Вестн. Ом. ун-та. 2012. № 2. С. 67–75.

УДК 519.48

Е.А. Швед

О КАТЕГОРИИ ПРОНИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Вводятся основы категории топологических нильпотентно аппроксимируемых алгебр Ли над полем, а также ее подкатегории пронильпотентных алгебр Ли над полем, изучаются свойства объектов этих категорий. Приведено конструктивное построение свободного объекта в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем. А.И. Ширшов ввел конструкцию свободного произведения алгебр Ли [13], мы строим аналог этой конструкции в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем.

Ключевые слова: алгебра Ли, пронильпотентная алгебра Ли, свободное произведение.

Введение

Основные сведения по структуре свободных алгебр Ли и их свободных произведений смотреть в работах [7; 8; 14–17]. Основная цель статьи – введение основ категории топологических нильпотентно аппроксимируемых алгебр Ли над полем k. Для этого на абстрактной алгебре Ли A над k фиксируется нильпотентно аппроксимирующее семейство идеалов алгебры A, индексированных элементами индуктивного частично упорядоченного множества I. Заданное таким образом аппроксимирующее семейство определяет такую топологию на A, что лиевы операции на этой алгебре становятся непрерывными, следовательно, A становится топологической алгеброй Ли. Топологии, определенные указанным выше способом, далее будем называть пронильпотентными. В пункте 1 приводятся некоторые свойства алгебр этой категории, объектами которой являются топологические алгебры Ли с пронильпотентной топологией, а морфизмами – непрерывные гомоморфизмы между ними.

Далее в определенной таким образом категории выделяется подкатегория алгебр Ли над k, представимых в виде обратного предела нильпотентных алгебр Ли над k. Топологические алгебры Ли над полем, полные в топологии обратного предела, называются пронильпотентными алгебрами Ли над k. В этой подкатегории определяется понятие свободного объекта и приводится его конструктивное построение.

Заключительный раздел посвящен построению свободного пронильпотентного произведения в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем. Если на свободном произведении алгебр Ли задать специальным образом аппроксимирующее семейство идеалов, то предельный объект в топологии обратного предела будет свободным пронильпотентным произведением в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем. Основными результатами, на которые опирается наше исследование, являются теорема А.И. Мальцева [4] о том, что свободное произведение нильпотентно аппроксимируемых алгебр Ли является нильпотентно аппроксимируемой алгеброй Ли, и теорема Г.П. Кукина [6] о строении порождающих декартовой подалгебры свободного произведения алгебр Ли над полем, которая является свободной алгеброй Ли.

Отметим, что в работах [11; 12] рассматривается более узкая категория пронильпотентных алгебр Ли над полем, ибо в них топология определяется жестко фиксированным множеством аппроксимирующих идеалов – множеством членов нижнего центрального ряда алгебры Ли над k.

Кроме этих работ, существует еще несколько публикаций, касающихся пронильпотентных алгебр Ли над полем, где рассматриваются отдельные элементы категории пронильпотентых алгебр Ли над полем без определения данной категории (см., напр.: [5; 10]).

Известная теорема Столлингса – Суона [2] утверждает, что абстрактная группа имеет когомологическую размерность 1 тогда и только тогда, когда она свободна. Отметим, что в классе алгебр Ли над полем этот вопрос остается открытым. В работе [12] формулируется (без доказательства) аналогичная теорема в категории пронильпотентных алгебр Ли. Для проведения полного доказательства теоремы (если она верна) необходимо построение теории когомологий в рассматриваемой категории алгебр Ли, что выходит за рамки нашего исследования, так что формулировка этого результата в работе [12] – поспешное решение.

1. Нильпотентно аппроксимируемые алгебры Ли

Определение 1.1. Пусть A – алгебра Ли над полем k. Говорят, что алгебра A аппроксимируется нильпотентными алгебрами, если для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует гомоморфизм $\varphi_a : A \to B$ алгебры A в нильпотентную алгебру Ли над k такой, что $\varphi_a \neq 0$ в B.

Введем следующие обозначения для используемых ниже категорий алгебр Ли:

- $A \in N$ означает, что алгебра A есть нильпотентная алгебра Ли;
- $A \in \mathrm{Res}\, N$ означает, что алгебра A аппроксимируется нильпотентными алгебрами Ли.

Предложение 1.2. Для алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:

1) алгебра $A \in \mathrm{Res}\, N$, т. е. A аппроксимируется нильпотентными алгебрами Ли;

2) алгебра A вкладывается в декартово произведение нильпотентных алгебр Ли;

3) пересечение всех членов нижнего центрального ряда алгебры A равно нулю.

Доказательство стандартно.

2. Обратные спектры и обратные пределы

Определение 2.1. Пусть I – индуктивное множество индексов, $\{A_i | i \in I\}$ – система алгебр Ли над некоторым полем k. Предположим, что для любой пары индексов $i, j \in I$, таких, что $i \leq j$, , задан гомоморфизм $\varphi_i^j : A_j \to A_i$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) φ_i^i есть тождественное отображение алгебры A_i для любого $i \in I$;

2) для любой тройки индексов $i, j, k \in I$, таких, что $i \leq j \leq k$, имеет место $\varphi_i^j \circ \varphi_j^k = \varphi_i^k$.

Тогда систему $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ называют обратным (проективным) спектром системы $\{A_i | i \in I\}$.

Определение 2.2. Обратным (проективным) пределом A_* обратного спектра $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ называется подмножество прямого произведения $\prod_{i \in I} A_i$, состоящее из всех таких элементов $a = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$, называемых нитями, что для любой пары индексов $i, j \in I$, таких, что $i \leq j$, имеет место $\varphi_i^j(a_j) = a_i$.

Определение 2.3. Пусть I – индуктивное множество индексов, $\{A_i | i \in I\}$ – система топологических алгебр Ли над некоторым полем k. Тогда $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ – проективная система топологических алгебр Ли, если:

1) $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ – проективная система алгебр Ли;

2) все φ_i^j непрерывны.

Определение 2.4. Пусть задана проективная система $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ топологических алгебр Ли над полем k, A_* – подмножество прямого произведения, являющееся обратным пределом этой системы. Топологическую алгебру A_* с топологией, индуцированной топологией произведения на $\prod_{i \in I} A_i$, будем называть обратным пределом проективной системы $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ топологических алгебр Ли.

Нетрудно проверить, что A_* является замкнутой подалгеброй в $\prod_{i \in I} A_i$.

3. Алгебры Ли с пронильпотентной топологией

Пусть алгебра $A \in \mathrm{Res}\, N$, при этом на A задана фильтрация $F_A = \{A_i | i \in I\}$ – система идеалов алгебры A, индексированная некоторым индуктивным множеством индексов I, таким, что выполнены следующие условия:

- $\forall i \in I$ алгебра $A / A_i \in N$; ;
- $\forall i, j \in I$ найдется такой индекс $k \in I\ (i \leq k,\ j \leq k)$, что $A_i \bigcap A_j \supseteq A_k$;
- $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$. .

Тогда алгебру A можно рассмотреть как топологическую, определив базис окрестностей нуля системой $\{A_i | i \in I\}$. Для ненулевого элемента $a \in A$ базисом его окрестностей служат классы $(a + A_i)$, где $i \in I$. Нетрудно проверить, что все операции на алгебре A непрерывны в рассмотренной топологии.

Определение 3.1. Топологию, базис окрестностей нуля которой определен с помощью некоторой фильтрации $F_A = \{A_i | i \in I\}$, будем называть пронильпотентной и обозначать $\tau(F_A)$.

Легко проверить, что для алгебры $A \in \mathrm{Re}s N$ с фильтрацией F_A система $\{A / A_i | i \in I\}$ является обратным топологическим спектром, если положить $\forall\, i, j \in I \; (i \le j)\; \varphi_i^j : A/A_j \to A/A_i$ – каноническое отображение. Обозначим обратный предел построенного спектра через A_{*,F_A}.

Таким образом, фильтрация, заданная на алгебре A, определяет обратный предел обратного спектра топологических алгебр Ли, который является пополнением алгебры A в пронильпотентной топологии.

Теорема 3.2. Для топологической алгебры A_{*,F_A}, построенной выше, выполнены следующие условия:

1) существует каноническое вложение $i: A \to A_{*,F_A}$;

2) $i(A)$ является всюду плотным подмножеством в A_{*,F_A};

3) каноническое вложение i является непрерывным отображением топологической алгебры $\langle A, \tau \rangle$ в $\langle A_{*,F_A}, \tau(F_A) \rangle$.

Доказательство.

1. Поставим элементу $a \in A$ в соответствие нить $(..., a_i, ..., a_j, ...) \in \prod_{i \in I} A_i$, такую, что $\forall\, i \in I$ выполнено условие $a_i = \varphi_i(a)$ и при $i, j \in I$ таких, что $i \le j$, верно, что $\varphi_i^j(a_j) = a_i$.

Согласованность элементов нити обеспечивается коммутативностью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_i} & A_i \\ \varphi_i \downarrow & & \swarrow \varphi_i^j \\ A_j & & \end{array} \quad (i \le j).$$

Если для каждого $a \in A$ положить $i(a) = (..., \varphi_i(a), ..., \varphi_j(a), ...)$, то получим искомое вложение.

2. Покажем, что $i(A)$ плотно в A_{*,F_A}. Пусть φ_i – каноническое отображение A_{*,F_A} на A/A_i, т. е. φ_i – ограничение проекции $pr_i: \prod_{i \in I} A/A_i \to A/A_i \; (i \in I)$ на A_{*,F_A}, тогда $\psi_i = \varphi_i \circ i$ есть каноническое отображение алгебры A на A/A_i. Хорошо известно, что для любого непустого открытого множества $U \subset A_{*,F_A}$ существует индекс $i \in I$ и непустое открытое множество $U_i \subset A/A_i$, такие, что $\psi_i^{-1}(U_i) \subset U$ [3]. Тогда $i^{-1}(U) \supset \varphi_i^{-1}(U_i)$, причем $i^{-1}(U)$ не пусто, т. е. пересечение $i(A) \cap U$ не пусто. Мы получили, что для любого непустого открытого подмножества в A_{*,F_A} пересечение его с $i(A)$ не пусто, следовтельно, $i(A)$ плотно в A_{*,F_A}.

3. Базу окрестностей нуля на алгебре A_{*,F_A} можно задать так: $V_i = A_{*,F_A} \cap pr_i^{-1}\{0\}$, где $pr_i: \prod_{i \in I} A/A_i \to A/A_i \; (i \in I)$ – непрерывный канонический гомоморфизм. Тогда очевидно, что $i: A \to A_{*,F_A}$ есть непрерывное отображение топологических алгебр Ли.

Теорема 3.3. Пусть $A, B \in \mathrm{Re}s N$, причем $\langle A, \tau(F_A) \rangle, \langle B, \tau(F_B) \rangle$ – топологические алгебры, на которых топологии заданы с помощью фильтраций F_A, F_B соответственно, при этом фильтрации индексированы одним и тем же множеством индексов. Тогда непрерывное отображение $f: A \to B$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $f_*: A_{*,F_A} \to B_{*,F_B}$.

Доказательство. Заданная на алгебре A фильтрация F_A определяет обратный топологический спектр $\{I; A/A_i\, (i \in I); \varphi_i^j\}$, где для любых $i, j \in I$, таких, что $i \le j$, отображение $\varphi_i^j : A/A_j \to A/A_i$ – канонический гомоморфизм. Если обратный топологический спектр $\{I; B_i\, (i \in I); \psi_i^j\}$, где $\psi_i^j : B/B_j \to B/B_i$, имеет то же множество индексов I, то можно определить гомоморфизм обратных спектров с помощью системы гомоморфизмов $f_i: A/A_i \to B/B_i$, индуцированный заданным отображением $f: A \to B$. Система гомоморфизмов $\{f_i \mid i \in I\}$ такова, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A/A_j & \xrightarrow{\varphi_i^j} & A/A_i \\ f_j \downarrow & & \downarrow f_i \\ B/B_j & \xrightarrow{\psi_i^j} & B/B_j \end{array} \quad (i \le j)$$

коммутативна, поэтому гомоморфизмы $\{f_i \mid i \in I\}$ индуцируют предельный гомоморфизм $\tilde{f}: \prod_{i\in I} A/A_i \to \prod_{i\in I} B/B_i$. В силу коммутативности диаграмм (см. выше) образ элемента $a = (\ldots, a_i, \ldots) \in A_{*,F_A}$ при гомоморфизме $\tilde{f}$ содержится в B_{*,F_B}. Определим f_* как ограничение $\tilde{f}$ на A_{*,F_A}, тогда $f_i \circ \varphi_i(a) = f_i(a_i) = \psi_i \circ f_*(a)$, где φ_i – ограничение проекции $pr_i: \prod_{i\in I} A/A_i \to A/A_i \ (i \in I)$ на A_{*,F_A}, ψ_i – ограничение проекции $pr_i: \prod_{i\in I} B/B_i \to B/B_i \ (i \in I)$ на B_{*,F_B}, что обеспечивает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_{*,F_A} & \to & A/A_i \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_i \\ B_{*,F_B} & \to & B/B_i \end{array}.$$

4. Пронильпотентные алгебры Ли над полем

4.1. Определение пронильпотентной алгебры Ли

Определение 4.1.1. Пусть $\{I; B_i\,(i \in I); \psi_i^j\}$ – обратный топологический спектр нильпотентных алгебр Ли над полем k. Тогда топологическая алгебра Ли B, являющаяся обратным пределом спектра $\{I; B_i\,(i \in I); \psi_i^j\}$, называется пронильпотентной алгеброй Ли над k.

Введем следующее: $A \in pro - N$ означает, что алгебра A есть пронильпотентная алгебра Ли.

4.2. Топологический линейный базис пронильпотентной алгебры Ли

Определение 4.2.1. Пусть A – пронильпотентная алгебра Ли над полем k. Тогда множество $B \subset A$ называется топологическим линейным базисом для A, если выполнены следующие условия:

1) $A = \overline{lin\ B}$, т. е. замыкание линейной оболочки множества B совпадает с A;

2) для любого элемента $b \in B$ верно, что $\overline{lin\ \{B \setminus b\}} \neq A$.

Пусть A – пронильпотентная алгебра Ли над полем k, тогда ее можно представить как обратный предел обратного топологического спектра $\{I; A_i\,(i \in I); \varphi_i^j\}$ топологических нильпотентных алгебр Ли над k.

Для каждого $i \in I$ выберем линейный базис B_i алгебры A_i. Пусть $Z_i = \{a_i^\alpha \mid i \in I, \alpha \in M_i\}$ – множество элементов алгебры A, являющихся ненулевыми прообразами элементов множества B_i при гомоморфизме $\varphi_i: A \to A_i$. При этом прообразы выберем так, чтобы выполнялось следующее условие: для всякой пары индексов $i, j \in I$, таких, что $i \le j$, верно, что $a_i^\alpha = \varphi_i^j(a_j^\alpha)$. И пусть теперь $Z = \bigcup_{i\in I} Z_i$.

Любой ненулевой элемент $f \in A$ единственным образом записывается в виде $f = \sum_{i\in I} \sum_{\alpha \in M_i} \lambda_i^\alpha a_i^\alpha \ (\lambda_i^\alpha \in k,\ a_i^\alpha \in Z_i)$, где для каждого $i \in I$ множество ненулевых коэффициентов λ_i^α конечно или пусто, поэтому множество Z, построенное выше, естественно назвать топологическим линейным базисом для пронильпотентной алгебры A.

4.3. Конструкция свободной пронильпотентной алгебры Ли над полем

Напомним основные определения и результаты теории алгебр Ли, необходимые для дальнейшего.

Пусть $X = \{x_\alpha\}$ – некоторое множество символов, где α пробегает какое-то непустое множество индексов L.

Определение 4.3.1. Слова длины 1, т. е. элементы множества X, назовем правильными словами и произвольно упорядочим. Считая, что правильные слова, длины которых меньше $n, n > 1$, уже определены и упорядочены, назовем слово s длины n правильным, если выполнены следующие условия:

1) $s = uv$, где u, v – правильные слова, причем $u > v$;

2) если $u = u_1 u_2$, то $u_2 \le v$.

Определенные таким образом правильные слова длины n произвольно упорядочим и положим, что они больше правильных слов меньшей длины.

Лемма 4.3.2 [1]. В каждом правильном ассоциативном слове одним и только одним способом можно расставить скобки так, чтобы получившееся при этом неассоциативное слово было правильным.

Теорема 4.3.3 [13]. Пусть $F = F[X]$ свободная алгебра Ли над произвольным полем k с множеством свободных порождающих X. Тогда правильные (неассоциативные) слова в алфавите X составляют линейную базу алгебры F.

Согласно этой теореме, любой элемент $f \in F\ (f \neq 0)$ единственным образом можно представить в виде линейной комбинации правильных неассоциативных слов, т. е. $f=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i s_i$, где $\gamma_i \in k$ $(\gamma_i \neq 0)$, s_i – различные правильные слова.

Пусть $F=F[X]$ – свободная алгебра Ли над полем k, $\gamma_n(F)$ – n-й член нижнего центрального ряда алгебры $F=F[X]$. Тогда $F/\gamma_n(F)$ есть свободная нильпотентная ступени $(n-1)$ алгебра Ли (с множеством свободных порождающих X). Пусть $\varphi_n : F/\gamma_{n+1}(F)\to F/\gamma_n(F)$ – естественные эпиморфизмы $F/\gamma_{n+1}(F)$ на $F/\gamma_n(F)$. Любой элемент $f\in F/\gamma_n(F)$ единственным образом записывается в виде линейной комбинации правильных слов (в упорядоченном алфавите X), длина которых не превосходит n.

Элемент f $(f\neq 0)$ пронильпотентной алгебры $F_*=F_*[X]$, которая является обратным пределом обратного спектра $\{\mathrm{N};\, F/\gamma_n(F)\ (n\in \mathrm{N});\, \varphi_n\}$, единственным образом записывается в виде $\sum_{m\in \mathrm{N}} f_m$, где f_m – линейная комбинация правильных слов длины m в алфавите X.

Определение 4.3.4. Пусть F_* – пронильпотентная алгебра Ли над полем k, $X\subset F_*,\ i: X\to F_*$ – вложение множества X в алгебру F_*. Тогда F_* называется свободной пронильпотентной алгеброй Ли с множеством X свободных топологических порождающих, если выполнены следующие условия:

1) множество $i(X)$ является множеством топологических порождающих алгебры F_*;

2) для любой пронильпотентной алгебры Ли B_* и отображения $\psi : X\to B_*$ существует непрерывный гомоморфизм $\theta: F_*\to B_*$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F_* \\ \psi\downarrow & & \swarrow\theta \\ B_* & & \end{array}$$

коммутативна.

Теорема 4.3.5. Построенная выше алгебра $F_*=F_*[X]$ является свободной пронильпотентной алгеброй Ли (над k) с множеством свободных топологических порождающих X.

Доказательство. Проверим, что алгебра F_*, построенная выше, удовлетворяет условиям определения 2.2.1. Напомним, что $F_*=\varprojlim_{\mathrm{N}} F[X]/\gamma_n(F)$, где $F=F[X]$ – свободная алгебра Ли над полем k с множеством X свободных порождающих, а топология на $F[X]$ задается с помощью фильтрации, определенной членами нижнего центрального ряда.

Пусть $i: X\to F_*$ – отображение множества X в алгебру F_*, при этом $i(X)$ можно считать множеством топологических порождающих алгебры F_*.

Пусть B_* – произвольная пронильпотентная алгебра Ли над полем k и $\psi : X\to B_*$ – отображение множества X в алгебру B_*. Покажем, что существует единственный непрерывный гомоморфизм $\theta: F_*\to B_*$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F_* \\ \psi\downarrow & & \swarrow\theta \\ B_* & & \end{array}$$

коммутативна.

Так как множество $\psi(X)$ является множеством топологических порождающих алгебры B_*, т. е. $B_*=\overline{\langle\psi(X)\rangle}$, то построим алгебру $B=\langle\psi(X)\rangle$. Поскольку пронильпотентную алгебру Ли можно представить в виде обратного предела спектра $\{I;\, B/B_i\ (i\in I);\, \varphi_i^j\}$ для некоторой фильтрации $F_B=\{B_i \mid i\in I\}$, то $B_*=\varprojlim_I B/B_i$.

Далее, для любого индекса $i\in I$ найдется такое натуральное число $n(i)\in \mathrm{N}$, что $B_i\supseteq \gamma_{n(i)}(B)$. Для каждого $i\in I$ выберем $n(i)$, максимальное с этим свойством. Рассмотрим на алгебре B фильтрацию $F_B(\mathrm{N})$, заданную членами нижнего центрального ряда, и обозначим пополнение алгебры B в топологии, заданной с помощью этой фильтрации, через $B_*(\mathrm{N})$.

Так как по построению алгебра F свободна, то найдется единственный гомоморфизм $\delta: F[X]\to B$, определяющий для любого $n\in \mathrm{N}$ естественные отображения $\delta_n : F[X]/\gamma_n(F)\to B/\gamma_n(B)$. Согласно теореме 3.3, существует непрерывный гомоморфизм $\delta_* : F_*[X]\to B_*(\mathrm{N})$, индуцируемый отображениями δ_n.

Покажем существование непрерывного гомоморфизма $\eta: B_*(\mathrm{N})\to B_*$. Поскольку для каждого $i\in I$ можно выбрать индекс

$n(i)$ так, как описано выше, то построим отображения $\eta_{n(i)}: B/\gamma_{n(i)}(B) \to B/B_i$. Множество $\{n(i) \mid i \in I\}$ бесконечно, следовательно, кофинально. Кроме того, если $j > i$, то, согласно выбору индексов $n(i)$ и $n(j)$, выполнено условие $n(j) \geq n(i)$. Отсюда следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B/\gamma_{n(j)}(B) & \xrightarrow{\phi_{n(i)}^{n(j)}} & B/\gamma_{n(i)}(B) \\ \eta_{n(j)} \downarrow & & \downarrow \eta_{n(i)} \\ B/B_j & \xrightarrow{\psi_i^j} & B/B_j, \end{array}$$

откуда и получаем существование гомоморфизма η. Далее, положив $\theta = \eta \circ \delta$, получим требуемый гомоморфизм $\theta: F_* \to B_*$.

5. Свободное произведение алгебр Ли над полем

Напомним определение свободного произведения в категории алгебр Ли.

Определение 5.1. Алгебра Ли A называется свободным произведением алгебр Ли $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ тогда и только тогда, когда можно так задать мономорфизмы $\varphi_\alpha: A_\alpha \to B \ (\alpha \in J)$, что для любой алгебры Ли B и любого набора гомоморфизмов $\psi_\alpha: A_\alpha \to B \ (\alpha \in J)$ существует такой единственный гомоморфизм $\theta: A \to B$, что для любого $\alpha \in J$ выполнено условие $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \theta$.

Вопрос о линейной базе свободного произведения алгебр Ли решен А.И. Ширшовым в статье [13]. Сформулируем некоторые определения, необходимые для понимания теоремы А.И. Ширшова.

Пусть $\{a_\alpha^i \mid i \in I_\alpha\}$ – линейный базис алгебры A_α для каждого $\alpha \in J$. Предположим, что все множества I_α линейно упорядочены при каждом $\alpha \in J$ и что множество J также линейно упорядочено. Положим $a_\alpha^i > a_\beta^j$, если $\alpha > \beta$ или $\alpha = \beta$ и $i > j$.

Определение 5.2. Правильное слово (см. определение 4.3.1) в алфавите $\{a_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$ называется особым, если его ассоциативный носитель (слово, полученное из исходного опусканием скобок) не содержит подслов вида $\{a_\alpha^i a_\alpha^j \mid i > j\}$.

Теорема 5.3 [13]. Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ – набор алгебр Ли над полем k, алгебра $A = \underset{\alpha \in J}{*} A_\alpha$ – свободное произведение алгебр A_α с линейными базами, введенными выше, тогда линейный базис алгебры A состоит из всех особых слов в алфавите $\{a_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$.

Пусть теперь рассматриваемые алгебры A_α аппроксимируются нильпотентными алгебрами, т. е. для всех $\alpha \in J$ выполнено условие $A_\alpha \in \mathrm{Re}s\,N$. Напомним, что алгебра A аппроксимируется нильпотентными алгебрами, если для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует гомоморфизм $\varphi_a: A \to B$ алгебры A в нильпотентную алгебру Ли над k такой, что $\varphi_a(a) \neq 0$ в B. Вопрос об аппроксимируемости свободного произведения алгебр в этом классе был решен А.И. Мальцевым в статье [9], где в п. 4 приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.4. Пусть $A \in Res\,N$, $B \in Res\,N$ и $C = A * B$. Тогда алгебра $C \in Res\,N$.

Если $A = \underset{\alpha \in J}{*} A_\alpha$ – свободное произведение алгебр $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$, то существует канонический эпиморфизм $\chi: A \to \underset{\alpha \in J}{\oplus} A_\alpha$ свободного произведения алгебр Ли на их прямую сумму, определяемый тождественными отображениями алгебр $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ на себя. Ядро эпиморфизма χ называется декартовой подалгеброй свободного произведения алгебр Ли $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$.

В работе Г.П. Кукина [6] изучаются некоторые подалгебры свободного произведения алгебр Ли, в частности доказана теорема о том, что декартова подалгебра свободного произведения алгебр Ли является свободной алгеброй Ли. Для описания системы свободных порождающих декартовой подалгебры, найденной Г.П. Кукиным, сформулируем некоторые определения.

Определение 5.5. Правонормированные слова от элементов множества $R = \{r_i\}$ вида $r_1 r_2 \ldots r_m$, где $m > 1$, $r_1 > r_2$, $r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_m$, называются R_1-словами.

Определение 5.6. R_1-слова (в смысле предыдущего определения) от элементов $\{e_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$ вида $e_j^\alpha e_{i_1}^{\alpha_1} \ldots e_{i_l}^{\alpha_l} e_{j_1}^\alpha \ldots e_{j_m}^\alpha e_{i_{l+1}}^{\alpha_{l+1}} \ldots e_{i_n}^{\alpha_n}$, где $n \geq 1$, $\alpha_t \neq \alpha \ (t = 1, \ldots, n)$, элементы $e_{j_1}^\alpha \ldots e_{j_m}^\alpha$ либо отсутствуют, либо $j_m \leq j$, называются d-словами от $\{e_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$.

Теорема 5.7 [6]. Декартова подалгебра D свободного произведения $A = \underset{\alpha \in J}{*} A_\alpha$ алгебр Ли $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ с линейными базисами

$\{e_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$, соответственно, является свободной алгеброй Ли. Множество d-слов от $\{e_\alpha^i \mid i \in I_\alpha, \alpha \in J\}$ является множеством ее свободных порождающих.

6. Свободное пронильпотентное произведение в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем

Определение 6.1. Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ – семейство пронильпотентных алгебр Ли над полем k и S – пронильпотентная алгебра Ли над k со свойствами:

• $\{\varphi_\alpha : A_\alpha \to S\}$ – семейство морфизмов алгебр A_α в алгебру S;

• S как топологическая алгебра порождена множеством $\bigcup\limits_{\alpha\in J}\varphi_\alpha(A_\alpha)$;

• если $\{\psi_\alpha : A_\alpha \to P\}$ – семейство морфизмов алгебр A_α в произвольную пронильпотентную алгебру Ли P (над k), то существует единственный морфизм $\Phi: S \to P$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & S \\ \psi_\alpha \downarrow & & \swarrow\Phi \\ P & & \end{array}$$

коммутативна.

Тогда алгебра S называется свободным пронильпотентным произведением $\mathop{*}\limits_{\alpha\in J}^{pro} A_\alpha$ пронильпотентных алгебр A_α (в категории пронильпотентных алгебр Ли над полем k).

Пусть A, B – пронильпотентные алгебры Ли над полем k с множествами X, Y топологических порождающих соответственно. Пусть $A^0 = A^0\langle X\rangle$, $B^0 = B^0\langle Y\rangle$ – алгебры Ли над k, с множествами порождающих X, Y соответственно. Рассмотрим алгебру Ли $A^0 * B^0$ – свободное произведение алгебр Ли.

Рассмотрим фильтрации на алгебрах A^0 и B^0, задающие на них топологии, которые и определяют пополнения A и B соответственно. Итак, на A^0 задана фильтрация $F_A = \{A_i \mid i \in I\}$, определяющая на ней пронильпотентную топологию $\tau(A)$. На алгебре B^0 задана фильтрация $F_B = \{B_j \mid j \in J\}$, определяющая на ней пронильпотентную топологию $\tau(B)$.

Известно, что свободное произведение алгебр Ли $P^0 = A^0 * B^0$ – прямая сумма векторных пространств своих подалгебр: $P^0 = A^0 \oplus B^0 \oplus D$, где D – декартова подалгебра, являющаяся свободной алгеброй Ли. Тогда любой элемент $f \in P^0$ имеет вид $f = a + b + d$, где $a \in A^0$, $b \in B^0$, $d \in D$.

Пусть $\Re_A = \{a_k \mid k \in \Lambda(A)\}$ – специальный линейный базис алгебры A, построенный в пп. 4.2, линейно упорядочим его произвольным образом. Аналогично $\Re_B = \{b_l \mid l \in \Lambda(B)\}$ – линейно упорядоченный специальный линейный базис алгебры B. Теперь линейно упорядочим множество $\Re = \Re_A \bigcup \Re_B$, сохранив имеющуюся упорядоченность и положив $a_k > b_l$ для всех индексов.

Согласно теореме 5.7, множество свободных порождающих M декартовой подалгебры D свободного произведения $A * B$ состоит из элементов вида $a_k b_l b_{l_1} \ldots b_{l_\lambda} a_{k_1} \ldots a_{k_\mu}$, где расстановка скобок правая, а $k \le k_1 \le \ldots \le k_\mu$, $l \le l_1 \le \ldots \le l_\lambda$, $\mu \ge 0$, $\lambda \ge 0$.

Объявим элементы множества M элементами веса 1, тогда множество порождающих n-го члена нижнего центрального ряда $\gamma_n(D)$ декартовой подалгебры D будет состоять из элементов веса $\ge n$ в алфавите M.

Определение 6.2. Пусть A, B – алгебры Ли над полем k. Свободным c-нильпотентным произведением $A \mathop{*}\limits_{N_c} B$ называется факторалгебра $A * B / \gamma_{c+1}(D)$ свободного произведения $A * B$ алгебр Ли по $(c+1)$-му члену нижнего центрального ряда декартовой подалгебры D.

Рассмотрим свободное c-нильпотентное произведение $A \mathop{*}\limits_{N_c} B = A * B / \gamma_{c+1}(D) = A \oplus B \oplus D / \gamma_{c+1}(D) = A \oplus B \oplus D_c$. В силу строения порождающих алгебр D и $\gamma_{c+1}(D)$ подалгебра D_c – свободная нильпотентная ступени $(c+1)$ алгебра Ли.

Определим на алгебре $A^0 * B^0$ фильтрацию, задающую на ней пронильпотентную топологию.

Построим множество индексов $\Lambda = I \times J \times \mathrm{N}$, где I – множество, индексирующее фильтрацию на алгебре A^0, J – множество, индексирующее фильтрацию на алгебре B^0, N – множество натуральных чисел, и введем на нем частичный порядок следующим образом: $(i_1;\ j_1;\ n_1) \ge (i_2;\ j_2;\ n_2)$ в том и только том случае, если выполнены условия: $i_1 \ge i_2$, $j_1 \ge j_2$, $n_1 \ge n_2$. В силу индуктивности множеств I, J, N, множество Λ также будет индуктивным [4].

Пусть $\{C_{i,j,n} \mid (i;\ j;\ n) \in \Lambda\}$ – множество идеалов алгебры $A^0 * B^0$, где $C_{i,j,n}$ – это идеал, порожденный компонентами $\left\langle A_i;\ B_j;\ \gamma_n(D) \right\rangle$.

Лемма 6.3. Для всякого неравного нулю элемента $d \in D$ можно подобрать пару индексов $(i;\ j)$, где $i \in I$, $j \in J$ так, что при гомоморфизме $\delta : A * B \to A/A_i * B/B_j$ образ элемента d не равен нулю.

Доказательство. Любой ненулевой элемент d декартовой подалгебры D представим в виде линейной комбинации правильных слов в алфавите M, построенном выше. Следовательно, в запись элемента d может входить лишь конечное число элементов множества $\Re$. Обозначим подмножество элементов из $\Re_A$, входящих в запись элемента d, через $\widetilde{\Re}_A$, а подмножество элементов из $\Re_B$, входящих в запись элемента d, через $\widetilde{\Re}_B$. Выберем такой индекс $i \in I$, что при гомоморфизме $\varphi_i : A \to A/A_i$ для всех $a \in \widetilde{\Re}_A$ выполнено условие $\varphi_i(a) \neq 0$. Аналогичным образом выберем индекс $j \in J$.

Рассмотрим свободное с-нильпотентное произведение $A/A_i \underset{N_c}{*} B/B_j$, его можно представить в виде прямой суммы векторных пространств $A/A_i \oplus B/B_j \oplus D_{ij}$, где D_{ij} – свободная нильпотентная ступени $(c+1)$ алгебра Ли. Тогда при гомоморфмизме $\delta : A * B \to A/A_i * B/B_j$ образ элемента d не равен нулю.

Лемма 6.4. Система идеалов $\{C_{i,j,n} \mid (i;\ j;\ n) \in \Lambda\}$ задает на алгебре $A^0 * B^0$ фильтрацию.

Доказательство. Необходимо проверить выполнение следующих свойств:

- $\forall\ (i;\ j;\ n) \in \Lambda$ алгебра $(A^0 * B^0)/C_{i;\,j;\,n} \in N$;
- $\forall\ (i_1;\ j_1;\ n_1),\ (i_2;\ j_2;\ n_2) \in \Lambda$ найдется такой индекс $(i;\ j;\ n) \in \Lambda$ $((i_1;\ j_1;\ n_1) \leq \leq (i;\ j;\ n)$, $(i_2;\ j_2;\ n_2) \leq (i;\ j;\ n))$ что $C_{i_1;\,j_1;\,n_1} \bigcap C_{i_1;\,j_2;\,n_2} \supseteq C_{i;\,j;\,n}$;
- $\bigcap\limits_{(i,\,j,\,n) \in \Lambda} C_{i;\,j;\,n} = 0$.

Первые два условия выполняются очевидным образом в силу того, что системы идеалов $\{A_i \mid i \in I\}$ и $\{B_j \mid j \in J\}$ являются фильтрациями на A^0 и B^0 соответственно.

Предположим, что $\bigcap\limits_{(i,\,j,\,n) \in \Lambda} C_{i;\,j;\,n} \neq 0$, то есть существует неравный нулю элемент $f \in \bigcap\limits_{(i,\,j,\,n) \in \Lambda} C_{i;\,j;\,n}$. При этом $f = a + b + d$, где $a \in A$, $b \in B$, $d \in D$. Нетрудно проверить, что $a = 0$ и $b = 0$. Пусть $d \neq 0$. Но тогда, согласно лемме 6.3, можно так подобрать пару индексов $(i;\ j)$, где $i \in I$, $j \in J$ так, что при гомоморфизме $\delta : A * B \to$ $\to A/A_i * B/B_j$ образ элемента d не равен нулю. Тогда можно найти такой индекс $n \in \mathrm{N}$, что $d \notin \gamma_n(D)$ и, следовательно, $d \notin C_{i;\,j;\,n}$, что и доказывает утверждение леммы.

Теорема 6.5. Пусть A, B – пронильпотентные алгебры Ли над полем k с множествами X, Y топологических порождающих соответственно. Если $P^0 = A^0 * B^0$ – свободное произведение алгебр Ли $A^0 = A^0\left\langle X \right\rangle$ и $B^0 = B^0\left\langle Y \right\rangle$, тогда алгебра $P = \varprojlim_\Lambda P^0 / C_{i;\,j;\,n}$, где на алгебре P^0 фильтрация задана системой идеалов $\{C_{i,j,n} \mid (i;\ j;\ n) \in \Lambda\}$, определенной выше, является свободным пронильпотентным произведением $A \overset{pro}{*} B$ пронильпотентных алгебр Ли.

Доказательство. Пусть заданы непрерывные вложения $i_A : A \to P$, $i_B : B \to P$. Рассмотрим алгебры Ли $A^0 = A^0\left\langle X \right\rangle$, $B^0 = B^0\left\langle Y \right\rangle$ и $P^0 = A^0 * B^0$ – свободное произведение алгебр Ли.

Если E – произвольная пронильпотентная алгебра Ли над полем k с множеством топологических порождающих Z, то ее можно представить как обратный предел некоторого спектра, где на алгебре Ли $E^0 = E^0\left\langle Z \right\rangle$ с множеством порождающих Z задана пронильпотентная топология. В силу того, что алгебра P^0 является свободной алгеброй Ли, для заданных вложений $j_A^0 : A^0 \to E^0$, $j_B^0 : B^0 \to E^0$ существует единственный гомоморфизм $\delta^0 : P^0 \to E^0$, такой, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A^0 & \xrightarrow{i_A^0} & P^0 \\ j_A^0 \downarrow & & \swarrow \delta^0, \\ E^0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B^0 & \xrightarrow{i_B^0} & P^0 \\ j_B^0 \downarrow & & \swarrow \delta^0. \\ E^0 & & \end{array}$$

Если $\delta^0 : P^0 \to E^0$ – гомоморфизм алгебр, на которых задана пронильпотентная топология, то по теореме 3.3 его можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\delta : P \to E$ пронильпотентных алгебр Ли. Для применения теоремы необходимо проверить, что алгебры P^0, $E^0 \in \mathrm{Re}\, sN$. Алгебра $P^0 \in \mathrm{Re}\, sN$ в силу теоремы 1.5 как свободное произведение алгебр с пронильпотентной топологией. Алгебра же $E^0 \in \mathrm{Re}\, sN$ в силу задания на ней пронильпотентной топологии, определенной фильтрацией из леммы 6.4. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бокуть Л. А.* Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем для алгебр Ли // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 5. С. 145–152.

[2] *Браун К. С.* Когомологии групп. М. : Наука, 1987. 384 с.

[3] *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М. : Наука, 1968. 272 с.

[4] *Бурбаки Н.* Теория множеств. М. : Мир, 1965. 456 с.

[5] *Кузьмин Ю. В.* О теоремах типа теоремы Нильсена-Шрайера в алгебре рядов от некоммутирующих переменных // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27. № 2. С. 91–103.

[6] *Кукин Г. П.* О декартовой подалгебре свободной лиевой суммы алгебр Ли // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 6. С. 701–713.

[7] *Кукин Г. П.* О свободных произведениях ограниченных алгебр Ли // Мат. сб. 1974. Т. 95. № 1. С. 53–83.

[8] *Кукин Г. П.* Подалгебры свободной лиевой суммы алгебр Ли с объединенной подалгеброй // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 1. С. 59–86.

[9] *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.

[10] *Тавадзе А. Д., Шмелькин А. Л.* Подгруппы свободных пронильпотентных групп // Сообщ. АН Груз. ССР. 1979. Т. 93. С. 277–279.

[11] *Швед Е. А.* О подалгебрах свободного произведения в классе пронильпотентных алгебр Ли // Вестн. Ом. ун-та. 2004. № 1. С. 8–10.

[12] *Швед Е. А.* О пронильпотентных алгебрах Ли // Вестн. Ом. ун-та. 2001. № 4. С. 16–18.

[13] *Ширшов А. И.* Об одной гипотезе теории алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3. № 2. С. 297–301.

[14] *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45. № 2. С. 113–122.

[15] *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Мат. сб. 1954. Т. 34. № 1. С. 81–88.

[16] *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33. № 2. С. 441–452.

[17] *Bokut` L. A., Kukin G. P.* Algorithmic and Combinatorial Algebra. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 384 p.