей порядка n системой из n латинских квадратов порядка $n - 1$, удовлетворяющих четырем требованиям [5]. Оно геометрически определяется выбором точек (0) , (∞) и прямой j_0 пучка с центром (∞) , отличной от прямой $[\infty]$, т.е. является *конфигурацией*, названной ею *опорной*. Автор дал *геометрическую интерпретацию* полученных квадратов: каждый из них определяется выбором упорядоченной тройки неколлинеарных точек (0) , (∞) и (j_0, i) , описывая связь между тремя рядами точек, отличных от вершин некоторого трехвершинника с носителями, являющимися его сторонами. Сам метод разработан на основе *классификации трехвершинников*. А.Е. Малых исследовала все неизоморфные трехвершинники во всех 15 описаниях четырех ПП порядка 9, выполнила построение (с помощью ЭВМ) плоскости над 13 латинскими квадратами порядка 8. Были получены три системы из девяти латинских квадратов порядка 8. Осуществив обратную процедуру, А.Е. Малых пришла к описаниям, изоморфным плоскости трансляций, сдвигов и хьюзовой. Кроме того, А.Е. Малых представила все 15 описаний четырех известных ПП порядка 9, используя свой метод. Результаты исследований были отражены в ее кандидатской диссертации (1975).

В 1978 г. сотрудники Института проблем управления АН СССР (Москва) описали процедуру построения всех нормализованных латинских квадратов порядка n , которая была реализована при получении полного списка неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 8. Число таких квадратов оказалось равным 283 640. Для каждого из них был найден порядок группы автоморфизмов. Руководитель отдела института выразил надежду на то, что, пользуясь

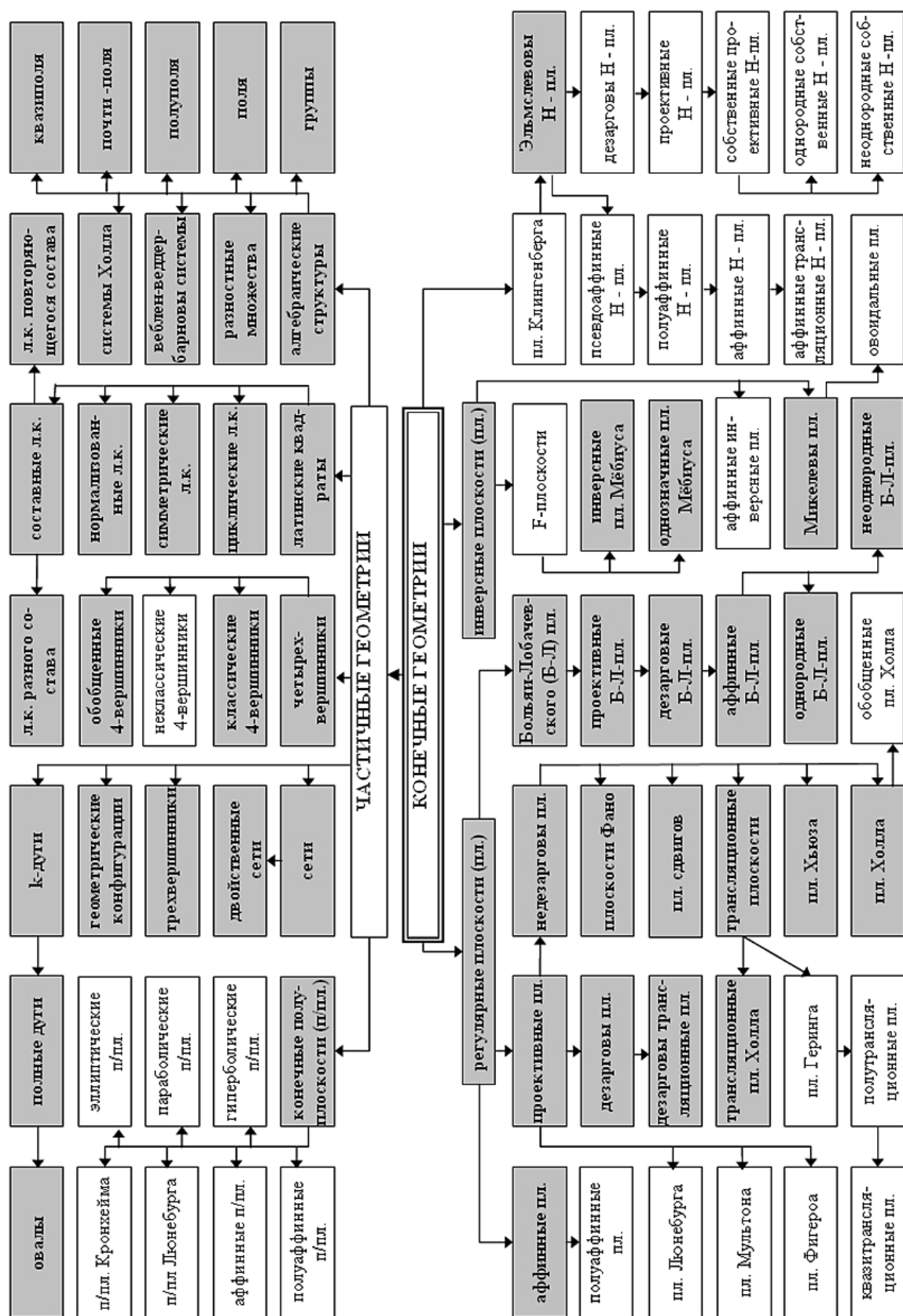
предложенным А.Е. Малых методом, можно было бы построить *все неизоморфные между собой ПП порядка 9*.

4. В 1782 г. великий Леонард Эйлер (1707–1783) опубликовал большой мемуар «Исследование магического квадрата нового типа», поводом для написания которого послужила задача о размещении в каре 36 офицеров шести различных званий, взятых из шести разных родов войск так, чтобы в каждой шеренге и каждом ряду стояли офицеры разных званий, служащих в разных родах войск. Новый тип квадрата был назван им *латинским*, а задача состояла в наложении двух квадратов – латинского и греческого – так, чтобы образовалась ортогональная пара. Все попытки решить ее не увенчались успехом. Поэтому Эйлер сформулировал *гипотезу*: *ни для какого латинского квадрата нечетно-четного порядка нельзя построить ортогональную пару*. Она стала известна как *гипотеза Эйлера*... Прошло 118 лет. На рубеже XIX – XX вв. французский математик и инженер Gaston Tarry, получив все 9408 нормализованных латинских квадратов порядка 6, объединил их, как бы мы теперь сказали, в 22 неизоморфных класса. Для каждого из них он пытался построить ортогональную пару, и этого сделать не удалось. А потому для $n = 6$ гипотеза оставалась *верной*. Следующий порядок был $n = 10$. С середины прошлого столетия предпринимались многочисленные попытки построения ортогональной пары таких квадратов.

Крупнейшие ученые: H.F. MacNeish, R.C. Bose, E.T. Parker, S.S. Shrikhande, R.M. Wilson, W.H. Mills и др. – работали над проверкой гипотезы Эйлера. И усилия их увенчались успехом. В 1960 – 61 гг. XX в. она *была опровергнута для всех натуральных n , отличных от 2 и 6*.

А первую пару ортогональных квадратов порядка $n = 10$ построил в 1961 г. E.T. Parker. В те дни об этом много писали. Тогда же были сданы в печать результаты *Александра Ивановича Лямзина*, работавшего с Е.Г. Гониным, построения другой *ортогональной пары*. Опубликована она была спустя два года в журнале АН СССР «Успехи математических наук».

Основные виды конечных геометрий представлены на приведенной схеме. Тематику выделенных в нем частей разрабатывали Евгений Григорьевич Гонин и ученики его комбинаторной школы.



Библиографический список:

1. Гонин, Е.Г. О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии [Текст] // Уч. зап. Пермского пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1957. Вып. 14. – С. 212-214.
2. Гонин, Е.Г. Метод поэтапных отождествлений [Текст] // Материалы XXVI конференции работников математических кафедр педагогических институтов Урала. – Киров: КГПИ, 1968. – С. 50-51.
3. Гонин, Е.Г., Гонина, Е.Е. Метод поэтапных отождествлений [Текст] // Изв. науч.-образоват. центра «Математика». – Пермь: ПГТУ, 2006. Вып. 3. – С. 16-38.
4. Гонин, Е.Г. Перебор решений комбинаторных задач [Текст] // – Математика. – Пермь: ПГПИ, 1971. Т. 94. – С. 27-46.
5. Малых, А.Е. Описание проективных плоскостей порядка n латинскими квадратами порядка $n-1$ [Текст] // – Комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1972. Вып. 2. – С. 86-92.