УДК 517.929

О ДИСКРЕТНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

© А.В. Васильев

Ключевые слова: разностное уравнение; дискретное уравнение; символ.

Рассматривается общее линейное разностно-дискретное уравнение на вещественной прямой и на полуоси и описываются условия однозначной разрешимости простейшего класса таких уравнений в пространстве L_2. Исследование опирается на периодический аналог краевой задачи Римана.

1. Рассмотрим общее линейное разностное уравнение вида

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x)u(x+\beta_k)=v(x), \quad x\in D, \tag{1}$$

где D – это $\mathbf{R}$ или положительная полуось $\mathbf{R}_+$ для континуального случая и $\mathbf{Z}$ и дискретная положительная полуось $\mathbf{Z}_+$ для дискретного случая, $\{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty}\subset D$ – заданная числовая последовательность. Для континуального случая мы используем термин «разностное уравнение», а для дискретного – «дискретное уравнение».

Ситуации сильно различаются в зависимости от того, рассматриваем ли мы это уравнение на всей прямой или только на полуоси; здесь мы рассмотрим случай $\mathbf{Z}_+$.

Такие уравнения возникают во многих прикладных задачах, например, в теории управления и цифровой обработки сигналов, и, следовательно, целесообразно исследование их разрешимости. В качестве исходного функционального пространства выбирается $L_2(D)$, хотя можно рассматривать эти уравнения и в более общих пространствах $L_p(D)$. Ключевую роль в нашем исследовании будет играть специальный (лакунарный) ряд Фурье

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x)e^{i\beta_k\cdot\xi}, \tag{2}$$

в предположении, что ряд (2) сходится почти всюду.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $\sigma(x,\xi)$ называется символом уравнения (1) или символом дискретно-разностного оператора

$$\mathcal{D}:\ u(x)\longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x)u(x+\beta_k), \quad x\in D.$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что функция $\sigma(x,\xi)$ – периодическая функция по переменной ξ, поскольку $\{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty}\subset\mathbf{Z}_+$. Ее период обозначим $2T$, и, если $\{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty}=\mathbf{Z}_+$, то $T=\pi$.

2. Первым шагом будет исследование следующего дискретного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k u(\tilde{x}+\beta_k)=v(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in\mathbf{Z}_+, \quad \{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty}\subset\mathbf{Z}_+, \tag{3}$$

или, другими словами, нахождение условий обратимости для оператора

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}_0}: \ u(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(\tilde{x}_0) u(\tilde{x}+\beta_k), \quad \tilde{x} \in \mathbf{Z}_+, \tag{4}$$

где точка $\tilde{x}_0 \in \mathbf{Z}_+$ фиксирована.

Для каждого оператора (4) определяется символ

$$\sigma(\tilde{x}_0, \xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(\tilde{x}_0) e^{i\beta_k \cdot \xi},$$

и вводится

О п р е д е л е н и е 2. Символ $\sigma(\tilde{x}, \xi)$ называется эллиптическим, если $\sigma(\tilde{x}, \xi) \neq 0$, $\forall \tilde{x} \in \mathbf{Z}_+$, $\xi \in [-T, T]$.

Далее рассматривается более общее уравнение с разностно-дискретными операторами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ с постоянными коэффициентами и двумя проекторами $P_\pm$ на полуоси $\mathbf{Z}_\pm$. Более подробно, обозначим

$$\mathcal{A}: \ u(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k u(\tilde{x}+\beta_k), \ \mathcal{B}: \ u(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k u(\tilde{x}+\beta_k),$$

$$\tilde{x} \in \mathbf{Z}_+, \ \{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbf{Z}_+,$$

и рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-)U = V \tag{5}$$

в пространстве $L_2(\mathbf{Z})$. Символы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ будем обозначать $\sigma_{\mathcal{A}}(\xi)$, $\sigma_{\mathcal{B}}(\xi)$.

Хорошо известно, что уравнение (3) эквивалентно уравнению (5) с $\mathcal{B} = I, I$ – тождественный оператор; в связи с этим изучается уравнение (5).

Вид операторов $P_\pm$ в образах Фурье был найден в работах [1-3]. Здесь приводится основной результат для уравнения (5).

Т е о р е м а. *Пусть $\sigma_{\mathcal{A}}(\xi), \sigma_{\mathcal{B}}(\xi)$ – эллиптические символы, непрерывные на $[-T, T]$. Уравнение (5) однозначно разрешимо в пространстве $L_2(\mathbf{Z})$ для произвольной правой части $V \in L_2(\mathbf{Z})$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-T}^{T} d \arg(\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi)\sigma_{\mathcal{B}}(\xi)) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев А.В.* Периодический аналог краевой задачи Римана // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5. С. 2466-2468.

2. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. 2013. V. 3. № 1. P. 84-93.

3. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Discrete singular integrals in a half-space // In: Current Trends in Analysis and Its Applications. Proc. 9th ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2013. Birkhäuser, Basel, 2015. P. 663-670.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Липецкой области, проект № 14-41-03595-р-центр-а.

Поступила в редакцию 28 мая 2015 г.

Vasilyev A.V. ON DISCRETE-DIFFERENCE EQUATIONS

One considers a general difference-discrete equation on a real line and a half-axis and describes conditions for a unique solvability for simplest class of such equations in the space L_2 . This studying is based on a periodic analogue of the Riemann boundary value problem.

Key words: difference equation; discrete equation; symbol.

Васильев Александр Владимирович, Национальный исследовательский Белгородский государственный университет, г. Белгород, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: alexvassel@gmail.com

Vasilyev Aleksandr Vladimirovich, National Research Belgorod State University, Belgorod, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mathematical Analysis Department, e-mail: alexvassel@gmail.com

УДК 517.951

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© **В.Б. Васильев**

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение; многомерная краевая задача Римана; волновая факторизация; сложная граница.

Описывается конструкция общего решения модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в области многомерного пространства, представляющей собой объединение выпуклых конусов.

1. При исследовании псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с краем важную роль играет локальный принцип, утверждающий, грубо говоря, что фредгольмовость уравнения вытекает из обратимости локальных представителей оператора, входящего в уравнение. Таким образом, для описания фредгольмовости уравнения нужно знание локальных представителей оператора, входящего в уравнение, в каждой точке многообразия (включая край) и условия обратимости этих локальных операторов. Такие локальные представители мы называем модельными, а области m-мерного пространства, диффеоморфные окрестности точки многообразия – каноническими. В зависимости от типа точки многообразия каноническая область выглядит по-разному, возможные варианты: $\mathbf{R}^m$ для внутренней точки, $\mathbf{R}^m_+$ для граничной точки гладкости, $C^a_+ = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$, для конуса и т.д.

2. Нас будет интересовать разрешимость уравнения

$$(Au)(x) = f(x),\ x \in C_+, \tag{1}$$

в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(C_+)$, где C_+ – m-мерный конус, состоящий из объединения непересекающихся выпуклых конусов, $C_+ = \cup_{j=1}^n C_j$, где конус C_j имеет вид $C_+^{a_j}$ после поворота на соответствующий угол α_j, A – модельный эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка α [1, 2]:

$$(Au)(x) = \int\limits_{C_+}\int\limits_{\mathbf{R}^m} A(\xi)\widetilde{u}(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}d\xi dy.$$