

УДК 165.17:510.6

ББК 87.4

НЕЯВНОЕ ЗНАНИЕ В МАТЕМАТИКЕ

Б.Л. Яшин

Аннотация. В статье рассматривается проблема неявного знания в математике. Одной из его характеристик является его «закрытость» для сознания субъекта. Это знание человек приобретает, прежде всего, путем собственного опыта, оно не существует в отрыве от конкретной личности. В математике проблема неявного знания чаще всего возникает при решении вопросов обоснования. Автором анализируются различные формы его существования в этой науке. Это могут быть ссылки на внутреннюю убежденность, скрытые ссылки на хорошо известное, подразумевание некоторого условия, неявная опора на определения, скрытые леммы и т.п. В работе показывается, что наибольшими возможностями проникновения неявного знания в математику обладают индукция и аналогия. При их использовании вывод носит вероятностный характер, предположение о его правомерности основано на неполной информации и зависит от различного рода неявных предпосылок. Эта зависимость усиливается в процедурах сравнения, выбора, предпочтения гипотез, методов, оценки и решения проблем, способов доказательства, обоснования и т.п. В статье отмечается важная роль в математическом творчестве априорного знания, которое является содержанием понятий «количество», «множество», «дискретность», «непрерывность» и др. Автор рассматривает трактовку априорности математики В. Перминова, основанную на понятии практики. В этом случае математика может пониматься как формальная онтология мира.

229

Ключевые слова: математика, неявное знание, индукция, аналогия, априорное знание.

TACIT KNOWLEDGE IN MATHEMATICS

B.L. Yashin

Abstract. The article deals with the problem of tacit knowledge in mathematics. One of the characteristics is its "closeness" to the consciousness of the subject. This knowledge a person acquires, above all, by his own experience, it does not exist in isolation from the specific person. In mathematics, the problem of tacit knowledge often occurs in dealing with justification. The

author analyzes the different forms of existence in this science. This may be a reference to the inner conviction, hidden links to the well-known, implying of certain conditions, an implicit reliance on definition, hidden lemma etc. The article shows that the greatest potential of penetration of tacit knowledge in mathematics has induction and analogy. When used the output is probabilistic in nature, the assumption of its legitimacy is based on incomplete information and depends on various kinds of implicit assumptions. This relationship is enhanced in comparison procedures, choice, hypotheses preference, methods, evaluation and problem solving, ways to prove, justify, and so on. The article points out an important role in the mathematical activity of a priori knowledge, which is the concept of "number", "set", "discrete", "continuity", etc. The author considers Perminov's a priori interpretation of mathematics, based on the concept of practice. In this case, mathematics can be understood as a formal ontology of the world.

Keywords: *mathematics, tacit knowledge, induction, analogy, a priori knowledge.*

В последнее время философы, занимающиеся проблемами познания в целом и научного познания в частности, немало внимания уделяют роли так называемого «неявного знания». Неявное знание отличается тем, что к нему неприменимы традиционные характеристики знания – рефлексивность, логическая обоснованность, возможность однозначной истинностной оценки. Существование неявного знания в сфере психического связано с социальным характером человеческого бытия, с тем, что человек, в том числе рассматриваемый как субъект познания, с необходимостью вступает в те или иные отношения с другими людьми, что он помимо своей воли оказывается включенным в культурно-исторический контекст.

Одной из характеристик неявного знания, которую выделяют многие его исследователи, является его «закрытость» для сознания субъекта, им обладающего. Относительно этого знания, с точки зрения Т. Куна, мож-

но сказать, что «мы не обладаем прямым доступом к тому, что знаем, никакими правилами и обобщениями, в которых можно выразить это знание...» [1, с. 251-252].

Это знание человек приобретает, прежде всего, путем собственного жизненно-практического опыта, оно не существует, как показал М. Полани, в отрыве от конкретной личности, поэтому, в отличие от явного знания, знание неявное несет «отпечаток» личности, оно «нагружено» пристрастиями и убеждениями субъекта и не допускает полной экспликации [2].

Неявное знание – это некая неформализованная, не выраженная в языке и пока еще не подвергнутая рефлексии форма сознания и самосознания человека, которая оказывается важной предпосылкой, а нередко даже необходимым условием познания, понимания и коммуникации.

Иными словами можно сказать, что неявное знание представляет собой одну из форм существования

предпосылочного знания. В силу этого вполне понятно, что при его изучении возникают те же проблемы и трудности, которые характерны для предпосылочного знания в целом. Многие из них связаны с выявлением и разграничением понятийных и допонятийных форм знания, явных и неявных предпосылок, способов их «вхождения» в знание и функционирования в познавательной деятельности. Эти проблемы и трудности, по мнению Л.А. Микешиной, «вызваны тем, что ни одна из указанных форм предпосылочного знания не находится в отношении логического следования со специально-научным знанием. Свои функции предпосылки выполняют через гносеологические процедуры выбора, предпочтения, конвенции, установление консенсуса и т.д., осуществляемые субъектом на основе научной интуиции, а также принятой парадигмы, научно-исследовательской программы, в которых предпосылки соответствующим образом конкретизированы» [3, с. 174].

В математике проблема неявного знания чаще всего возникает при решении вопросов обоснования [4, с. 177; 5, с. 517-531]. Во многом это связано с тем, что в процессе строго формального дедуктивного доказательства математик нередко неосознанно опирается на положения явным образом не сформулированные, не выраженные в языке. Здесь практически «каждая процедура рефлексивного анализа предполагает некую неререфлектируемую в данном контексте рамку неявного «обосновывающего» знания» [2, с. 258].

Иными словами, неявное знание в определенной мере служит началом дальнейших математических

разработок. Оно же во многом обуславливает характер предпосылок, лежащих в основе создаваемого метода, дающего возможность вывести те или иные теоретические утверждения, которыми затем наполняются учебники [6].

В математических рассуждениях неявное знание в одних случаях присутствует в доказательствах тех или иных утверждений в качестве ссылки на внутреннюю убежденность в истинности некоторого положения, которое является результатом неосознанного умозаключения. Математик, может быть, и хотел бы представить его явным образом, но не всегда может «развернуть» это мгновенно промелькнувшее в его голове в «свернутом» виде умозаключение. В других – как неявная ссылка на знание, которое хорошо известно и признано в математическом сообществе.

Неосознанное знание чего-то иного, скрытого за явно выраженным знанием, подразумевание какого-либо условия, опора на невербализованные предпосылки в рассуждениях – все это достаточно широко представлено в математических теориях.

Так, например, Евклид в своих «Началах» опирается на не выраженный явным образом постулат о параллельных прямых. В аксиомах Евклида не предусмотрено и доказательство того, что всякое замыкание делит плоскость в точности на два множества точек, и что переход из одного множества в другое обязательно связан с пересечением границы между ними. И хотя операция такого рода встречается практически в любом школьном учебнике геометрии, ее использование никоим образом не обосновывается [7]. Подразу-

меваются, что ее вполне можно использовать и что ее результат всегда будет безупречен.

Точно так же при использовании доказательства «от противного», которое эффективно работает во всех отраслях математического знания, лишь подразумевается то, что оно опирается на законы противоречия и исключенного третьего. Во многих случаях здесь просто не считают необходимым даже ссылаться на эти законы, полагая это очевидным для всех.

Достаточно хорошо известно, что неявное знание в математике может существовать в математических теориях и в виде скрытых лемм и определений. Современная аксиоматическая теория множеств, например, и, в частности, операциональная теория множеств Ч. Фефермана (OST-теория), хотя и не использует понятие актуальной бесконечности явным образом, тем не менее, неявно включает некоторую форму ее существования [8, с. 271-280].

Неявным образом включают в себя понятие актуальной бесконечности и аксиомы Цермело-Френкеля, так как без принятия этого понятия невозможно доказать теорему Кантора о несчетности континуума. В нескольких работах А. Зенкина показано, что «традиционное доказательство этой Теоремы со времен Кантора и до наших дней никогда не содержало в явном виде, по крайней мере, двух *необходимых* условий. Первое условие связано с *актуальностью* всех бесконечных множеств, фигурирующих в канторовском до-

казательстве», а второе – так называемый постулат Кантора-Ходжеса¹, «вообще имеет *телеологический* характер, т.е., согласно Кронекеру, не имеет к математике никакого отношения» [там же].

В этой же работе А. Зенкин пишет еще и о том, что отсутствие явных формулировок (например, необходимых условий доказательства некоторых теорем теории множества) становится нередко основным источником серьезных искажений семантики содержательных интерпретаций – математических моделей реальных объектов, что «может привести к непредсказуемым и нежелательным (катастрофическим) последствиям в процессе эксплуатации соответствующих реальных объектов» [там же].

При анализе неявного знания в математике невольно возникает вопрос о том, каким же образом проникают в эту самую строгую, самую рациональную (в классическом понимании) из всех наук неявные компоненты? Наибольшими возможностями введения неявных предпосылок в научное знание, с точки зрения, например, Л.А. Микешиной, с которой вполне можно согласиться, «обладают индуктивные методы (индукция, аналогия, экстраполяция). В этих методах вывод носит вероятностный характер, предположение о его правомерности, правдоподобии основано на неполной информации и зависит от различного рода неявных предпосылок, в том числе мировоззренческого характера. Данные моменты существенно усиливаются во «внелогических» познава-

тельных процедурах сравнения, выбора, предпочтения гипотез, методов, оценки и решения проблем, способов доказательства, обоснования и т.п. В каждой из них представлены интуитивные, неявные, невербализованные и не всегда осознаваемые элементы – как интеллектуальный и ценностный «фонд» субъекта научной деятельности» [3, с. 321-322].

В математике, как я полагаю, скорее всего, такие возможности для проникновения в ее теории неявного знания, предоставляет аналогия, благодаря которой устанавливается общность самых отдаленных областей математического знания и нередко создаются обобщающие математические теории. Вместе с ее результатами в теорию вводятся интуитивные, невербализованные, не всегда осознаваемые элементы, обусловленные интеллектуальными, мировоззренческими и т.п. особенностями эмпирического (индивидуального или коллективного) субъекта. Такого рода «вторжение» математиков (и не только математиков, а любых ученых вообще), работающих в одной области знания, в связанную с ней другую область может быть неожиданно продуктивным как для обеих областей знания, так и для самих этих ученых.

Об этих возможностях получения нового знания писали, например, авторы книги «Философия науки и техники», утверждая, что «принципиально новое знание получают благодаря, прежде всего, “пришельцам” из других наук или побочным результатам научных исследований» [9].

В одной из своих работ известный французский математик Ж. Дьедоне, являвшийся одним из основателей

группы Н. Бурбаки, пишет, что в математическом творчестве Б. Римана неявное взаимодействие теории аналитических многообразий и теории чисел приводит его к созданию новой теории, названной впоследствии бирациональной алгебраической геометрией кривых. А использование Б. Риманом мероморфных функций в приложении к анализу римановой поверхности, утверждает он далее, позволяет перейти «к понятию из чистой алгебры – полю рациональных функций кривой, которое является попросту конечным расширением поля рациональных дробей над комплексными числами» [10].

В обоих случаях Дьедоне подразумевает особый тип математической интуиции, который он называет «переносом интуиции». Его он считает основным и одним из наиболее важных источников развития математического знания. Следует отметить, что этот «перенос», с моей точки зрения, происходит именно на основе неявного (неосознаваемого) использования аналогии.

При анализе возможных путей проникновения неявного знания в математику, нельзя сбрасывать со счетов и такой метод, как индукция. По мнению А. Пуанкаре, например, открытия в математике, совершаются на основе неявного использования не только аналогии, но и аксиомы математической индукции [11]. С этим можно вполне согласиться, так как многие теории математики, основанием которых становилась эта аксиома, возникли в процессе исторического развития много раньше, чем удалось ее формализовать. Аксиома математической индукции вместе с методом математической интерпретации, как считают

¹ Суть этого постулата состоит в том, что для индексации счетного списка элементов континуума необходимо использовать все элементы счетного множества $N=\{1,2,3, \dots\}$ и категорически запрещается использовать не все натуральные числа, например, элементы счетного множества $\{2,4,6, \dots\}$, т.к. в последнем случае доказательство Кантора теряет силу.

некоторые исследователи, «наиболее глубоко укоренены в «гносеологической подпочве» неявного знания. И вполне логично, что их рационализация, включающая в себя вербализацию как осознание, а также последующую алгоритмизацию, исторически была наиболее сложной» [12].

В научном познании, в том числе и в математике, неявно используется и неполная индукция, которая во многих случаях служит основанием для общих выводов в рассуждениях. Она, как мне кажется, также является одним из основных каналов проникновения неявного знания в математику. Неполная индукция во многих случаях обуславливает возникновение стереотипов, образующих в некоторой их совокупности своеобразный «жизненный горизонт» субъекта деятельности. Эта совокупность стереотипов, этот «жизненный горизонт», неосознаваемые субъектом, в процессе его деятельности, служат ему ориентирами, во многом определяя для него выбор цели и средств ее достижения.

Говоря о неявном знании в математике, нельзя не сказать и о такой его форме, как доопытное, априорное знание, которое является содержанием таких неформализуемых понятий, как «количество», «множество», «дискретность», «непрерывность» и т.п., а также знание, основанное на универсальных представлениях о реальности, порожденных деятельностью человека. По Канту, например, «настоящие математические положения всегда априорные, а не эмпирические суждения, потому что они обладают необходимостью, которая не может быть заимствована из опыта» [13, с. 113].

Этой же позиции придерживались многие известные математики. Так, например, Гильберт, в одной из своих работ отмечал, что «философы – и Кант является классическим представителем этой точки зрения – утверждали, что, кроме логики и опыта, мы имеем еще а priori известные знания про действительность... Я думаю, что и математические познания основываются, в конечном счете, на таком наглядном созерцании и что для построения теории числа нам даже необходимо определенное наглядное установление а priori» [14, с. 961].

Интересную трактовку априорности математики, основанную на понятии практики, предлагает в своих работах В.Я. Перминов [15; 16, с. 24-39]. Он полагает, что априорное в человеческом знании, а значит и в математике, может быть представлено как «система универсально нормативных представлений, проистекающая из необходимой деятельности (практической) ориентации мышления». Анализируя подходы Канта, Гуссерля и некоторых современных философов математики, В.Я. Перминов показывает, что исходные идеализации математики относятся не к содержанию, а к форме мышления и являются частью его априорной структуры.

Аргументы, которые он при этом предъявляет, сводятся к следующим положениям. Во-первых, между арифметическими и логическими понятиями существует тесная взаимосвязь. Это подтверждается результатами современных психологических исследований (Ж. Пиаже и др.), которые указывают на одновременность и взаимозависимость формирования в сознании ребенка арифметических и

логических структур (формирование логического понятия класса в той же мере зависит от понятия числа, как и формирование понятия числа от логического понятия класса), а также на связь развития этих структур с развитием представлений о пространстве и времени [17, с. 78-80].

Во-вторых, в пользу априорности, по крайней мере, элементарной математики говорит самоочевидность ее истин, которая преобладает над очевидностями, относящимися к содержанию знания. Таковы, к примеру, общепринятые нормы логического умозаключения.

В-третьих, весомым доводом в пользу априорности исходных математических идеализаций, с точки зрения Перминова, может служить наличие так называемой универсальной или категориальной онтологии, включающей в свою структуру причинную и предметную онтологии, формирующихся на основе деятельности человека.

Математика при таком подходе может пониматься как формальная онтология мира, схватывающая праксеологически значимые качества его предметной структуры. Априорность же ее состоит в том, что исходные математические интуиции предшествуют всякому эмпирическому анализу: исходные математические структуры либо однозначно заданы универсальной предметной онтологией, либо определены ею в соответствии с интерсубъективной интенциональной установкой, являясь единственным адекватным определением предметной онтологии. Главное при этом состоит в том, что интуитивную основу исходных математических понятий и структур составляют не чувственные

образы и не абстрактные представления науки, а универсальные представления о реальности, порожденные деятельностью человека [15].

Важно отметить, что в этом случае неявное знание не является в строгом смысле личностным, на чем настаивал в своей концепции этого знания М. Полани, оно, в силу его всеобщности, одновременно, и intersubjectively.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кун, Т. Структура научных революций [Текст] / Т. Кун. – М., 2001. – С. 251-252.
2. Полани, М. Личностное знание [Текст] / М. Полани. – М., 1985.
3. Микешина, Л.А. Философия науки: современная эпистемология. Научное знание в динамике культуры. Методология научного исследования : учеб. пособие [Текст] / Л.А. Микешина. – М., 2005.
4. Яшин, Б.Л. Неявное знание в математике [Текст] / Б.Л. Яшин // Рационализм и культура на пороге третьего тысячелетия: Материалы Третьего Российского Философского конгресса. В 3 т. – Ростов н/Д, 2002. – Т. 1: Философия и методология науки, эпистемология, философская онтология и др.
5. Яшин, Б.Л. Рациональное и иррациональное в математике [Текст] / Б.Л. Яшин // Философия познания. – М., 2010. – С. 517-531.
6. Лекторский, В.А. Субъект, объект, познание [Текст] / В.А. Лекторский. – М., 1980.
7. Султанова, Л.Б. Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления [Электронный ресурс]. – URL: http://www.bim-bad.ru/biblioteka/article_full.php?aid=1349&binn_rubrik_pl_articles=70 (дата обращения: 15.06.2014).
8. Зенкин, А.А. О некоторых семантических дефектах в логике интеллектуальных систем [Текст] / А.А. Зенкин // Девятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ - 2004). Секция 3. Правдопо-

- добные рассуждения и неклассические логики. Тверь, Россия, 2004. Труды конференции. – Т. 1. – С. 271-280.
9. Степин, В., Философия науки и техники [Электронный ресурс] / В. Степин, М. Розов, В. Горохов. – URL: <http://philosophica.ru/stepin/25.htm> (дата обращения: 15.06.2014).
 10. Дьедоне, Ж. Абстракция и математическая интуиция [Текст] / Ж. Дьедоне // Математики о математике. – М., 1982.
 11. Пуанкаре, А. О науке [Текст] / А. Пуанкаре. – М., 1990.
 12. Финогентов, В.Н. Философские основания нового века. 2004 [Электронный ресурс]. – URL: http://sbiblio.com/biblio/archive/finogentov_filosofskie/default.aspx (дата обращения: 21.07.2014).
 13. Кант, И. Критика чистого разума [Текст] / И. Кант // Кант И. Соч. в 6 т. – М., 1964. – Т. 3.
 14. Hilbert, D. Naturerkennen und Logik [Text] / D. Hilbert // Naturwissenschaften. – 1930. – Н. 47-49. – S. 961.
 15. Перминов, В.Я. Априорность и реальная значимость исходных представлений математики [Текст] / В.Я. Перминов. – М., 2001.
 16. Перминов, В. Я. Реальность математики [Текст] / В.Я. Перминов // Вопросы философии. – 2012. – № 2. – С. 24-39.
 17. Пиаже, Ж. Избранные психологические труды [Текст] / Ж. Пиаже. – М., 1969.
 18. Перминов, В.Я. Априорность и реальная значимость исходных представлений математики [Текст] / В.Я. Перминов. – М., 2001.
 4. Yashin B.L., Neyavnoe znanie v matematike, Abstracts of papers, *Ratsionalizm i kultura na poroge tretyego tisyacheletiya: Materiali Tretyego Rossiyskogo Filosofskogo kongressa, T. 1: Filosofiya i metodologiya nauki, epistemologiya, filosofskaya ontologiya i dr.*, Rostov n/D, 2002, 177.
 5. Yashin B.L., “Ratsyonalnoye i irratsyonalnoye v matematike”, in: *Filosfiya poznaniya*, M., 2010, 517-531.
 6. Polanyi M., *Filosfiya poznaniya*, M., 2010.
 7. Lektorskiy V.A., *Subyekt, obyekt, poznaniye*, Moscow, 1980.
 8. Sultanova L.B., *Role intuitsiyi i neyavnogo znaniya v formirovaniyi stilya matematicheskogo mishleniya*, available at: http://www.bim-bad.ru/biblioteka/article_full.php?aid=1349&binn_rubrik_pl_articles=70 (accessed: 15.06.2014).
 9. Stiopin V., Rozov M., Gorohov V., *Filosofiya nauki i tehniki*, available at: <http://philosophica.ru/stepin/25.htm> (accessed: 15.06.2014).
 10. Dyedone G., “Abstraktsiya i matematicheskaya intuitsiya”, in: *Matematiki o matematike*, Moscow, 1982.
 11. Puankare A., *O nauke*, Moscow, 1990.
 12. Finogentov V.N., *Filosofskie osnovaniya novogo veka. 2004*, available at: http://sbiblio.com/biblio/archive/finogentov_filosofskie/default.aspx (accessed: 21.07.2014).
 13. Kant I., “Kritika chistogo razuma”, in: *Soch. v 6 t.*, M., 1964, T. 3.
 14. Hilbert D., *Naturerkennen und Logik, Naturwissenschaften*, 1930, H. 47-49, 961.
 15. Perminov V.Y., *Apriornost i realnaya znachimost ishodnih predstavleniy matematiki*, Moscow, 2001.
 16. Perminov V.Y., *Realnost matematiki, Voprosy filosofiyi*, 2012, No. 2, 24-39.
 17. Piage G. *Izbranniye psihologicheskiye trudi*, Moscow, 1969, 78-80.
 18. Perminov V.Y., *Apriornost i realnaya znachimost ishodnih predstavleniy matematiki*, Moscow, 2001.

REFERENCES

1. Kuhn T., *Struktura nauchnih revolyutsy*, Moscow, 2001, 251-252.
2. Polanyi M., *Lichnostnoe znanie*, M., 1985.
3. Mikeshtina L.A., *Filosofiya nauki: sovremennaya epistemologiya. Nauchnoe znanie v dinamike kulturi. Metodologiya nauchnogo issledovaniya: utcheb. posobie*, Moscow, 2005.

Яшин Борис Леонидович, доктор философских наук, профессор, кафедра философии, Московский педагогический государственный университет, borisjashin@rambler.ru

Yashin B.L., Dr. of Sc. (Philosophy), Professor, Philosophy Department, Moscow State Pedagogical University, borisjashin@rambler.ru