

УДК 512.544

Непримарные слойно конечные группы

Я. Д. Половицкий

Пермский государственный университет, 614990, Пермь, ул. Букирева 15

Предлагается изложение основных результатов теории непримарных слойно конечных групп на базе некоторых результатов С.Н.Черникова [1] и характеристики слойно конечных групп, полученной автором в работе [2].

Понятие слойно конечной группы было введено С.Н.Черниковым в 1948 г. [3], хотя изучение таких групп было начато им еще в 1945 г. [4].

Определение [3]. Группа, в которой множество элементов каждого порядка конечно, называется *слойно конечной*.

С.Н.Черниковым [1] и Р.Бэром [5] получены основные результаты теории слойно конечных групп. Подробное изложение этой теории приведено в монографиях С.Н.Черникова [1] и В.И.Сенашова [6].

В настоящей работе предлагается изложение теории непримарных слойно конечных групп, отличное от имеющихся. По нашему мнению, оно более компактно.

Очевидно, что всякая слойно конечная группа является периодической и все ее классы сопряженных элементов конечны. Отсюда и из леммы Дицмана вытекает, что слойно конечная группа является локально нормальной группой.

Из определения слойно конечной группы легко следует

Лемма 1. Периодическая группа G тогда и только тогда слойно конечна, когда для любого $p \in \pi(G)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ конечно множество всех ее элементов порядка p^n .

Слойно конечные p -группы описаны С.Н.Черниковым в работе [4]. В современной терминологии этот результат С.Н.Черникова выглядит так:

Теорема 1. p -группа тогда и только тогда слойно конечна, когда она является черниковской группой, полная часть которой содержится в ее центре.

1. Центральные расширения слойно конечных групп

Лемма 2. Пусть S – слойно конечная подгруппа центра $Z(G)$ группы G , $g \in G$ и $|g|=m < \infty$. Тогда gS – слойно конечное множество (т.е. все совокупности его элементов одинаковых порядков конечны).

Доказательство. Пусть в gS существует элемент gs ($s \in S$) порядка n . Покажем, что элементов такого порядка в gS конечное число. Так как $|gs|=n$, то $(gs)^n=1$. Отсюда $(gs)^{mn}=1$. Учитывая, что $s \in Z(G)$, имеем: $g^{mn} \cdot s^{mn}=1$, и, так как $|g|=m$, то $s^{mn}=1(1)$.

Но уравнение (1) имеет в слойно конечной группе S , очевидно, лишь конечное число решений и потому в gS лишь конечное число элементов порядка n .

Лемма доказана.

Теорема 2 [5], [7]. Центральное расширение G слойно конечной группы S при помощи слойно конечной группы является слойно конечной группой.

Доказательство. Пусть g – любой элемент порядка n группы G . Тогда $|gS| \leq n$. В слойно конечной группе G/S существует лишь конечное число элементов, порядок некоторых не превосходит n . Пусть $g_1S, \dots, g_mS$ – все такие элементы. Так как $|gS| \leq n$, то $gS = g_iS$ при некотором i , т.е. $g \in g_iS$, и поэтому g принадлежит $\bigcup_{i=1}^m g_iS = H$.

В силу леммы 2 каждое из множеств g_iS слойно конечно, а тогда и H содержит лишь конечное число элементов порядка n . Как показано выше, в H содержатся все элементы порядка n из G . Значит, G слойно конечна.

Теорема доказана.

Следствие. Если G – конечное центральное расширение слойно конечной группы S , то группа G слойно конечна.

2. Локально нормальные группы с черниковскими силовскими p -подгруппами

Теорема 3 [2]. Пусть G – локально нормальная группа с черниковскими силовскими p -подгруппами (по всем p). Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ множество всех p -элементов группы G порождает черниковскую (слойно конечную) подгруппу Sp , полная часть которой является p -группой и содержится в центре G .

Доказательство. Пусть R – полная часть группы Sp . Так как G – локально нормальная группа, то $R \subset Z(G)$. В силу условия силовская p -подгруппа R_p группы R черниковская и потому (так как она абелева) слойно конечная. Если P – произвольная силовская p -подгруппа группы G , то $P \subset Sp$ (по определению Sp) и полная часть L подгруппы P содержится в $Z(Sp)$, а потому содержится и в R_p . Но $R_p \subset P$ (ибо R_p инвариантна в G), и поэтому $R_p \subset L$. Значит, $L = R_p$.

Конечная фактор-группа P/R_p будет, как легко видеть, силовской p -подгруппой группы G/R_p . Значит, Sp/R_p – локально нормальная группа с конечными силовскими p -

подгруппами. Так как она порождается своими p -элементами (ввиду определения Sp), то $|Sp/R_p| < \infty$. Значит, $R_p = R$. В силу следствия теоремы 2 подгруппа Sp слойно конечна. Итак, Sp – черниковская слойно конечная группа с полной частью R_p , содержащейся в центре G .

Теорема доказана.

Следствие 1 [1]. Локально нормальная группа G с черниковскими силовскими p -подгруппами (по всем p) слойно конечна.

Доказательство. По теореме 3 для каждого $p \in \pi(G)$ все p -элементы группы G порождают слойно конечную подгруппу Sp . Так как все p -элементы группы G содержатся в Sp , то для любого $p \in \pi(G)$ множество всех элементов порядка p^n из G конечно (или пустое). Отсюда и из леммы 1 следует, что G слойно конечна.

Следствие доказано.

Следствие 2 [1]. Класс слойно конечных групп совпадает с классом локально нормальных групп с черниковскими силовскими p -подгруппами (по всем p).

3. Характеризация слойно конечных групп Я.Д. Половицким и ее применение

Теорема 4 [2]. Периодическая группа G тогда и только тогда слойно конечна, когда для любого $p \in \pi(G)$ множество всех ее p -элементов порождает черниковскую подгруппу, полная часть которой находится в ее центре и является p -группой.

Необходимость. Пусть G слойно конечна. Тогда она локально нормальная и, по теореме 1, все силовские p -подгруппы группы G черниковские. Теперь из теоремы 3 вытекает справедливость необходимого условия теоремы.

Достаточность утверждения теоремы вытекает из следствия теоремы 2 и леммы 1.

Теорема доказана.

Указанная в теореме 4 характеристика слойно конечных групп позволяет в качестве следствий из нее получить многие известные результаты теории непримарных слойно ко-

нечных групп. Ниже мы получим ряд таких результатов (теоремы 5, 7 и 10 С.Н.Черникова и теоремы 8 и 9 Я.Д.Половицкого).

Хорошо известно следующее утверждение:

Лемма 3. Если gN – p -элемент группы G/N , то $gN=tN$, где t – некоторый p -элемент группы G .

Следствие 1. Если $N \leq G$ и все p -элементы группы G содержатся в N , то в G/N нет отличных от единицы p -элементов.

Следствие 2. Если S_p – подгруппа, порожденная всеми p -элементами группы G , то $S_p N/N$ – подгруппа, порожденная всеми p -элементами фактор-группы G/N .

Теорема 5 ([1], с.140). Если $G=NM$, где $N \leq G$, $M \leq G$ и N, M – слойно конечные группы, то G слойно конечна.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Обозначим через S и S_1 соответственно подгруппы, порожденные всеми p -элементами групп N и M . По теореме 4 S и S_1 – черниковские группы. Они, очевидно, характеристические в N и M , и потому $S \leq G$, $S_1 \leq G$. Тогда $SS_1 = T \leq G$. Далее, $NT/T \cong N/N \cap T$. Так как $(N \cap T) \leq S$, то $NT/T \cong N/S/(N \cap T)/S$. Так как N/S не содержит по следствию 1 леммы 3 отличных от 1 p -элементов, то NT/T не содержит таких p -элементов. То же верно и для MT/T .

Так как $G/T = NT/T \cdot MT/T$, то в G/T нет неединичных p -элементов. Поэтому все p -элементы группы G содержатся в T , т.е. порождают черниковскую подгруппу (подгруппы S и S_1 – черниковские, и потому $T = SS_1$ – черниковская группа).

Покажем, что G – локально нормальная группа. Если $g \in G$, то $g = nm$, где $n \in N$, а $m \in M$. Но $n \in K$, где K – подгруппа, порожденная, некоторым слоем из N , и поэтому $|K| < \infty$; аналогично $m \in L$, $|L| < \infty$. Подгруппы K и L характеристические в N и M соответственно, и потому $K \leq G$, $L \leq G$. Мы получили, что $g \in KL \leq G$, $|KL| < \infty$ т.е. группа G локально нормальная. Следовательно, полные части подгрупп S и S_1 содержатся в центре G . По теореме 4 группа G слойно конечна.

Теорема доказана.

Примечание. Теорема 5 в монографии С.Н.Черникова [1] доказывается иначе.

С помощью теоремы 4 легко доказывается наследственность слойной конечности для фактор-групп.

Теорема 6. Всякая фактор-группа слойно конечной группы G слойно конечна.

Доказательство. Пусть A_p – подгруппа, порожденная всеми p -элементами группы G . По теореме 4 она черниковская и ее полная часть содержится в ее центре.

По следствию 2 леммы 3 $A_p N/N$ порождается всеми p -элементами группы G/N . Так как $A_p N/N \cong A_p/A_p \cap N$ – черниковская группа, причем ее полная часть содержится в ее центре, то по теореме 4 фактор-группа G/N слойно конечна.

Теорема доказана.

Лемма 4. Всякая содержащаяся в $Z(G)$ силовская p -подгруппа локально нормальной группы G является прямым множителем последней.

Формулировка этого утверждения несколько отличается от формулировки леммы 3.4 в работе [1], но доказывается оно точно так же, как и лемма 3.4.

Теорема 7 (С.Н.Черников, лемма 3.3 из работы [1]). Пусть F – максимальная полная p -подгруппа слойно конечной группы G . Тогда существует $K \leq G$, что $|K| < \infty$ и FK/K – полная силовская p -подгруппа группы G/K , изоморфная F .

Доказательство. Пусть S_p – подгруппа, порожденная всеми p -элементами группы G . По теореме 4 группа S_p – черниковская. Пусть F – ее полная часть ($F \leq Z(S_p)$). Тогда $S_p = FL$, где $|L| < \infty$. Каждый элемент из L находится в конечном слое группы G , и потому $L \leq K$, где K – характеристическая подгруппа группы G , содержащаяся в S_p . Из $S_p = FL$ следует, что $S_p = FK$. Далее, $S_p/K = FK/K \cong F/F \cap K \cong F$ (как фактор-группа полной абелевой группы по конечной подгруппе). Так как все p -элементы группы G порождают подгруппу S_p , то по следствию 2 леммы 3 все p -элементы группы G/K порождают подгруппу $S_p/K \cong F$, т.е. FK/K – инвариантная полная силовская p -подгруппа группы G/K .

Теорема доказана.

Замечание. Приведенное выше доказательство теоремы 7 отличается от доказательства леммы 3.3. в работе [1].

Следствие. Если P – максимальная полная подгруппа бесконечной силовской p -подгруппы слойно конечной группы G , то существует $N < G$, что силовские p -подгруппы группы N конечны и $G/N \cong P$.

Доказательство. По теореме 7 существует $K < G$, что $|K| < \infty$, $PK/K < G/K$ и PK/K – полная силовская p -подгруппа группы G/K . По лемме 4 имеем: $G/K = PK/K \times N/K$ (2)

Так как в N/K нет p -элементов и $|K|$ конечен, то в N все силовские p -подгруппы конечны. Ввиду (2) имеем:

$$G/K/N/K \cong G/N \cong PK/K \cong P.$$

Следствие доказано.

Лемма 5 (С.Н.Черников, лемма 3.5. из [1]). Если в локально нормальной группе G все силовские p -подгруппы конечны, то максимальный нормальный делитель N_p группы G , не содержащий p -элементов, имеет в G конечный индекс.

Доказательство этого утверждения приведено в работе [1].

Теорема 8 [2]. Пусть G – слойно конечная группа, N_p – ее максимальная нормальная подгруппа, не содержащая p -элементов. Тогда G/N_p – черниковская группа, полная часть которой содержится в центре и изоморфна силовской p -подгруппе P полной части группы G .

Доказательство. По следствию теоремы 7 существует подгруппа $N < G$ такая, что $G/N \cong P$ (3) и в N все силовские p -подгруппы конечны. Из (3) следует, что $N_p \subset N$ (4). По лемме 5 максимальный нормальный делитель M группы N , не содержащий p -элементов, имеет в N конечный индекс. Так как M – характеристическая подгруппа группы N , то $M < G$ и $G/N \cong (G/M)/(N/M) \cong P$, т.е. G/M – черниковская группа, являющаяся расширением конечной группы M/N с помощью полной абелевой группы P . Очевидно, полная часть черниковской группы G/M изоморфна P .

Так как фактор-группа G/M слойно конечная (по теореме 6), то полная часть содержится в ее центре. Легко видеть, что $M \subset N_p$. В силу определения M и (4) получаем, что $N_p = M$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем получить основную в нашем изложении теорему о строении слойно конечных групп, сформулированную вследствие 1 теоремы 1 из работы [2].

Теорема 9 [2]. Любая слойно конечная группа G изоморфно вкладывается в слойно конечное прямое произведение черниковских групп, полные части которых – p_i -группы по разным простым p_i и содержатся в центрах соответствующих множителей.

Доказательство. В силу теоремы 8 для любого $p_i \in \pi(G)$ существует такая подгруппа $N_{p_i} < G$, что $G/N_{p_i} = H_i$ – черниковская группа с указанными в теореме свойствами. Так как $\bigcap_{i=1}^{\infty} (N_{p_i}) = 1$ (что видно из определения N_{p_i}), то по теореме Ремака существует изоморфное отображение ϕ группы G на группу T , где $T \leq H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_i \otimes \dots$. Выше отмечено, что H_i – черниковские группы с полными частями, являющимися p_i -подгруппами и содержащимися в $Z(H_i)$. Так как для любого $p \in \pi(G)$ по теореме 4 Sp – черниковская группа, то $\pi(Sp)$ конечно. Отсюда и из $Sp < G$ следует, что $Sp \subset N_{p_i}$ для всех чисел p_i , за исключением, быть может, конечного числа. Поэтому при отображении ϕ каждый p -элемент, а значит и вся группа G , вкладывается в прямое произведение групп H_i : $G \cong T \leq \prod_{i=1}^{\infty} H_i = H$ и лишь конечное число групп H_i может содержать p -элементы. Отсюда и из того, что все H_i слойно конечны, следует, что их прямое произведение H является слойно конечной группой.

Теорема доказана.

Из теоремы 9 вытекает известная теорема С.Н.Черникова ([1], теорема 3.3):

Теорема 10. Любая слойно конечная группа G разлагается в произведение своей полной части $F \subset Z(G)$ и тонкой слойно конечной группы.

Доказательство. По теореме 9 группа G вкладывается в $H = \prod_{i=1}^{\infty} H_i$ (5), где $H_i = G/N_{p_i}$, причем $H_i = P_i N_i$ (6), где $|N_i| < \infty$, P_i – полная часть H_i и P_i (по теореме 8) изоморфна силовской p_i -подгруппе F_i группы F . Из (5) и (6) следует, что $H = LM$, где $L = (\prod_{i=1}^{\infty} P_i)$, $M = (\prod_{i=1}^{\infty} N_i)$.

Полная часть F группы G изоморфна L , ибо $F = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$, $F_i \cong P_i$. Так как полная абелева группа L с черниковскими силовскими p -подгруппами (по всем p), как нетрудно видеть, не может содержать истинных изоморфных полных подгрупп, то $F = L$, т.е. $H = FM$ (7). Отметим, что M – тонкая слойно конечная группа, как слойно конечное прямое произведение конечных групп. Но $G \geq F$, и потому из

(7) следует, что $G=F(M\cap G)$, где $(M\cap G)$ – тонкая слойно конечная группа.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 5 следует справедливость и обратного утверждения теоремы 10.

Этим мы завершим изложение основных результатов теории непримарных слойно конечных групп.

Список литературы

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Половицкий Я.Д. О локально экстремальных и слойно экстремальных группах // Матем. сб. 1962. Т.58, №2. С.685–694.
3. Черников С.Н. Бесконечные слойно конечные группы // Матем. сб. 1948. Т.22 (64). С.101–133.
4. Черников С.Н. К теории бесконечных р-групп // ДАН СССР. 1945. Т.50. С.71–72.
5. Baer R.. Finiteness properties of groups // Duke Math. J. 1948. Vol.15. P.1021–1032.
6. Сенашов В.Н. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993. 158 с.
7. Еремин И.И. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Матем. сб. 1959. Т.41(83). С.45–54.

Non-primary layer-finite groups

Ya. D. Polovitsky

Perm State University, 614990, Perm, Bukireva st., 15

This article contains the main results of non-primary layer-finite group theory. It is based on some results of S.N.Chernikov [1] and characterization of layer-finite groups, received by author in [2].