

УДК 539.3, 550.3, 517.968.28, 517.956.224

О детектировании шероховатых границ

Е.Б. Сибиряков

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

В работе использована новая вычислительная технология решения краевых задач смешанного типа для упругих стационарных колебаний, основанная на модификации метода граничных элементов. В широком диапазоне частот вычисляли перемещения двухслойной среды под действием сосредоточенного поверхностного источника в случае гладкой границы, а также границы с малой амплитудой шероховатости. Показано, что сигнал, порожденный осесимметричным источником, после отражения от шероховатой границы может получить угловые компоненты, которые не возникают при наличии гладких границ и сравнительно медленно затухают при удалении от источника. Фактически эти компоненты являются медленными волнами. Это качественное отличие отражательных свойств шероховатых границ от гладких может быть использовано для их детектирования.

Ключевые слова: метод граничных элементов, упругие стационарные колебания, шероховатые границы, дифракция, медленные волны

On the detection of rough interfaces

Е.Б. Sibiriakov

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

A new numerical method of solving mixed-type boundary value problems for elastic stationary oscillations has been used, which is based on a boundary element method modification. A full displacement field induced by a two-layered medium with rough and smooth interfaces is calculated in a wide frequency range. It is shown that the signal from an axially symmetric source may contain transverse components after the reflection from the rough interface. These components caused by diffraction only from rough surfaces slowly attenuate with distance from the source and produce slow waves in the real time domain. This qualitative difference in the reflection properties of rough interfaces can be used for their detection.

Keywords: boundary element method, elastic stationary oscillations, rough interfaces, diffraction, slow waves

1. Введение

Шероховатость низкоконтрастной границы раздела можно назвать микронеоднородностью второго рода. В отличие от объемных контрастных включений с огромными перепадами физико-механических свойств компонентов, быстрое изменение нормали может привести к неожиданным отражательным свойствам слабоконтрастных слоев. Проблема отражения от малоамплитудных шероховатых поверхностей интересна не только для сейсмологии (для понимания природы глубоко залегающих границ), но и сейсморазведки (выявления эродированных границ), а также для акустики (в том числе для выявления дефектов неразрушающими методами). В связи с этим представляет несомненный интерес поиск не только количественных, но и качественных различий полных волновых полей при отра-

жении от гладкой и шероховатой поверхностей. Существенная часть информации о структуре слоисто-однородных сред получается при обработке данных об отраженных волнах. Однако процедуры обработки полагают границы гладкими. В связи с этим возникает вопрос, в каких случаях обработка этих данных может привести к предположению о том, что граница является шероховатой? Для ответа на этот вопрос необходимо эффективно решать краевые задачи на подобных поверхностях.

Один из первых эффективных инструментов вычисления отражения от негладких поверхностей заключался в использовании лучевого разложения [1]. Однако в случае достаточно быстрого изменения вектора нормали к поверхности это давало очень большие погрешности, чего авторы не скрывали. Аналитические

методы [1], использующие метод малых возмущений (метод Рэлея, Кирхгоффа или их модификации), предполагают предельно простую геометрию поверхности раздела. Главное, чтобы вектор нормали к поверхности изменялся не очень быстро. Использование метода конечных элементов для подобных границ раздела затруднительно, поскольку приводит к плохо обусловленным системам, что, в свою очередь, приводит к получению решений с сомнительной достоверностью [2] даже после проведения регуляризационных процедур.

Метод граничных интегральных уравнений предназначен для того, чтобы найти компоненты вектора перемещений U_i (либо нагрузок p_i), удовлетворяющие как уравнению стационарных колебаний (1), так и граничным условиям:

$$\Delta U_i + k^2 U_i + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad}_i (\text{div} U) = 0, \quad k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}, \quad (1)$$

где λ и μ — упругие модули Ламе; ρ — плотность тела; ω — циклическая частота стационарных колебаний. Решение ищется в виде свертки с некоторым ядром, которое аналитически удовлетворяет уравнению в любой фиксированной точке замкнутого объема x_0 . Если у нас есть поверхность, на которой нужно выполнить граничные условия, то суммирование проводится в точках этой поверхности x (бегущая точка):

$$U_i(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int M_{ik}(x_0, x) F_k(x) dS_x. \quad (2)$$

Тензор $M_{ik}(x_0, x)$ удовлетворяет системе (1) в фиксированной точке объема x_0 . Если, например, на поверхности задан вектор перемещений, то фиксированную точку x_0 следует устремить на поверхность. В этом случае (2) будет системой линейных интегральных уравнений (т.е. множества x_0 и x будут совпадать). Это даст возможность вычислить компоненты вектора потенциала F_k . Если же вектор потенциала уже известен, то это даст возможность в соответствии с (2) вычислить перемещения в любой точке внутри объема, ограниченного поверхностью. Если поверхность является бесконечно удаленной, то на ней потенциал автоматически равен нулю. По этой причине упомянутый выше метод может представлять интерес для подавления ложных отражений.

Классический подход [3] предлагает в трехмерном случае выбрать в качестве $M_{ik}(x_0, x)$ тензор фундаментальных решений для пространства:

$$M_{ik}(x_0, x) = \Gamma_{ik}(x_0, x) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\cos(kr)}{r} \delta_{ik} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[\frac{\cos(kr)}{r} - \frac{\cos(\gamma kr)}{r} \right] \right), \quad (3)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; r — расстояние между фиксированной и бегущей точками; $\gamma = \sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$;

x_i — проекции вектора, направленного из фиксированной точки в бегущую, на оси декартовой системы координат.

В статике (т.е. при $kr \ll 1$) этот же тензор имеет вид

$$\Gamma_{ik}(x_0, x) = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \times \left((\lambda + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (\lambda + 3\mu) \delta_{ik} \right) \frac{1}{r(x, y)}. \quad (4)$$

Его недостатком является то, что тензор нагрузок от него дает, кроме δ -функции, еще и неинтегрируемую особенность. В самом деле, нагрузки от (4), вычисленные в фиксированной точке, имеют вид

$$\mathbf{P}^{x_0}(\Gamma_{ik})(x_0, x) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \times \left\{ \left[\mu \delta_{ik} + 3(\lambda + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{r} + \mu \left[\cos(\mathbf{n}_0, x_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} - \cos(\mathbf{n}_0, x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} \right] \right\}, \quad (5)$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичная нормаль в фиксированной точке поверхности.

В результате, если на поверхности заданы нагрузки, то для нахождения потенциала (с помощью которого можно будет найти перемещения в любой точке объема), получится двумерное сингулярное интегральное уравнение (т.е. уравнение, которое содержит неинтегрируемую особенность). Интеграл в этом случае нужно понимать в смысле главного значения (из-за последнего члена в (5)). Численное решение подобного рода уравнений достаточно затруднительно и представляет отдельную проблему. На практике это означает существенную потерю точности. При этом такой прием, как введение сопряженного оператора [4], особой пользы не приносит.

2. Формулировка задач

Верхняя свободная поверхность — плоскость ($z = 0$). В качестве границы раздела использовалась либо плоскость ($z = -0.5$), либо шероховатая поверхность ($z = -0.5 + 0.01(\cos(10\pi x) + \sin(10\pi y))$) (рис. 1). Параметр k изменяется от 0.1 до 20, что соответствует эффективной длине S волны от 20π до $\pi/10$. Упомянутая частотная область охватывает диапазон от квазистатики до лучевой динамики. Нагрузка на верхней поверхности осесимметрична и имеет только нормальную компоненту, равную $p_n = \exp(-1000r^2)$, $r \in [0, 1]$. Упругие константы верхнего слоя: $\lambda = \mu = \rho = 1$. Нижний слой имеет такие же параметры, за исключением $\mu^- = 1.2$. Условия на границе раздела — непрерывность вектора перемещений и нулевая векторная сумма вектора нагрузок. Использовались цилиндрические координаты с

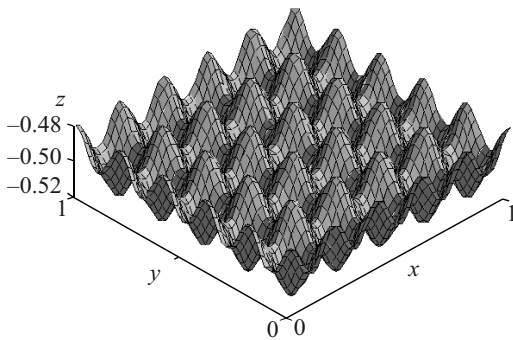


Рис. 1. Шероховатая поверхность раздела $z = -0.5 + 0.01 \times (\cos(10\pi x) + \sin(10\pi y))$

равномерной сеткой 25×25 на каждой из поверхностей. На верхней поверхности вычислялся вектор перемещений, порожденный нагрузкой и двухслойной средой при различных частотах k .

Видно, что данная задача сводится к краевой задаче смешанного типа (третьего рода) по причине необходимости удовлетворения условий на границе раздела как по перемещениям, так и по нагрузкам. Кроме того, очень быстро меняется вектор нагрузки на верхней (свободной) поверхности (моделируется сосредоточенный источник) и вектор нормали на границе раздела. Главным недостатком использования фундаментальных решений для пространства является наличие неинтегрируемого ядра, что ведет к существенной потере точности, особенно в случае быстро изменяющейся нормали к поверхности.

В [5] краевые задачи смешанного типа решались с помощью модифицированного метода граничных интегральных уравнений для статических задач. Модификация заключалась в использовании в качестве ядер соответствующим образом ориентированных статических фундаментальных решений для полупространства. Более сложная конструкция ядер по сравнению с обычными ядрами для безграничного пространства была оправдана лучшей обусловленностью линейных уравнений, соответствующих интегральным уравнениям. Линейные системы для нахождения вектора потенциала, к которым свелись интегральные уравнения, оказались хорошо обусловленными, несмотря на то что такие задачи формально считаются некорректными. Использование модифицированных ядер позволяет существенно расширить класс некорректных задач, которые можно решать без применения регуляризационных процедур. Теперь необходимо обобщить указанный подход и построить гладкие и финитные ядра для случая стационарных колебаний.

3. Построение новых ядер

Можно было бы предположить, что при использовании в качестве ядер фундаментальных решений для

полупространства, можно избежать главного недостатка, связанного с появлением неинтегрируемого ядра, что приводит одновременно и к потере точности, и к повышению числа обусловленности системы. На любой поверхности есть одно выделенное направление — вектор внешней нормали к поверхности, на которой заданы граничные условия. По этой причине в качестве координаты $x_1 = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ выбирается скалярное произведение радиус-вектора, начало которого находится в фиксированной точке объема, а конец — в бегущей точке поверхности, на нормаль в бегущей точке. В зависимости от знака x_1 ядрами будут решения для верхнего или нижнего полупространства. Также на поверхности есть два взаимно ортогональных касательных направления $\mathbf{e}_{\tau_1}, \mathbf{e}_{\tau_2}$. Обозначим

$$x_2 = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_{\tau_1}), x_3 = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_{\tau_2}), r_\tau = \sqrt{x_2^2 + x_3^2},$$

$$x_2 = r_\tau \cos \varphi, x_3 = r_\tau \sin \varphi. \quad (6)$$

Однако тензор Грина для полупространства в цилиндрических координатах [3] в случае стационарных колебаний сохраняет практически все недостатки аналогичного тензора для безграничного пространства. Решение задачи о нормальном ударе по полупространству (задача Лэмба) имеет вид

$$U_n = \int_0^\infty J_0(k_r r_\tau) \frac{k_r^2}{2\pi\mu R(k_r, k)} (2k_r^2 \exp(-|x_1| v_s) - (2k_r^2 - k^2) \exp(-|x_1| v_p)) dk_r,$$

$$U_r = \int_0^\infty J'_0(k_r r_\tau) \frac{k_r^2}{2\pi\mu R(k_r, k)} (-2v_s v_p \exp(-|x_1| v_s) + (2k_r^2 - k^2) \exp(-|x_1| v_p)) dk_r. \quad (7)$$

При этом $v_s = \sqrt{k_r^2 - k^2}$, $v_p = \sqrt{k_r^2 - \gamma^2 k^2}$; k_r — параметр интегрирования; $R = 4k_r^2 \sqrt{k_r^2 - k^2} \sqrt{k_r^2 - \gamma^2 k^2} - (2k_r^2 - k^2)^2$ — знаменатель Рэлея; $\gamma^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$; $J_0(k_r r_\tau)$ — функция Бесселя первого рода. Упомянутые недостатки очевидны. Во-первых, интервал интегрирования бесконечен (потеря точности). Во-вторых, в некоторой точке знаменатель Рэлея обращается в ноль (еще большая потеря точности).

Модернизация ядер производилась в два этапа: замена бесконечного промежутка интегрирования на конечный, затем сдвиг по пространственным частотам. Первый этап в итоге дал существенное (на несколько порядков) повышение точности вычисления ядер. Дело в том, что дельта-функция представляет собой хороший инструмент для аналитического моделирования. Однако при использовании численных методов нагрузку лучше сосредотачивать не в точке, поскольку численное моделирование ограничено пространственными частотами Найквиста (обратно пропорциональными шагу разбиения), а на одной (или нескольких) малых площадках. Это означает, что интегрировать в (7) нужно не до

бесконечности, а до обратного характерного размера разбиения. Другими словами, вместо классической поверхностной дельта-функции при использовании численных методов правильнее применять ее конечный аналог, имеющий ограниченный пространственный спектр (т.е. фактически это дельта-функция, «размазанная» на несколько элементарных ячеек). Заметим, что (7) есть отклик по перемещениям на нормальную нагрузку, представленную в виде (касательные компоненты равны нулю):

$$\delta(S) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^N k_r J_0(k_r r_\tau) dk_r. \quad (8)$$

Сказанное выше о конечном аналоге дельта-функции означает, что в (8) предел интегрирования будет не бесконечность, а некоторое конечное число N . Это означает, что «излишнюю» обусловленность мы «поменяем» на дополнительную точность.

Чтобы избавиться от проблем, связанных с обращением в ноль знаменателя Рэлея, нужно выбрать иное приближение к дельта-функции, поскольку ее представление не единственно. Например,

$$\delta(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r},$$

в то же время

$$\delta(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\cos(kr)}{r}.$$

Если первое представление более уместно для статики, то второе — для стационарных колебаний. Каким образом можно исправить (8), чтобы вычислять ядра быстро, точно и достоверно? Ответить на этот вопрос можно с помощью следующей аналогии. Отличие $1/r$ от $\cos(kr)/r$ в том, что первая формула удовлетворяет уравнению Лапласа, а вторая — Гельмгольца. Параметр уравнения Гельмгольца k во второй формуле примерно одинаковым образом действует на все три измерения. Поскольку в (8) δ -функция поверхностная, т.е. r_τ включает в себе две координаты, а не одну, то представляется целесообразным скорректировать (8), учитывая предыдущие замечания о пределе интегрирования, следующим образом:

$$\delta_1(S) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^N k_r J_0(r_\tau \sqrt{k_r^2 + 2k^2}) dk_r. \quad (9)$$

Отметим, что существенное повышение точности следует из гладкости и финитности ядер. Это дает возможность изменить (7) и получить два из пяти членов матрицы ядер:

$$U_n = \int_0^N J_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_2}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times (2v_3^2 \exp(-|x_1| v_1) - (2k_r^2 + 3k^2) \times \\ \times \exp(-|x_1| v_2)) dk_r, \quad (10)$$

$$U_r = \int_0^N J_0'(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_2}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times (-2v_1 v_3 \exp(-|x_1| v_1) + \\ + (2k_r^2 + 3k^2) \exp(-|x_1| v_2)) dk_r, \\ v_1 = \sqrt{k_r^2 + k^2}, v_2 = \sqrt{k_r^2 + k^2(2 - \gamma^2)}, \\ v_3 = \sqrt{k_r^2 + 2k^2}, \quad (11) \\ R_1 = 4(k_r^2 + 2k^2) \sqrt{k_r^2 + k^2} \sqrt{k_r^2 + k^2(2 - \gamma^2)} - \\ - (2k_r^2 + 3k^2)^2.$$

Важным здесь является то, что знаменатель R_1 нигде не обращается в ноль (за исключением случая $k = 0$ (статика), где нужно раскрыть неопределенность). Кроме того, решение (10) ограничено при $x_1 = r_\tau = 0$. Если число N устремить к бесконечности, то (10) будет стремиться к классическому решению об отклике упругого полупространства на сосредоточенную нормальную нагрузку. При этом оно будет более точно вычисляемым.

Осталось использовать решение для касательного монохромного удара по полупространству, изыщно изложенное в [6]. Проведем те же вычисления, только будем искать отклик не на нагрузку (8), а на (9) и используем более удобную систему обозначений. Если $x_1 > 0$ и касательная нагрузка прикладывается в направлении $\mathbf{e}_{\tau_1}$ (оно же совпадает с направлением оси x_2), то вектор перемещений в полупространстве имеет вид:

$$\mathbf{M}_{x2} = \int_0^N \left\{ \frac{k_r \exp(-|x_1| v_1)}{2\pi\mu v_1} \times \right. \\ \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ J_0(v_3 r_\tau) + J_0''(v_3 r_\tau) e_r \cos \varphi \\ J_0''(v_3 r_\tau) e_\varphi \sin \varphi \end{array} \right] + \\ + \frac{k_r (v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_1)}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times \left[\begin{array}{c} -v_3 J_0'(v_3 r_\tau) e_n \cos \varphi \\ v_1 J_0''(v_3 r_\tau) e_r \cos \varphi \\ v_1 [J_0(v_3 r_\tau) + J_0''(v_3 r_\tau)] e_\varphi \sin \varphi \end{array} \right] - \\ - \frac{2k_r v_1 v_3 \exp(-|x_1| v_2)}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times \left[\begin{array}{c} -v_2 J_0'(v_3 r_\tau) e_n \cos \varphi \\ v_3 J_0''(v_3 r_\tau) e_r \cos \varphi \\ v_3 [J_0(v_3 r_\tau) + J_0''(v_3 r_\tau)] e_\varphi \sin \varphi \end{array} \right] \Big\} dk_r, \quad (12)$$

где e_r и e_φ соответствуют радиальному и азимутальному направлению цилиндрической системы координат, при этом связь с координатами, использовавшимися ранее, определяется соотношениями (6). Теперь найдем все ненулевые компоненты конечного аналога тензора фундаментальных решений для полупространства.

Если перейти к компонентам $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{r_\tau}, \mathbf{e}_\varphi$ (соотношение между $\mathbf{e}_{r_\tau}, \mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_{\tau_1}, \mathbf{e}_{\tau_2}$ определяется (6)), то увидим, что

$$M_{nn} = \int_0^N J_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_2}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times (2v_3^2 \exp(-|x_1| v_1) - \\ - (v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_2)) dk_r, \quad (13)$$

$$M_{nr} = \int_0^N J'_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_3}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times (-2v_1 v_2 \exp(-|x_1| v_1) + \\ + (v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_2)) dk_r, \quad (14)$$

$$M_{rm} = \int_0^N J'_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_3}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times (2v_1 v_2 \exp(-|x_1| v_2) - \\ - (v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_2)) dk_r, \quad (15)$$

$$M_{rr} = \int_0^N J''_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r v_1}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times ((2v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_1) - \\ - 2v_3^2 \exp(-|x_1| v_2)) dk_r + \\ + \int_0^N (J_0(v_3 r_\tau) + J''_0(v_3 r_\tau)) \frac{k_r \exp(-|x_1| v_1)}{2\pi\mu v_1} dk_r, \quad (16)$$

$$M_{\varphi\varphi} = \int_0^N -(J_0(v_3 r_\tau) + J''_0(v_3 r_\tau)) \frac{k_r v_1}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \times \\ \times ((v_1^2 + v_3^2) \exp(-|x_1| v_1) - \\ - 2v_3^2 \exp(-|x_1| v_2)) dk_r - \\ - \int_0^N J''_0(v_3 r_\tau) \frac{k_r \exp(-|x_1| v_1)}{2\pi\mu v_1} dk_r. \quad (17)$$

Остальные компоненты тензора равны нулю: $M_{n\varphi} = M_{\varphi n} = M_{\varphi r} = M_{r\varphi} = 0$. Таким образом, ядра для решения задач второго рода (на поверхности заданы нагрузки, необходимо найти перемещения) построены. Тензор $M_{ik}(x_0, x)$ имеет только пять независимых ненулевых компонент в координатах, связанных с направлениями $\mathbf{n}, \mathbf{r}_\tau$ и φ . Представление ядер в виде конечных аналогов фундаментальных решений приводит к тому, что решение системы (1) естественным образом ищется в виде конечной суммы, а не интегралов (2), т.е. решение ищется в виде

$$U_i(x_0) = \sum M_{ik}(x_0, x) F_k(x). \quad (18)$$

Вектор нагрузок можно вычислить аналитически с помощью закона Гука $p_i(x_0) = \sigma_{ik} n_{0k}$:

$$p_i(x_0) = -\sum P_{ik}(x_0, x) F_k(x). \quad (19)$$

Каким образом решения для полупространства (13)–(17) можно использовать для нахождения решений краевых задач на произвольных поверхностях? Если кратко,

то ядра нужно правильно сориентировать. Что это означает? В формулах (13)–(17) представлены компоненты тензора, являющиеся откликами в одном из направлений $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{r_\tau}, \mathbf{e}_\varphi$ на конечный аналог дельта-нагрузки, также приложенный в одном из этих направлений в бегущей точке поверхности (в той, по которой проходит суммирование). Соответственно, нагрузки (или перемещения) заданы в фиксированной точке, где направление векторов базисной тройки иное. Следовательно, правильная ориентация есть вычисление нужных проекций ядра. Например, нормальная компонента вектора перемещений формально может быть вычислена как (учтем, что $M_{n\varphi} = 0$)

$$U_n(x_0) = \sum M_{nn}(x_0, x) F_n(x) + M_{n\tau_1}(x_0, x) F_{\tau_1}(x) + \\ + M_{n\tau_2}(x_0, x) F_{\tau_2}(x) = \sum M_{nn}(x_0, x) F_n(x) + \\ + M_{nr}(x_0, x) \frac{x_2}{r_\tau} F_{\tau_1}(x) + M_{nr}(x_0, x) \frac{x_3}{r_\tau} F_{\tau_2}(x). \quad (20)$$

Однако уравнение (20) использовать невозможно. Вместо него следует использовать проекцию в фиксированной точке (а в ней направления нормали и касательных иные, чем в бегущей):

$$U_{n0}(x_0) = \sum M_{n0n}(x_0, x) F_n(x) + \\ + M_{n0\tau_1}(x_0, x) F_{\tau_1}(x) + M_{n0\tau_2}(x_0, x) F_{\tau_2}(x). \quad (21)$$

При этом компоненты тензора

$$(M_{n0n}(x_0, x), M_{n0\tau_1}(x_0, x), M_{n0\tau_2}(x_0, x))$$

следует вычислять как соответствующие проекции вектора, например:

$$M_{n0n} = M_{nn}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}) + M_{rn}(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_{\tau_1}) \frac{x_2}{r_\tau} + \\ + M_{rn}(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_{\tau_2}) \frac{x_3}{r_\tau}, \quad (22)$$

т.е. все необходимые проекции $M_{ik}(x_0, x)$ могут быть вычислены как компоненты вектора после применения операции вращения. В то же время необходимые компоненты тензора нагрузок ($P_{ik}(x_0, x)$ из (19)) вычисляются как компоненты тензора второго ранга после вращения. Обратим внимание на то, что новые ядра в форме (13)–(17) не зависят ни от вида граничных условий, ни от геометрии поверхности. Из всех величин, определяемых геометрией поверхности, они зависят только от $|x_1|$ и r_τ , точнее от их максимальных значений на поверхности. Поэтому перед решением конкретной упругой задачи (и особенно серии задач) имеет смысл сначала определить максимальные расстояния между точками, которые возможны на этой поверхности (эти расстояния и будут верхней границей для $|x_1|$ и r_τ , нижняя граница — ноль). После этого можно создать библиотеку, которая будет представлять собой эти пять двумерных функций (13)–(17), вычисленных на определенной сетке, а также их частные производные, вплоть до третьих включительно. Таким образом, при

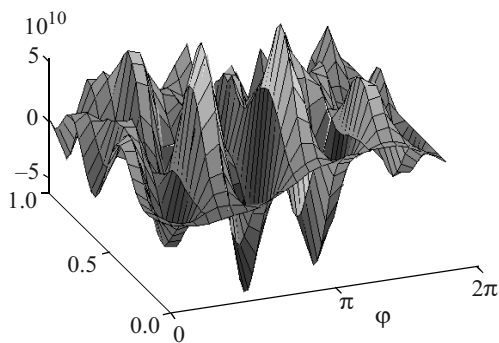


Рис. 2. Угловая компонента e_ϕ вектора перемещений на верхней границе, порожденная шероховатой границей раздела ($k = 10$)

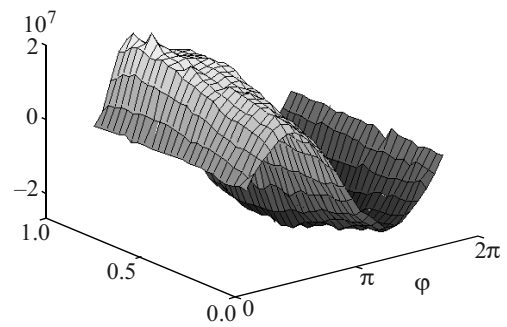


Рис. 4. Угловая компонента e_ϕ вектора перемещений на верхней поверхности, порожденная отражением от шероховатой поверхности ($k = 0.1$)

решении конкретной группы задач на фиксированной частоте стационарных колебаний это дает возможность избежать вычисления в каждой точке упомянутых выше интегралов, используя двумерную формулу Тейлора. Например, если известно, что нужно будет решать задачи, в которых максимальное расстояние между точками будет равно 2 (см. пример ниже), то можно положить число N в (13)–(17) равным 200. Вычисление в каждой точке векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_\tau$, $\mathbf{e}_{\tau_2}$, их скалярных произведений в фиксированной и бегущей точках, а также параметров x_1 , x_2 , x_3 , r_τ и элемента поверхности, а также столбца свободных членов (который зависит от граничных условий) происходит несравнимо быстрее, чем вычисление интегралов. Поэтому процесс вычисления матрицы коэффициентов для системы линейных уравнений, предназначенной для нахождения вектора-потенциала, становится приемлемым по времени (см. пример ниже).

4. Результаты

Отражение осесимметричного сигнала от шероховатой поверхности дает угловую компоненту на всех частотах (эта компонента при отражении от гладкой

поверхности есть ноль). Однако на достаточно коротких волнах амплитуда этой компоненты слишком мала по сравнению с поверхностной волной. Угловая компонента представлена на рис. 2 при $k = 10$. Однако амплитуда этой компоненты уменьшается при удалении от источника. Разность радиальных компонент, порожденных гладкой и шероховатой границами раздела ($k = 10$), представлена на рис. 3. На высоких частотах шероховатость может быть выделена вычитанием радиальных компонент, полученных при отражениях от гладкой и шероховатой поверхностей соответственно. Эта разность есть квазипериодический сигнал с незначительным амплитудным затуханием.

Угловая компонента e_ϕ вектора перемещений на свободной поверхности, порожденного отражением от шероховатой поверхности, представлена на рис. 4 при $k = 0.1$. Это означает, что если волна достаточно длинная (квазистатика), затухание угловой компоненты становится незначительным и ее амплитуда становится сравнимой с амплитудой поверхностных волн.

Если вернуться во временную область и построить угловой аналог сейсмограммы, т.е. зависимость угловой компоненты вектора перемещений от времени и угла

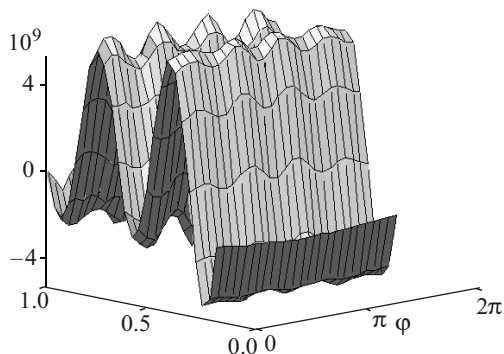


Рис. 3. Зависимость разности между радиальными компонентами, порожденными отражениями от плоской и шероховатой границ ($k = 10$)

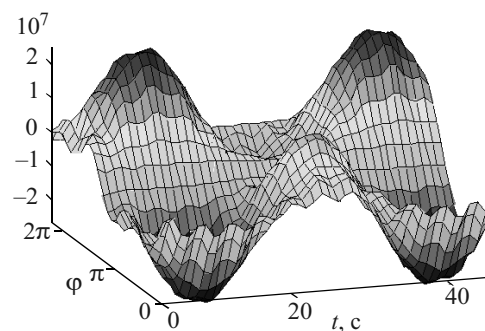


Рис. 5. Круговой аналог сейсмограммы, т.е. зависимость угловой компоненты вектора перемещений от угла и времени при фиксированном расстоянии до центра источника $U_\phi(1, \phi, t)$

при фиксированном (единичном) расстоянии от источника $U_\varphi(1, \varphi, t)$, то можно выделить волны, соответствующие этому перемещению и определить их скорость. Выяснилось, что при отражении от шероховатой границы в некотором диапазоне частот образуются волны (точнее, пара волн) с очень низкой скоростью распространения, причины возникновения которых рассматривались в [7]. Их вполне можно идентифицировать как медленные волны. Их скорость при данных параметрах численных экспериментов примерно в десять раз меньше скорости поперечных волн, также существенно меньше их геометрическое расхождение (рис. 5).

5. Выводы

Шероховатая граница раздела порождает угловую компоненту вектора перемещений на свободной границе при осесимметричном источнике. В случае если граница раздела плоская, эта компонента отсутствует.

Амплитуда этой компоненты растет с ростом эффективной длины волны. Эта компонента затухает существенно слабее, чем остальные компоненты. Это дает возможность выделить ее на большом расстоянии от источника.

Если длина волны достаточно мала (по сравнению с толщиной слоя), то тогда обнаружить шероховатость

можно с помощью вычитания радиальных компонент, порожденных плоской и шероховатой границами раздела.

Если длина волны достаточно велика (квазистатика), информация о шероховатых свойствах границы может быть получена с помощью угловой компоненты вектора перемещений на свободной поверхности.

Возможно, что медленные волны порождаются не объемными, а поверхностными дефектами.

Литература

1. Kennett B.L.N. Seismic wave scattering by obstacles on interfaces // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1972. – V. 28. – P. 249–266.
2. Иванов К.М., Винник П.М., Иванов В.Н. Численное моделирование разделительных процессов обработки давлением // Вестник СГФУ. – 2012. – Т. 33. – № 2. – С. 192–199.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
5. Сибиряков Б.П., Сибиряков Е.Б. Области локального понижения давлений как вероятные аккумуляторы флюидов в геологических структурах // Геология и геофизика. – 2015. – Т. 56. – № 7. – С. 1391–1397.
6. Ziatdinov S.R., Chestnut B.M. Extrinsic components of the Rayleigh wave // Geophys. Quest. – 2005. – V. 38. – P. 46–55.
7. Сибиряков Б.П. Параметрические резонансы и неустойчивость геологических структур // Физ. мезомех. – 2005. – Т. 8. – № 2. – С. 5–10.

Поступила в редакцию
17.08.2017 г.