Нетранзитивный парадокс «Игра Пенни»

Колесников Максим Сергеевич
студент кафедры «Математика и информатика», Технический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри eliott_nu@protonmail.com.

Корниненко Диана Сергеевна
студент кафедры «Математика и информатика», Технический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри, artemidaamadinart@gmail.com

Самохина Виктория Михайловна
кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой «Математика и информатика», Технический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри, vsamokhina@bk.ru

Похорукова Мария Юрьевна
кандидат технических наук, доцент кафедры «Математика и информатика», Технический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри, maria.pokhorukova@gmail.com

В статье рассматривается важность решения парадоксов теории вероятности для науки в целом, подробно анализируется парадокс Уолтера Пенни. Суть «Игры Пенни» заключается в следующем: два игрока играют в простую игру с подбрасыванием монеты. Сначала первый выбирает произвольную последовательность из трёх результатов подброса монеты, затем это делает второй. В результате выигрывает тот, чья последовательность встретится раньше. Сам парадокс заключается в том, что для любой тройки первого игрока всегда найдётся такая последовательность, которая выигрывает у него с вероятностью более 50%. Рассматривается вопрос о том, как сделать самый верный выбор, чтобы выиграть, рассчитывается вероятность выигрыша в зависимости от выбора каждого игрока. Представлен алгоритм Конвея, с помощью которого можно рассчитать вероятности последовательностей любой другой длины или даже для последовательностей с абсолютно разной длиной.

Ключевые слова: игра Пенни, парадокс, вероятности, транзитивность, алгоритм Конвея.

Проблема усвоения студентами основных понятий теории вероятностей приобретает особую актуальность, поскольку на сегодняшний день эта область математики получила широкое распространение в различных областях науки и производства. В процессе обучения теории вероятностей студенты часто сталкиваются с теми же проблемами, что и известные математики прошлого: парадоксы и софизмы.

В статье [2] рассматриваются особенности использования парадоксов и софизмов, объясняется их суть, раскрывается роль, место и основные задачи в изучении некоторых тем и разделов теории вероятностей. В работе [5] также рассмотрены несколько парадоксов, в том числе парадокс Бертрана и задача о сломанной палке, а также парадокс закона больших чисел Бернулли. Самое большое количество различных парадоксов представлено в книге венгерского математика Г. Секея «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике». Автор показывает, как разрешение различных парадоксов, связанных со случайностью, способствовало возникновению и развитию теории вероятностей [6]. Стоит отметить, что изучение парадоксов теории вероятностей способствует повышению мотивации обучающихся, формированию и развитию вероятностного мышления и интуиции, творческому решению поставленных задач, более глубокому понимаю и усвоению математических задач.

В данной статье рассматривается игра Уолтера Пенни: два игрока играют в простую игру с подбрасыванием монеты. Сначала первый игрок выбирает произвольную последовательность из трёх подбросов монеты, затем – второй. В результате выигрывает тот, чья последовательность встретится раньше. Сам парадокс заключается в том, что для любой тройки первого игрока всегда найдётся такая последовательность, которая выигрывает у него с вероятностью более 50% [1].

Эта проблема вероятности не очень популярна, хоть и существует уже достаточно давно: Уолтер Пенни впервые рассказал о ней в статье в Journal of Recreational Mathematics в 1969 году. Затем Мартин Гарднер представил более подробное описание данного феномена в своей работе «Математические игры» в октябрьском выпуске журнала Scientific American в 1974 году, а потом и в своей книге «Time Travel and other Mathematical Bewilderments» [3].

Этот парадокс, называемый «игра Пенни» может быть применим для любой игры, подразумевающей выполнение повторяющихся действий двумя игроками. Например, можно использовать: двоичную последовательность, двухцветную фишку или классическую игровую кость в виде куба. Самое главное, чтобы результатом каждого хода было случайное выпадение того или иного варианта с вероятностью 50/50. Предположим, что игроки 1 и 2 бросают кубик, пытаясь предугадать выпадение чётного или нечётного числа. Поскольку стандартный кубик состоит из шести граней, содержащих равное количество нечётных и чётных чисел – вероятность выпадения нечётного (Н) или чётного (Ч) числа равна 0,5. Кубик подбрасывается до тех пор, пока не выпадет последовательность одного из игроков. Предположим игрок 1 выбрал последовательность ЧЧЧ, а игрок 2 - НЧЧ. Результатом многократного подброса кубика стала следующая последовательность:

ННЧЧЧНЧНЧНННЧЧЧ…

В данном случае победил игрок 2, выбравший последовательность НЧЧ.

Секрет игры состоит в том, что, когда она ведется с использованием последовательностей из 3 результатов бросков, независимо от того, какую последовательность выбирает игрок 1, игрок 2 всегда может сделать выигрышный выбор. В таблице 1 представлены выигрышные варианты выбора второго игрока для каждого из восьми возможных вариантов его выбора.

Таблица 1
Шансы в пользу игрока 2.

Игрок 1	Игрок 2	Коэффициенты в пользу игрока 2	Вероятность победы игрока 2
ЧЧЧ	НЧЧ	7:1	87,5%
ЧЧН	НЧЧ	3:1	75%
ЧНЧ	ЧЧН	2:1	66%
ЧНН	ЧЧН	2:1	66%
НЧЧ	ННЧ	2:1	66%
НЧН	ННЧ	2:1	66%
ННЧ	ЧНН	3:1	75%
ННН	ЧНН	7:1	87,5%

Согласно таблице, второй игрок, выбирающий НЧЧ в ответ на выбор игрока 1 ЧЧЧ, имеет 87,5% шансов на победу, выбор НЧЧ в ответ на ЧЧН дает 75% шансов на выигрыш, а выбор ЧЧН в ответ на ЧНЧ – 66%. И независимо от того, какой из восьми вариантов выберет игрок 1, игрок 2 всегда может избрать тройку, у которой больше шансов победить. Получается, что НЧЧ сильнее, чем ЧЧЧ, ННЧ сильнее, чем НЧЧ, ЧНН сильнее, чем ННЧ, ЧЧН сильнее, чем ЧНН, и НЧЧ сильнее, чем ЧЧН. Исходя из этих соотношений - ни одна из этих четырех троек не является лучшим выбором.

Рассмотрим эту закономерность подробнее. Допустим игрок 1 выбирает ЧЧЧ, а игрок 2 следуя стратегии и выбирает НЧЧ. Если в первых трех бросках выпадет ЧЧЧ, игрок 1 выигрывает. В любой другой ситуации победит игрок 2, поскольку Н будет в любом случае предшествовать комбинации ЧЧЧ, а значит НЧЧ будет появляться раньше. Вероятность того, что на первых трёх позициях выпадет последовательность ЧЧЧ, равна:

$$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

Таким образом мы можем рассчитать шанс выпадения НЧЧ перед ЧЧЧ:

НЧЧ = $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Значит, коэффициент шанса игрока 2 на победу будет равен 7:1.

Используя эти сведения, можно предугадать выигрыш, после того, как первый игрок сделает свой выбор:

1. Для первой позиции тройки игрока 2 нужно взять противоположное значение второй позиции выбора первого игрока. Предположим, что игрок А выбирает ЧЧЧ. На втором месте выбранной последовательности первого игрока – Ч. Изменим этот выбор на противоположный, т.е. Н и возьмём его первым в последовательности игрока 2 (Н _ _).

2. Затем возьмем первые два выбора игрока 1 и используем их как второй и третий выбор соответственно в последовательности игрока 2 (НЧЧ). Тогда игрок 2 выиграет с вероятностью 87,5%.

Чтобы понять, почему этот метод работает, рассмотрим стратегию, когда игрок 1 выбирает ЧЧЧ. Предположим, что тройка игрока 1 появится не в самом начале последовательности, а дальше по строке, например, в позициях 5, 6 и 7. Тот факт, что мы видим первое появление тройки игрока 1, означает, что в позиции 4 уже был вариант Н, иначе бы последовательность первого игрока появилась бы на позициях 4, 5, 6. Значит, в этой ситуации тройка игрока 2 (НЧЧ), выбранная в соответствии с приведенными выше правилами, будет стоять перед первым игроком, а в позициях 4, 5, 6.

Однако, у второго игрока нет абсолютной гарантии выигрыша. Например, в случае, если тройка первого игрока выпадает на первых трех позициях. Аналогично происходит, когда игрок 1 выбирает последовательность - ЧЧН. Опять же, согласно стратегии, игрок 2 должен выбрать НЧЧ. Но, как только Н выпадет – это будет значить, что НЧЧ появится перед ЧЧН в последующей последовательности. Таким образом, вероятность выпадения ЧЧН равна:

$$P(\text{ЧЧН в первых трех бросках}) + \_P(\text{ЧЧЧН в первых четырех бросках}) + P(\text{ЧЧЧЧН в первых пяти бросках}) + \cdots$$

Данная последовательность может являться бесконечной суммой:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \sum_{n=3}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, вероятность выигрыша НЧЧ равна 75%.

Есть еще один любопытный аспект игры Пенни – нетранзитивность, то есть если игрок 1 может победить игрока 2, а игрок 2 - игрока 3, то совсем не значит, что игрок 1 может выиграть игрока 3.

Подобные зацикленные отношения явно прослеживаются в другой популярной игре «камень-ножницы-бумага»: камень бьет ножницы, а ножницы бьют бумагу, но это не значит, что камень бьет бумагу. Вместо этого камень проигрывает бумаге, поэтому транзитивность не подтверждается. Как в игре «камень-ножницы-бумага» нет лучшего выбора, так и в игре Пенни: второй игрок всегда может выбрать последовательность «сильнее», чем у первого игрока.

Более подробно игра «камень-ножницы-бумага» описана в статье [8]. Авторами проводился эксперимент: студенты и школьники играли с компьютерным алгоритмом, который был запрограммирован играть оптимально против ограниченно рационального игрока, но с разным уровнем шума. Наглядно продемонстрировано, что студенты довольно быстро (чем меньше шума, тем быстрее) распознают регулярность действий компьютера и обучаются выигрывать. Этот эксперимент наглядно подтверждает, что люди могут использовать стратегии, основанные на правилах, а не только на основе предыдущих победах или неудач.

Для того чтобы рассчитать стратегию выигрыша для игры Пенни не только для последовательностей длины 3, но и для вариантов любой другой длины может быть использован алгоритм Конвея [4]. Суть данного алгоритма в следующем.

Сначала нужно расположить тройки одну над другой, выровняв цифры. Затем сравниваются две тройки: если они одинаковы, поставить 1 над первым символом первой последовательности, если нет - поставить 0. Затем необходимо удалить первую цифру из верхней тройки и сдвинуть последовательность влево, совместив передние элементы. Далее сравнить первые две цифры верхней последовательности с первыми двумя цифрами нижней: если они совпадают, нужно поместить 1 над вторым элементом верхней последовательности, если нет – 0. Затем нужно вновь повторить данную процедуру. Наконец, нужно объединить полученные результаты по первому столбцу. Получившаяся сверху последовательность единиц и нулей считается индексом перекрытия между двумя последовательностями, который нужно перевести в десятичное представление (например, последовательности по три как в описанном ранее примере). Используя полученные значения вычисляется вероятность выигрыша.

Если рассчитать выбор выигрышных последовательностей для игрока 2 по отношению к выбору игрока 1 с помощью алгоритма Конвея, то мы получим результаты аналогичные данным, указанным в таблице 1 [7].

Таблица 2
Вероятности выигрыша для игроков А и Б.

	ЧЧЧ	ЧЧН	ЧНЧ	ЧНН	НЧЧ	НЧН	ННЧ	ННН
ЧЧЧ		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
ЧЧН	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
ЧНЧ	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
ЧНН	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
НЧЧ	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
НЧН	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
ННЧ	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
ННН	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

На основе игры Пенни разработана техника управления вероятностью выпадения случайных бинарных событий, основанная на правилах псевдозапутывания потоков равновероятных бинарных событий [9]. Автором сделан вывод, что применение правил игры Пенни проводит к устранению свойства независимости случайных событий и способствует выявлению предсказуемости с управляемой вероятностью.

Литература

1. Walter Penney. Problem 95: Penney-Ante // Journal of Recreational Mathematics. — 1974. — С. 321.
2. Гончаренко Я.В., Чепорнюк И.Д. Использование парадоксов и софизмов в обучении теории вероятностей // Дидактика математики: проблемы и исследования. - Донецкий национальный университет. – 2007. - №7. – с. 94-99.
3. Мартин Гарднер. Time Travel and Other Mathematical Bewilderments // Путешествие во времени — М: «Мир», 1990 — С. 75-341.
4. Певзнер П. Лучшее пари для простаков // Квант — 1987. — № 5. — С. 4-15.
5. Рахманкулов Р.Г. Использование парадоксов при подготовке студентов по теории вероятностей и математической статистике // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. - 2010. - № 12. - С. 178-185.
6. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике - М: Мир, 1990. 240 с.
7. Сергей Мельников. Прыжок через козла // Наука и жизнь — 1997. — С. 62-64.
8. Сусин И.С., Чернов Г.В. (2018). Распознавание эвристик и обучение в игре «Камень, ножницы, бумага»: экспериментальный подход // Журнал экономической теории. № 3. С. 408-420.
9. Филатов О.В. Статья «Техника управления вероятностью обнаружения элементарных событий -«0», «1» (аналоги сторон монеты) через псевдозапутывание случайных последовательностей по правилам парадоксальной игры Пенни». «Проблемы современной науки и образования», 2017 г. № 10 (92). С. 10-18

The non-transitive paradox "Game of Penny"

Kolesnikov M.S., Kornienko D.S., Samokhina V.M., Pokhorukova M.Yu.
North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov

The article discusses the importance of solving the paradoxes of probability theory for science in General, and analyzes in detail the paradox of Walter penny. The essence of the "penny Game" is as follows: two players play a simple game with a coin flip. First, the first one chooses an arbitrary sequence of three coin toss results, then the second one does it. As a result, the winner is the one whose sequence meets first. The paradox itself is that for any three of the first player, there is always a sequence that wins with a probability of more than 50%. The question of how to make the best choice to win is considered, and the probability of winning is calculated depending on the choice of each player. The Conway algorithm is presented, which can be used to calculate the probabilities of sequences of any other length, or even for sequences with completely different lengths.

Key words: Penny game, paradox, probabilities, transitivity, Conway's algorithm.

References

1. Walter Penney. Problem 95: Penney-Ante // Journal of Recreational Mathematics. - 1974 .-- p. 321.
2. Goncharenko Ya.V., Chepornyuk I.D. The use of paradoxes and sophisms in teaching probability theory // Didactics of mathematics: problems and research. - Donetsk National University. - 2007. - No. 7. - p. 94-99.
3. Martin Gardner. Time Travel and Other Mathematical Bewilderments // Time Travel - M: "Mir", 1990 - p. 75-341.
4. Pevzner P. The best bet for simpletons // Quantum - 1987. - No. 5. - P. 4-15.
5. Rakhmankulov R.G. The use of paradoxes in the preparation of students in probability theory and mathematical statistics // Mathematical bulletin of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. - 2010. - No. 12. - p. 178-185.
6. Szekey G. Paradoxes in the theory of probability and mathematical statistics - M: Mir, 1990. 240 p.
7. Sergey Melnikov. Jump over the goat // Science and Life - 1997. - P. 62-64.
8. Susin I.S., Chernov G.V. (2018). Recognition of heuristics and learning in the game "Rock, paper, scissors": an experimental approach // Journal of Economic Theory. No. 3. P. 408-420.
9. Filatov O.V. The article "Technique for controlling the probability of detecting elementary events -" 0 "," 1 "(analogs of the sides of a coin) through pseudo-entanglement of random sequences according to the rules of Penny's paradoxical game". "Problems of modern science and education", 2017 No. 10 (92). P. 10-18